

# 圆柱外表面受热冲击问题的广义热弹性分析<sup>1)</sup>

王颖泽<sup>\*,2)</sup> 张小兵<sup>†</sup> 宋新南<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>(江苏大学能源与动力工程学院, 镇江 212013)

<sup>†</sup>(南京理工大学能源与动力工程学院, 南京 210094)

**摘要** 基于 L-S 广义热弹性理论, 针对实心圆柱体在外表面受均匀热冲击作用下的一维广义热弹性问题进行研究分析. 利用热冲击的瞬时特征, 借助于 Laplace 正、反变换技术及柱函数的渐近性质, 推导了热冲击作用周期内温度场、位移场和应力场的渐近表达式. 通过计算, 得到了热冲击条件下各物理场的分布规律以及延迟效应和耦合效应对热弹性响应的影响规律. 结果表明: 当考虑延迟效应和耦合效应时, 热扰动将以两组速度不同的波的形式向前传播, 延迟效应和耦合效应对各物理场的建立时间, 阶跃间隔和阶跃峰值均产生影响, 且延迟效应和耦合效应均在一定程度上削弱了热冲击的作用效果.

**关键词** 热冲击, L-S 广义热弹性理论, 耦合效应, 延迟效应, 解析解

中图分类号: O343.6 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)02-0317-09

## 引言

在材料的成型与制备过程中, 往往伴随着热量的传递. 随着现代材料科学的发展, 激光脉冲加热、金属快速凝固等材料改性技术的广泛应用, 传热过程的作用周期急剧缩短, 此时热量将以有限的速度在介质中传播<sup>[1]</sup>. 用于描述材料热力学行为的经典热弹性理论中的温度控制方程为扩散型方程, 这意味着当物体受到热作用时, 产生的热扰动具有无限大的传播速度. 显然, 对于尺度微观, 时间极短的热力学行为, 经典的热弹性理论无法给出准确的描述. 为了克服经典热弹性理论存在的缺陷, Lord 等<sup>[2]</sup>和 Green 等<sup>[3-4]</sup>分别对经典热弹性理论进行修正, 得到了能够描述热扰动在介质中以有限速度传播的广义热弹性理论(分别简称为 L-S 理论、G-L 理论和 G-N 理论). 此外, Sun 等<sup>[5]</sup>和 Zhou 等<sup>[6]</sup>从传热的微观机制出发, 分别采用抛物型微观两步模型和双曲型微观两步模型与热弹性动力学方程联立, 得到了用于分析尺度微观、时间极短条件下的热力学行为的物理模型. 利用这些理论和模型, 热扰动在介质内传播的波动效应可以充分地得到展示, 但是这些模型所包含的一组控制方程较为复杂, 在求解方面存在较大的数学困难. 当前采用广义热弹性理

论进行的研究分析主要围绕以下几种途径展开: (1) 忽略温度场控制方程中的耦合项, 直接对温度方程进行解耦求解, 然后在求解位移和应力场时计入温度的影响, 从而得到数学上的简化<sup>[7-9]</sup>. 从工程应用角度来看, 这种弱化耦合作用的处理方法尽管能够反映出固体中的“次声”效应, 但所获得的结论具有一定的局限性. (2) 借助于积分变换直接对控制方程进行耦合求解<sup>[5,10-14]</sup>, 但是在进行反变换时由于积分域内控制方程解的形式过于复杂, 只有在简单边界、形状规则的一维问题时才有可能得到时间域内的精确解<sup>[10-11]</sup>, 多数情况<sup>[5,12-14]</sup>均是要借助于数值反演技术, 而求解过程中引入的离散误差和截断误差降低了求解的精度, 且无法充分展示热的波动效应<sup>[15]</sup>. (3) 采用有限元或有限差分等数值方法直接对控制方程进行耦合求解<sup>[16-17]</sup>, 该方法的优点是避免了繁琐的积分变换过程, 且能够处理复杂的边界问题, 但其求解精度严重依赖所采用的差分格式以及网格划分的合理性, 同时也无法准确获取各特征参量与位移场、温度场和应力场之间的函数关系.

本文基于 L-S 理论, 针对热冲击问题的瞬时特征, 借助于 Laplace 正、反变换和柱函数的渐近性质, 推导了实心圆柱体在外表面受热冲击作用时的广义

2011-06-29 收到第 1 稿, 2011-08-17 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(11102073, 50978125), 江苏省自然科学基金(BK2008234)和江苏大学高级人才启动基金(10JDG055)资助项目.

2) E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn

热弹性解。通过计算,得到了位移场、温度场和应力场的分布规律,并给出了延迟项和耦合项对热弹性响应的影响,进而阐明了在研究热冲击问题时考虑延迟效应和耦合效应的必要性。

## 1 问题的数学描述

考虑一半径为  $b$ , 均质、各向同性的无限长实心圆柱体, 初始时刻均匀分布  $T_0$  温度, 当  $t = 0$  时刻, 边界突然施加一个温度为  $T_w$  的作用。

由于结构的对称性, 在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下, 弹性体内各点的位移具有如下的特征

$$u_r = u_r(r, t), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0 \quad (1)$$

将其代入各向同性体的本构关系<sup>[18]</sup>中可得

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-2\nu} \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{u_r}{r} - \alpha(T - T_0) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-2\nu} \left[ \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{u_r}{r} - \alpha(T - T_0) \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1-2\nu} \left[ \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{u_r}{r} - \alpha(T - T_0) \right] \quad (4)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{z\theta} = 0 \quad (5)$$

式中,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比,  $\alpha$  为线性热膨胀系数,  $u_r$  为弹性体的径向位移,  $T$  为弹性体的绝对温度。

根据弹性体的运动方程, 在不计体力的情况下, 可得到如下的平衡关系

$$\partial\sigma_{rr}/\partial r + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = \rho\ddot{u}_r \quad (6)$$

式中,  $\rho$  为密度, 变量上方的“.”表示对时间的导数。

将式(2)和式(3)代入方程(6)中进行整理, 可得到柱坐标系下, 各向同性体的热弹性动力学方程

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (7)$$

式中,  $C_L = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$  为弹性波在介质内的传播速度。

由于经典热弹性理论的温度控制方程为扩散型方程<sup>[18]</sup>, Lord 和 Shulman 在考虑热流的加速效应的基础上, 对控制方程进行修正

$$k\Delta T = \rho c_E (\dot{T} + \tau_0 \ddot{T}) + T_0 \beta (\nabla \dot{u} + \tau_0 \nabla \ddot{u}) \quad (8)$$

式中,  $k$  为热传导系数;  $c_E$  为常应变比热;  $\beta = \alpha E / (1 - 2\nu)$  为热力系数;  $\Delta$  为 Laplace 算子;  $\tau_0$  为热松弛时间, 其表征热流矢与温度梯度之间存在的延迟效果。

对于轴对称平面应变问题, 温度控制方程(8)可改写为

$$a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\beta T_0}{\rho c_E} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \quad (9)$$

式中,  $a = k / (\rho c_E)$  为导温系数。

方程(7)和(9)就构成了用于描述各向同性实心圆柱体平面应变热冲击问题的控制方程组。

边界设为应力自由边界, 其边界条件可表示为

$$r = b: \sigma_{rr} = 0, \quad T = T_0 + (T_w - T_0)H(t) \quad (10)$$

式中,  $H(t)$  为 Heaviside 单位函数。

相应的初始条件为

$$t = 0: u_r = 0, \quad \dot{u}_r = 0, \quad T = T_0, \quad \dot{T} = 0 \quad (11)$$

## 2 问题的解析求解

### 2.1 控制方程的无量纲化

为了便于分析, 引入以下无量纲变量

$$\left. \begin{aligned} r^* &= \frac{C_L}{a} r, \quad t^* = \frac{C_L^2}{a} t \\ \tau_0^* &= \frac{C_L^2}{a} \tau_0, \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \\ u_r^* &= \frac{(1-\nu)C_L}{a\alpha(1+\nu)(T_w - T_0)} u_r \\ \sigma_{ij}^* &= \frac{1-2\nu}{\alpha E(T_w - T_0)} \sigma_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将其代入方程(7)和(9)中, 进行无量纲化(为了便于表达去掉无量纲变量右上角的星号)

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} + \delta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \quad (14)$$

式中,  $\delta = \frac{(1+\nu)\alpha^2 E T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)\rho c_E}$  为耦合系数。

应力分量经无量纲处理后可得

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_r}{r} - T \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - T \quad (16)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_r}{r} - T \quad (17)$$

相应的无量纲化的初边界条件分别为(为了便于求解分析,无量纲化后的半径取为1)

$$t = 0: u_r = 0, \dot{u}_r = 0, T = 0, \dot{T} = 0 \quad (18)$$

$$r = 1: \sigma_{rr} = 0, T = H(t) \quad (19)$$

## 2.2 积分域内控制方程的求解

对无量纲化的控制方程(13)和(14)进行 Laplace 变换,结合初始条件(18)可得

$$\frac{d^2 \bar{u}_r(r, s)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}_r(r, s)}{dr} - \frac{\bar{u}_r(r, s)}{r^2} = s^2 \bar{u}_r(r, s) + \frac{d\bar{T}(r, s)}{dr} \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \bar{T}(r, s)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}(r, s)}{dr} = \omega_1 \bar{T}(r, s) + \omega_2 \left( \frac{d\bar{u}_r(r, s)}{dr} + \frac{\bar{u}_r(r, s)}{r} \right) \quad (21)$$

式中,  $\omega_1 = s(1 + \tau_0 s)$ ,  $\omega_2 = \delta s(1 + \tau_0 s)$ , 变量上方的“-”表示对该变量进行 Laplace 变换.

对控制方程(20)和(21)进行适当整理,可得到关于  $\bar{u}_r(r, s)$  和  $\bar{T}(r, s)$  的独立方程

$$(\Delta_1^2 - s^2)(\Delta_1^2 - \omega_1) \bar{u}_r(r, s) = \omega_2 \Delta_1^2 \bar{u}_r(r, s) \quad (22)$$

$$(\Delta_2^2 - s^2)(\Delta_2^2 - \omega_1) \bar{T}(r, s) = \omega_2 \Delta_2^2 \bar{T}(r, s) \quad (23)$$

$$\text{式中, } \Delta_1^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \Delta_2^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

根据柱函数的性质<sup>[19]</sup>可知,方程(22)和(23)的通解可分别表示成如下的形式

$$\bar{u}_r(r, s) = \sum_{i=1}^2 A_i(s) I_1(R_i r) + B_i(s) K_1(R_i r) \quad (24)$$

$$\bar{T}(r, s) = \sum_{i=1}^2 C_i(s) I_0(R_i r) + D_i(s) K_0(R_i r) \quad (25)$$

式中,  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $K_0(x)$  和  $K_1(x)$  分别为第一类和第二类整数阶虚宗量贝塞尔函数,  $R_i$  为系数方程  $R^4 - (s^2 + \omega_1 + \omega_2)R^2 + \omega_1 s^2 = 0$  的算数根, 系数  $A_i(s)$ ,  $B_i(s)$ ,  $C_i(s)$  和  $D_i(s)$  则由边界条件确定.

由于  $x \rightarrow 0$  时,  $K_\nu(x) \rightarrow \infty$ , 当所研究区域包含轴心 ( $r = 0$ ) 时, 应排除  $K_\nu(x)$ , 由此, 式(24)和(25)可改写为

$$\bar{u}_r(r, s) = A_1(s) I_1(R_1 r) + A_2(s) I_1(R_2 r) \quad (26)$$

$$\bar{T}(r, s) = C_1(s) I_0(R_1 r) + C_2(s) I_0(R_2 r) \quad (27)$$

将式(26)和式(27)代入方程(20)或(21)中进行整理可得

$$C_i(s) = \frac{R_i^2 - s^2}{R_i} A_i(s), \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

将上式代入式(28)中可得

$$\bar{T}(r, s) = \frac{R_1^2 - s^2}{R_1} A_1(s) I_0(R_1 r) + \frac{R_2^2 - s^2}{R_2} A_2(s) I_0(R_2 r) \quad (29)$$

分别对无量纲化的应力分量(15)以及边界条件(19)进行 Laplace 变换

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{d\bar{u}_r(r, s)}{dr} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\bar{u}_r(r, s)}{r} - \bar{T}(r, s) \quad (30)$$

$$r = 1: \bar{T}(r, s) = 1/s, \bar{\sigma}_{rr}(r, s) = 0 \quad (31)$$

将式(26), (29), (30)代入边界条件(31)中进行整理,可得到关于系数  $A_i(s)$  的关系式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{R_i^2 - s^2}{R_i} A_i(s) I_0(R_i) &= \frac{1}{s} \\ \sum_{i=1}^2 \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{s^2}{R_i} + \frac{s^2}{R_i^2} \right) A_i(s) I_1(R_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式中,  $k_\nu = (2\nu - 1)/(1 - \nu)$ .

对上式进行求解可得

$$A_1(s) = \frac{S_1}{A^*}, \quad A_2(s) = \frac{S_2}{A^*} \quad (33)$$

式中

$$S_1 = \frac{1}{s} \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{s^2}{R_2} + \frac{s^2}{R_2^2} \right) I_1(R_2)$$

$$S_2 = -\frac{1}{s} \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{s^2}{R_1} + \frac{s^2}{R_1^2} \right) I_1(R_1)$$

$$A^* = \left( R_1 - \frac{s^2}{R_1^2} \right) \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{s^2}{R_2} + \frac{s^2}{R_2^2} \right) I_0(R_1) I_1(R_2) - \left( R_2 - \frac{s^2}{R_2^2} \right) \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{s^2}{R_1} + \frac{s^2}{R_1^2} \right) I_0(R_2) I_1(R_1)$$

分别将式(33)代入式(26), (27), (31)中进行整理, 即可得到积分域内位移场、温度场和应力场的解析表达式.

### 2.3 时间域内控制方程的渐近求解

由于积分域内得到的各物理场的表达式过于复杂, 对其进行逆变换时无法得到关于变量  $t$  和  $r$  的显示形式, 为此这里需对积分域内得到的解进行适当的调整.

对系数方程  $R^4 - (s^2 + \omega_1 + \omega_2)R^2 + \omega_1 s^2 = 0$  进行求解可得

$$R_{1,2} = \left[ \frac{s^2 + \omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(s^2 + \omega_1 + \omega_2)^2 - 4\omega_1 s^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

考虑到热冲击的瞬时特性, 其作用周期极其短暂, 当  $t$  取极小时, 其影像  $s$  取极大, 由此式(34)可做如下近似<sup>[20]</sup>

$$R_{1,2} \approx k_{1,2}s + m_{1,2} \quad (35)$$

式中

$$k_{1,2} = \left( \frac{1 + \tau_0 + \delta\tau_0 \pm \sqrt{a}}{2} \right)^{1/2}$$

$$m_{1,2} = \frac{1 + \delta \pm b/\sqrt{a}}{4k_{1,2}}$$

$$a = (1 + \tau_0 + \delta\tau_0)^2 - 4\tau_0$$

$$b = (1 + \delta)^2\tau_0 + \delta - 1$$

对式(33)中的各项进行类似的近似处理可得

$$\frac{s^2}{R_{1,2}^2} \approx \frac{1}{k_{3,4}}, \quad R_1 - \frac{s^2}{R_1^2} \approx \frac{k_5}{k_1}s, \quad R_2 - \frac{s^2}{R_2^2} \approx \frac{k_6}{k_2}s \quad (36)$$

式中

$$k_{3,4} = \frac{1 + \tau_0 + \delta\tau_0 \pm \sqrt{a}}{2}$$

$$k_{5,6} = \frac{-1 + \tau_0 + \delta\tau_0 \pm \sqrt{a}}{2}$$

根据虚宗量贝塞尔函数的性质<sup>[19]</sup>, 当  $x \geq |\nu^2 - 1/4|$  时

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(x) \quad (37)$$

将式(35)~(37)代入到式(34)中进行整理可得

$$A_1 = \frac{(s/k_2 + k_\nu + 1/k_4)}{s^2(ps + q)} \sqrt{2\pi R_1} \exp(-R_1) \quad (38)$$

$$A_2 = \frac{(s/k_1 + k_\nu + 1/k_3)}{s^2(ps + q)} \sqrt{2\pi R_2} \exp(-R_2) \quad (39)$$

式中

$$p = \frac{k_5 - k_6}{k_1 k_2}$$

$$q = \frac{k_5}{k_1} \left( k_\nu + \frac{1}{k_4} \right) - \frac{k_6}{k_2} \left( k_\nu + \frac{1}{k_3} \right)$$

将式(38)和(39)分别代入各物理场的表达式中即可得到便于 Laplace 逆变换的形式, 通过逆变换可得到时间域内各物理场的解析式为

$$u_r(r, t) = r^{-1/2} \left\{ \frac{\exp(m'_1)}{k_2 p} t_1 H(t_1) - \frac{\exp(m'_2)}{k_1 p} t_2 H(t_2) \right\} \quad (40)$$

$$T(r, t) = r^{-1/2} \left\{ \exp(m'_1) \frac{k_5}{k_1 p} \left[ \frac{1}{k_2} - \left( \frac{q}{k_2 p} - k_\nu - \frac{1}{k_4} \right) t_1 \right] H(t_1) - \exp(m'_2) \frac{k_6}{k_2 p} \left[ \frac{1}{k_1} - \left( \frac{q}{k_1 p} - k_\nu - \frac{1}{k_3} \right) t_2 \right] H(t_2) \right\} \quad (41)$$

$$\sigma_{rr}(r, t) = r^{-1/2} \left\{ \frac{\exp(m'_1)}{k_1 k_2 p} \left\{ 1 - \left[ \frac{q}{p} - k_2 \left( k_\nu + \frac{1}{k_4} \right) - k_1 \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{1}{k_3 r} \right) \right] t_1 \right\} H(t_1) - \frac{\exp(m'_2)}{k_1 k_2 p} \left\{ 1 - \left[ \frac{q}{p} - k_1 \left( k_\nu + \frac{1}{k_3} \right) - k_2 \left( \frac{k_\nu}{r} + \frac{1}{k_4 r} \right) \right] t_2 \right\} H(t_2) \right\} \quad (42)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, t) = r^{-1/2} \left\{ \exp(m'_1) \frac{k_\nu k_1 + 1/k_1}{k_2 p} \left\{ 1 - \left[ \frac{q}{p} - k_2 \left( k_\nu + \frac{1}{k_4} \right) - \frac{k_1}{1 + k_\nu k_1^2} \left( k_\nu m_1 + \frac{1}{k_3 r} \right) \right] t_1 \right\} H(t_1) - \exp(m'_2) \frac{k_\nu k_2 + 1/k_2}{k_1 p} \left\{ 1 - \left[ \frac{q}{p} - k_1 \left( k_\nu + \frac{1}{k_3} \right) - \frac{k_2}{1 + k_\nu k_2^2} \left( k_\nu m_2 + \frac{1}{k_4 r} \right) \right] t_2 \right\} H(t_2) \right\} \quad (43)$$

$$\sigma_{zz}(r, t) = r^{-1/2} \left\{ \exp(m'_1) \frac{k_\nu k_1 + 1/k_1}{k_2 p} \left\{ 1 - \left[ \frac{q}{p} - k_2 \left( k_\nu + \frac{1}{k_4} \right) - \frac{k_1}{1 + k_\nu k_1^2} \left( \frac{k_\nu}{r} + k_\nu m_1 + \frac{1}{k_3 r} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. t_1 \right\} H(t_1) - \exp(m'_2) \frac{k_\nu k_2 + 1/k_2}{k_1 p} \left\{ 1 - \left[ \frac{q}{p} - k_1 \left( k_\nu + \frac{1}{k_3} \right) - \frac{k_2}{1 + k_\nu k_2^2} \left( \frac{k_\nu}{r} + k_\nu m_2 + \frac{1}{k_4 r} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. t_2 \right\} H(t_2) \right\} \quad (44)$$

式中,  $t_{1,2} = t - (1 - r)k_{1,2}$ ,  $m'_{1,2} = -(1 - r)m_{1,2}$ .

### 3 计算及结果分析

考虑一无量纲半径为 1 的各向同性、均质的无限长铜质实心圆柱体. 相关计算参数如下:  $k = 386 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\alpha = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\nu = 0.31$ ,  $c_E = 383.1 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $E = 115 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 8954 \text{ kg}/\text{m}^3$ . 初始温度  $T_0 = 300 \text{ K}$ , 考虑材料的热松弛时间  $\tau_0$  为温度的函数, 在常温下取  $\tau_0 = 10^{-11} \text{ s}$ .

经计算可知:  $\tau_0 = 1.58$  (无量纲化后),  $\delta = 1.59 \times 10^{-2}$ . 由于计算所得的耦合系数  $\delta$  较小, 为了突出耦合效应对热弹性响应的影响, 在后面的分析中将耦合系数  $\delta$  放大.

图 1~图 3 分别给出了  $\delta = 0.25$  时, 位移场, 温度场以及径向应力场的分布规律. 从图 1 给出的位移场分布中可知看到, 当圆柱体外表面受到热冲击作用时, 由于热扰动以有限的速度传播, 导致圆柱体内的热膨胀呈现由外向内扩展的动态演变过程, 随着时间的推移, 圆柱周边的径向位移不断扩大. 根据时间域内各物理场的表达式 (40)~(44) 可知, 由外部热冲击形成的作用效果分别以  $v_1 = 1/k_1$  和  $v_2 = 1/k_2$  的速度向轴心处传递, 结合  $k_1$  和  $k_2$  表达式可知, 热扰动的传播速度  $v_1$  和  $v_2$  是无量纲特征参量  $\tau_0$  和  $\delta$  的函数. 根据图 4 给出的不同  $\delta$  条件下, 热扰动速度随  $\tau_0$  的分布中可得:

- (1) 随着  $\tau_0$  的增大,  $v_1$  和  $v_2$  均呈现递减的趋势, 且  $v_1 < v_2$ ;
- (2) 当  $\tau_0 \rightarrow 0$  时,  $v_1 \rightarrow 1$ ,  $v_2 \rightarrow \infty$ , 其中速度为  $v_1$  的波表征的是受热膨胀产生的弹性波, 这里简称 E 波; 速度为  $v_2$  的波则表征的是热量在弹性体的传播, 简称 T 波.

根据上面的分析可知, 各物理场均是在 E 波和 T 波的共同作用下建立, 由于同一位置处 T 波的速度大于 E 波的速度, 即 T 波要先于 E 波到达

同一位置. 从图 2 给出的温度场的分布中可以看到, 在 T 波波前尚未到达的区域, 温度分布均为零,

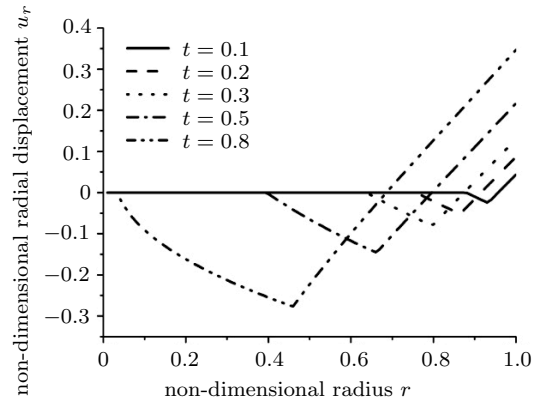


图 1 不同时刻无量纲径向位移分布

Fig. 1 Distribution of non-dimensional radial displacement at different non-dimensional time

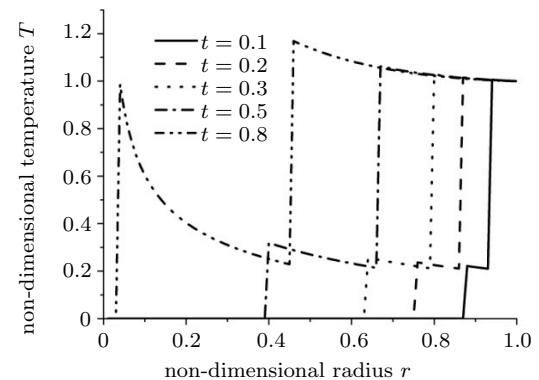


图 2 不同时刻无量纲径向温度分布

Fig. 2 Distribution of non-dimensional radial temperature at different non-dimensional time

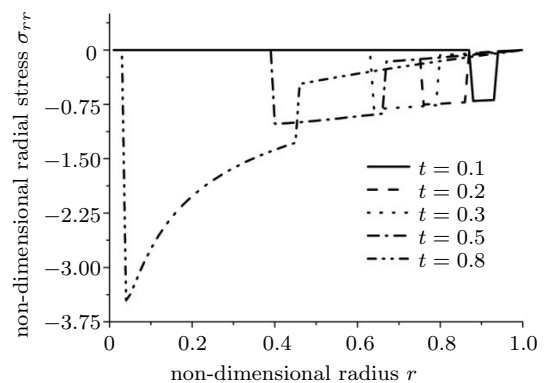


图 3 不同时刻无量纲径向应力分布

Fig. 3 Distribution of non-dimensional radial stress at different non-dimensional time

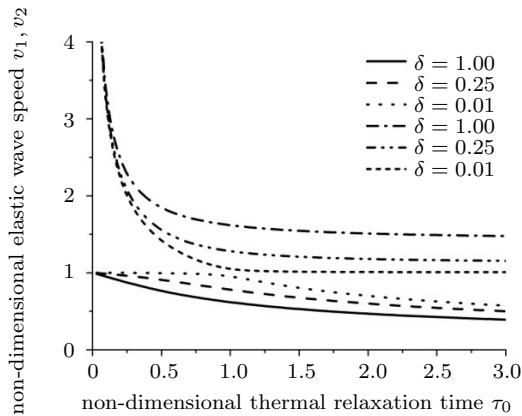


图4 不同耦合系数下无量纲弹性波速随无量纲热松弛时间的分布  
Fig. 4 Distribution of non-dimensional elastic wave speed versus thermal relaxation time at different coupling coefficient

而T波波前所到位置处的温度呈现明显的阶跃, 由此可知本文采用的近似处理可以很好地捕捉到波前的阶跃现象. 当T波到达该位置后一段时间, E波到达该位置, 在其影响下温度分布再次呈现阶跃, 即在热扰动传播过程中, 由于T波和E波的相继到达导致温度场的分布呈现两次阶跃现象. 这一现象在应力场的分布中也同样存在.

从图3给出的径向应力的分布中可以看到, 圆柱外表面处的应力为零, 而结合图2可知, 圆柱外表面的无量纲温度为1, 这与边界条件(19)是相吻合的. 结合图1可知, 当边界处受热膨胀时, 在离开边界的区域由于膨胀波尚未到达的缘故, 将承受边界膨胀给予的压应力的作用, 且受压区随着时间的推移不断向轴心处扩展, 这与图1给出的径向位移的动态效应是相对应的. 当 $t = (1 - r)k_2$ 时刻, T波到达 $r$ 位置处, 而此时E波尚未到达, 则该位置受热产生的热膨胀波受到抑制, 在邻近区域的挤压作用下, 该位置将形成幅值较大的尖峰应力, 并且在 $(1 - r)k_2 \leq t < (1 - r)k_1$ 的时间间隔保持缓慢增大的趋势. 当 $t = (1 - r)k_1$ 时刻, E波到达该位置, 在热膨胀波的作用下该位置的压应力迅速衰减, 而远离该位置的区域由于热扰动尚未到达, 其应力保持为零.

图5~图10分别给出了耦合效应及延迟效应对热冲击效果的影响. 从图5~图7给出的不同耦合系数下位移场、温度场和径向应力场的分布中可以看到, 表征应变率与温度分布之间耦合作用的特征参量 $\delta$ 对各物理场的影响具体体现在各物理场建立的时间, 两次阶跃的间隔以及阶跃产生的峰值的大小之上. 结合图4给出的耦合系数对E波和T波波速

的影响可知, 在给定 $\tau_0$ 时, 随着 $\delta$ 的增大,  $v_1$ 减小而 $v_2$ 增大, 体现在各物理场的分布上则有, 随着 $\delta$ 的增大, 各物理场开始建立的时间越早, 两次阶跃的间隔越长, 相应形成的阶跃峰值越小. 这表明, 耦合作用在一定程度上“抹平”了热冲击带来的作用效果.

图8~图10给出的是不同热松弛时间下各物理场的分布. 从图中可以看到, 由于 $\tau_0$ 的存在, 热流矢的传播与温度梯度存在延迟, 这导致各物理场的建立存在一定的滞后, 而随着 $\tau_0$ 的增大, 滞后时间越长, 同时由于温度在弹性体的不断集聚, 球体内局部区域温度梯度有增大的趋势, 但由于 $\tau_0$ 的增大, 使得E波和T波到达同一位置所需的时间间隔增大, 反使应力峰值呈现递减的趋势, 即延迟效应的存在同样对热冲击的作用效果产生抑制的作用.

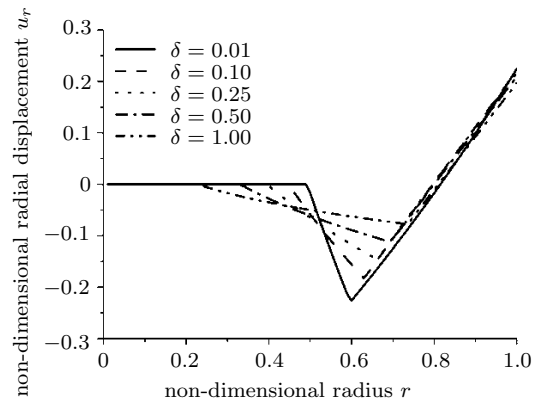


图5 不同耦合系数下无量纲径向位移分布  
Fig. 5 Distribution of non-dimensional radial displacement at different coupling coefficient

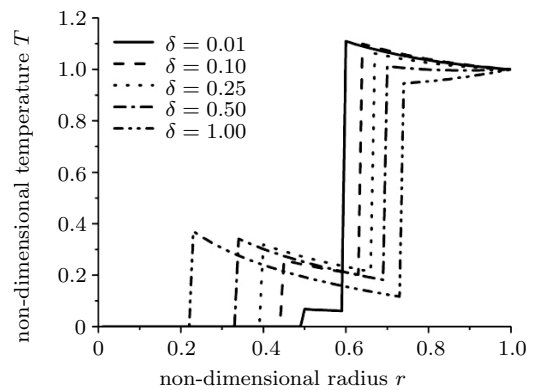


图6 不同耦合系数下无量纲温度分布  
Fig. 6 Distribution of non-dimensional temperature at different coupling coefficient

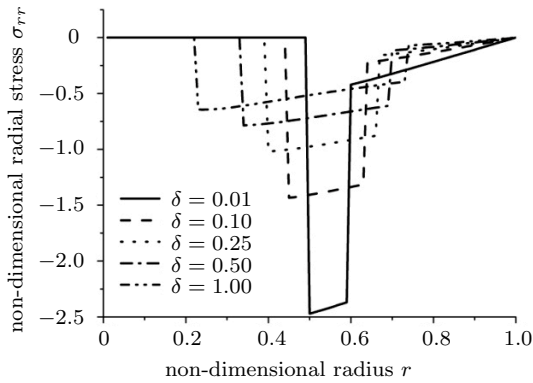


图 7 不同耦合系数下无量纲径向应力分布

Fig. 7 Distribution of non-dimensional radial stress at different coupling coefficient

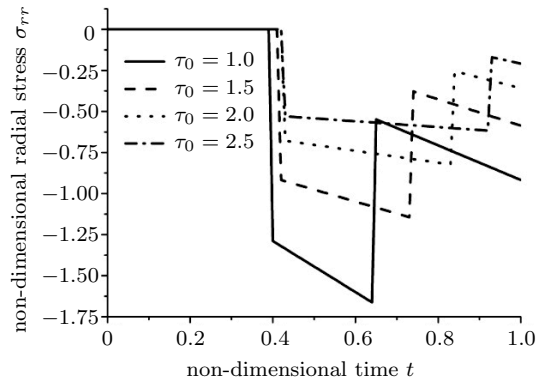


图 10 不同无量纲热松弛时间下无量纲径向应力分布

Fig. 10 Distribution of non-dimensional radial stress at different non-dimensional thermal relaxation time

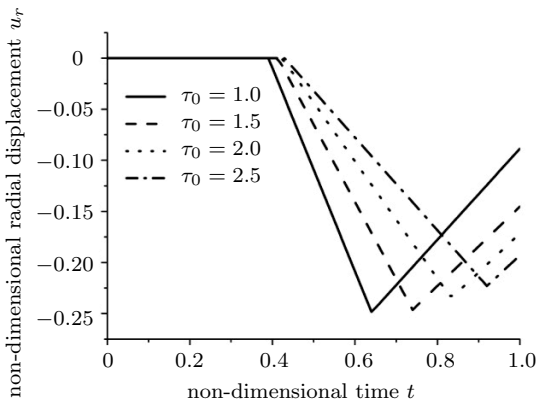


图 8 不同无量纲热松弛时间下无量纲径向位移分布

Fig. 8 Distribution of non-dimensional radial displacement at different non-dimensional thermal relaxation time

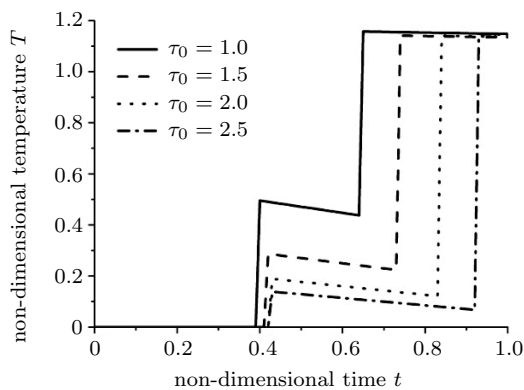


图 9 不同无量纲热松弛时间下无量纲温度分布

Fig. 9 Distribution of non-dimensional temperature at different non-dimensional thermal relaxation time

### 4 结 论

本文基于 L-S 广义热弹性理论, 采用解析的方法对实心圆柱体外表面受热冲击作用的一维广义热弹性问题进行研究分析, 得到了热冲击下位移场、温度场和应力场的分布规律, 并分析了延迟效应和耦合效应对热扰动在弹性体内传播的影响. 结果表明, 当考虑延迟和耦合效应时, 热扰动的传播将呈现明显的波动效应, 延迟和耦合效应在改变各物理场建立时机、阶跃间隔和阶跃峰值的同时, 对热冲击的作用效果均起到一定的抑制作用.

### 参 考 文 献

- 1 Loh JS, Azid IA, Seetharamu KN, et al. Fast transient thermal analysis of Fourier and Non-Fourier heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, 50(21-22): 4400-4408
- 2 Lord HW, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, 15(5): 299-309
- 3 Green AE, Lindsay KA. Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, 1972, 2(1): 1-7
- 4 Green AE, Naghdi PM. Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, 1993, 31(3): 189-208
- 5 Sun YX, Masumi Saka, Li J, et al. Ultrafast laser-induced thermoelastic behavior in metal films. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, 52(9): 1202-1207
- 6 Zhou LP, Tang DW, Wu BX, et al. Dynamic thermoelastic behavior of metal thin film under transient laser heating. *Materials Science and Engineering A*, 2006, 428(1-2): 284-289
- 7 Huang HM, Su F, Sun Y. Thermal shock of semi-infinite body with multi-pulsed intense laser radiation. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, 23(2): 175-180

- 8 Yibas BS, Al-Aqeel N. Analytical investigation into laser pulse heating and thermal stresses. *Optics and Laser Technology*, 2009, 41(2): 132-139
- 9 张士元, 郑百林, 贺鹏飞. 基于非傅里叶热传导半无限大体热冲击力学分析. *力学季刊*, 2009, 30(3): 420-426 (Zhang Shiyuan, Zheng Bailin, He Pengfei. Mechanics analysis of semi-infinite body under thermal shock with Non-Fourier model. *Chinese Quarterly Mechanics*, 2009, 30(3): 420-426 (in Chinese))
- 10 万强, 田晓耕, 沈亚鹏. 半无限长压电杆的瞬态热冲击问题. *固体力学学报*, 2003, 24(1): 98-108 (Wan Qiang, Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. Transient thermal shock problem of a semi-infinite piezoelectric rod. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24(1): 98-108 (in Chinese))
- 11 何天虎, 田晓耕, 沈亚鹏. 一维半无限压电杆的广义的热冲击问题. *力学学报*, 2003, 35(2): 158-165 (He Tianhu, Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. One-dimensional generalized thermal shock problem for a semi-infinite piezoelectric rod. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2): 158-165 (in Chinese))
- 12 Bagri A, Eslami MR. A unified generalized thermoelasticity solution for cylinders and spheres. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49(12): 1325-1335
- 13 Kumar R, Devi S. Thermomechanical deformation in porous generalized thermoelastic body with variable material properties. *Structural Engineering and Mechanics*, 2010, 34(2): 285-300
- 14 Babaei MH, Chen ZT. Transient thermopiezoelectric response of a one-dimensional functionally graded piezoelectric medium to a moving heat source. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, 80(7): 803-813
- 15 Eicaramany AS, Ezzat MA. Thermal shock problem in generalized thermoviscoelasticity under four theories. *International Journal of Engineering Science*, 2004, 42(7): 649-671
- 16 Tian XG, Shen YP, Chen CQ, et al. A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(7-8): 2050-2063
- 17 何天虎, 关明智. 直接有限元法求解广义磁热弹二维旋转问题. *固体力学学报*, 2011, 32(2): 203-209 (He Tianhu, Guan Mingzhi. Direct finite element method to a generalized two-dimensional magneto-thermoelastic problem of a rotating half-space, *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, 32(2): 203-209 (in Chinese))
- 18 王洪纲. 热弹性力学概论. 北京: 清华大学出版社, 1989 (Wang Honggang. Introduction of Thermo-elasticity. Beijing: Tsinghua University Press, 1989 (in Chinese))
- 19 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000 (Wang Zhuxi, Guo Dunren. Introduction to Special Function. Beijing: Peking University Press, 2000 (in Chinese))
- 20 Balla M, Hungary B. Analytical study of the thermal shock problem of a half-space with various thermoelastic models. *Acta Mechanica*, 1991, 89(1-4): 73-92

CNKI 优先出版编码: 1xxb2011-184-20111010

(责任编辑: 刘希国)



## RESEARCH ON GENERALIZED THERMOELASTIC PROBLEMS OF A SOLID CYLINDER SUBJECTED TO THERMAL SHOCK<sup>1)</sup>

Wang Yingze<sup>\*,2)</sup> Zhang Xiaobing<sup>†</sup> Song Xinnan<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>(*Energy and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

<sup>†</sup>(*Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)

**Abstract** Based on the L-S generalized thermoelasticity, one dimensional problem of a solid cylinder subjected thermal shock is studied. In accordance with the transient behaviors of thermal shock, the approximate short-time analytical solutions of the temperature, displacement and stresses are obtained via the Laplace transform and inverse transform. Numerical simulation is conducted for an isotropic solid cylinder, and the distribution of each physical field including the temperature, radial displacement, radial stress, hoop stress and axial stress are obtained, and the influence of the delay and the coupling effects on these distributions are also obtained. The results show that the thermal disturbance propagates forwards with two different velocities when the effects of the delay and coupling are considered, and these effects have influences on the time of each physical field began to establish, the intervals of two jumps and the peak values of jumps.

**Key words** thermal shock, L-S generalized thermoelasticity, coupling effect, delay effect, analytical solution

---

Received 29 June 2011, revised 17 August 2011.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11102073, 50978125), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK2008234) and the Research Foundation of Advanced Talents of Jiangsu University(10JDG055).

2) E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn