

热环境中黏弹性功能梯度材料及其结构的蠕变¹⁾

彭 凡²⁾ 顾勇军 马庆镇

(湖南大学机械与运载工程学院, 长沙 410082)

摘要 基于经典的对应原理, 将 Mori-Tanaka 方法等细观力学结果推广于定常温度环境下的黏弹性情形. 根据泊松比与时间呈弱相关的特点, 给出 Laplace 象空间中功能梯度材料的松弛模量和热膨胀系数, 并直接建立耦合热应变的多维黏弹性本构关系. 在此基础上, 求解黏弹性功能梯度圆柱薄壳在热环境中的轴对称弯曲蠕变变形问题. 考虑材料热物参数的温度相关性, 首先确定稳态温度场, 导出相空间中轴对称弯曲变形的解析解, 采用数值反演得到蠕变变形. 算例表明, 蠕变初期, 热环境的影响明显, 随着时间增加, 热应力松弛, 影响逐渐消失. 当圆柱薄壳受轴压时, 相比于两端固支, 两端简支的端部变形更加明显. 通过圆柱薄壳的轴对称弯曲求解, 给出体积含量呈任意分布的黏弹性功能梯度结构在热机载荷下的蠕变分析途径.

关键词 功能梯度材料, 热环境, 黏弹性, 圆柱薄壳, 蠕变, 细观力学

中图分类号: O034 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)02-0308-09

引 言

热环境中, 金属/陶瓷和聚合物/陶瓷等功能梯度材料表现出时间相依的力学行为, 研究其蠕变变形、蠕变失稳及延迟开裂机制等问题是十分必要的. 文献 [1-2] 基于 Norton 蠕变模型, 假设梯度材料的蠕变系数为径向坐标的函数, 分别得到了受内压球罐的球对称变形解和受内压厚壁圆筒的轴对称变形解. 一些学者利用黏弹性力学模型描述功能梯度材料的热流变, Paulino 等^[3]和 Khazanovich^[4]提出弹性-黏弹性对应原理; Zhang 等^[5]分析了功能梯度薄板的热黏弹性弯曲问题; 李伟杰等^[6]利用 Paulino 的对应原理研究了黏弹性功能梯度材料中垂直梯度方向的界面裂纹问题, 得到应力强度因子随时间变化的特征. 以上工作都是针对某类特殊的功能梯度材料展开的, 这些材料的蠕变系数或可简单表示为坐标的函数, 或松弛模量假设为时间函数与空间函数的乘积. 当组分材料体积含量呈任意改变时, 如何预测梯度材料的热流变参量, 并建立二维或三维热流变本构关系, 分析材料及其结构的时间相依力学行为, 这方面的相关报道很少. 在细观尺度上将功能梯度材料视为具有代表性胞元结构的统计均匀复合材料, 在宏观尺度上考虑组分材料体积分量的空间分布特

征, 这是功能梯度材料及其结构的力学分析的主要思想^[7]. 梁军等^[8]基于对应原理和 Eshelby 等效夹杂方法预测黏弹性颗粒复合材料的松弛与蠕变特性. 刘书田等^[9]给出了基于均匀化理论分析复合材料黏弹性的多尺度数值方法, 在相空间中进行有限元离散求解单胞域上的细观均匀化问题以及宏观位移和宏观应力, 结合曲线拟合和 Laplace 逆变换得到材料的黏弹性参量与热应力松弛模量, 分析过程较复杂. Muliana 等^[10-11]提出了黏弹性功能梯度结构的双尺度分析方法, 采用有限元法求解宏观场, 在积分节点处, 构造细观场并求解弹性、黏弹性应变, 给出宏细观耦合求解算法, 这是一种纯数值求解途径. 目前, 关于功能梯度材料及其结构的许多热弹性问题得到了解析或半解析解, 如何在考虑组分材料体积分量呈任意分布以及热流变特性的前提下, 进一步给出相应的蠕变力学行为分析途径, 这是本文的主要目的. 文章内容由两部分构成, 首先根据经典的对应原理, 将 Mori-Tanaka 方法等细观力学结果推广于定常温度环境下的黏弹性情形, 基于泊松比与时间呈弱相关的简化, 在 Laplace 象空间中直接预测黏弹性颗粒复合材料的松弛模量与热膨胀系数, 并给出多维热黏弹性本构方程. 然后, 以功能梯度圆柱薄壳轴对称弯曲蠕变变形的分析为例, 导出象空间中的解析

2011-07-16 收到第 1 稿, 2011-10-12 收到修改稿.

1) 湖南省自然科学基金资助项目 (11JJ3001).

2) E-mail: fanpeng@hnu.edu.cn

解, 由数值反演分析热/机载荷作用下圆柱薄壳的轴对称变形随时间的演化.

1 松弛模量与热膨胀系数的预测

考虑夹杂为球形颗粒的复合材料, 不妨将夹杂标记为材料 1, 基体为材料 2, 体积含量分别记为 V_1 与 V_2 . 组分材料的各向同性线弹性本构关系为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(e)r} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

式中, 上标括号中的“e”表示线弹性, $r=1, 2$, 分别对应材料 1 与材料 2, 由下式表示弹性张量

$$C_{ijkl}^{(e)r} = \lambda_r^{(e)} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G_r^{(e)} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2)$$

式中, $\lambda_r^{(e)} = (3K_r^{(e)} - 2G_r^{(e)})/3$ 为拉梅系数, 其中 $K_r^{(e)}$ 和 $G_r^{(e)}$ 分别是两种材料的体积弹性模量与剪切弹性模量, 符号 δ_{ij} 等为 Kronecker 记号. Mori 和 Tanaka 导出球形夹杂复合材料的等效体积弹性模量 $K^{(e)}$ 与剪切弹性模量 $G^{(e)}$ 分别为^[12-13]

$$\left. \begin{aligned} \frac{K^{(e)}}{K_2^{(e)}} &= 1 + \frac{V_1(K_1^{(e)} - K_2^{(e)})}{K_2^{(e)} + \chi_2(1 - V_1)(K_1^{(e)} - K_2^{(e)})} \\ \frac{G^{(e)}}{G_2^{(e)}} &= 1 + \frac{V_1(G_1^{(e)} - G_2^{(e)})}{G_2^{(e)} + \beta_2(1 - V_1)(G_1^{(e)} - G_2^{(e)})} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $\chi_2 = \frac{1 + \nu_2}{3(1 - \nu_2)}$, $\beta_2 = \frac{2(4 - 5\nu_2)}{15(1 - \nu_2)}$, 其中 ν_2 为基体材料的泊松比. 复合材料的有效泊松比

$$\nu = \frac{3K^{(e)} - 2G^{(e)}}{6K^{(e)} + 2G^{(e)}} \quad (4)$$

针对线黏弹性情形, 一般可认为组分材料的泊松比及复合以后材料的泊松比与时间无关^[8], 且假设材料经受小变形, 界面结合完备. 组分材料的各向同性线黏弹性本构关系的卷积形式为

$$\sigma_{ij} = \int_0^t C_{ijkl}^r(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kl}}{d\tau} d\tau \quad (5)$$

式(5)的松弛函数表示为

$$C_{ijkl}^r = \lambda_r(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G_r(t) \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (6)$$

式中 $\lambda_r = (3K_r - 2G_r)/3$, 其中 K_r 与 G_r 分别为体积松弛模量与剪切松弛模量. 设组分材料的松弛模量为 E_r , 则有

$$K_r = \frac{E_r}{3(1 - 2\nu_r)}, \quad G_r = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)} \quad (7)$$

假设材料无老化且处于等温环境中, 将式(5)和式(6)两边作 Laplace 变换

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = s \bar{C}_{ijkl}^{r*} \bar{\varepsilon}_{kl}^* \quad (8)$$

$$\bar{C}_{ijkl}^{r*} = \bar{\lambda}_r^*(s) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\bar{G}_r^*(s) \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (9)$$

式中, $\bar{\sigma}_{ij}^*$ 和 $\bar{\varepsilon}_{kl}^*$ 分别为象空间中的应力和应变张量, s 为 Laplace 参数. 以下所考虑的黏弹性材料的本构关系与本构参量均由式(5)~式(7)表述. 为方便论述, 将式(8)简记为

$$\bar{\sigma}^* = \bar{C}_s^{r*} \bar{\varepsilon}^* \quad (10)$$

其中 \bar{C}_s^{r*} 表示四阶张量 $s \bar{C}_{ijkl}^{r*}$. \bar{C}_s^{1*} 和 \bar{C}_s^{2*} 分别对应夹杂与基体的黏弹性张量.

1.1 象空间中的 Eshelby 等效夹杂方法

设想在一均匀的各向同性黏弹性体内有一局部球形区域 Ω_m , 其内产生大小不随时间变化的均匀本征应变 $\varepsilon(t) = \varepsilon H(t)$, 其中 $H(t)$ 是 Heaviside 函数. Eshelby 针对线弹性固体的分析结果表明^[13], 当本征应变均匀时, Ω_m 内的弹性场也是均匀的. 由经典的弹性-黏弹性对应原理可知, 象空间中球形区域 Ω_m 内的变形场也是均匀的, 可表示为

$$\bar{\varepsilon}^* = \Lambda \bar{\varepsilon}^* \quad (11)$$

式中, $\bar{\varepsilon}^*$ 和 $\bar{\varepsilon}^*$ 为 Ω_m 内应变 ε 和本征应变的象函数, Λ 与各向同性线弹性的 Eshelby 四阶张量^[13]相同, 有 9 个仅与基体泊松比有关的非零元素.

设无限大黏弹性基体中存在另一黏弹性球形区域 Ω_m , 后者称为异性夹杂. 不考虑异性夹杂 Ω_m 且黏弹性基体受均匀突加恒应力 $\sigma^\circ(t) = \sigma^\circ H(t)$ 作用, 有位移 u° , 应变 ε° , 因 Ω_m 的出现, 应力场变成 $\sigma^\circ + \sigma'$, 应变变为 $\varepsilon^\circ + \varepsilon'$, 其中 σ' 与 ε' 分别是扰动应力和应变. 当无限大基体与球形夹杂均为线弹性材料, 且受均匀远场载荷作用时, Eshelby 证明了球形夹杂内的应力应变场是均匀的. 可知无限大黏弹性基体受均匀远场载荷作用时, 夹杂内部的应力和应变场也是均匀的. 在象空间中, 将含球形夹杂的非均匀黏弹性体的应力应变场问题用 Eshelby 本征应变问题替换, 由下面两式联立, 求出等效本征应变以及夹杂内外的应力应变场

$$\bar{C}_s^{1*}(\bar{\varepsilon}^{\circ*} + \bar{\varepsilon}'^*) = \bar{C}_s^{2*}(\bar{\varepsilon}^{\circ*} + \bar{\varepsilon}'^* - \bar{\varepsilon}^*) \quad (12)$$

$$\bar{\varepsilon}'^* = \Lambda \bar{\varepsilon}^* \quad (13)$$

式中, $\bar{\varepsilon}^{\circ*}$ 与 $\bar{\varepsilon}'^*$ 分别为 ε° 和 ε' 的象函数. $\bar{\varepsilon}^*$ 为本征应变的象函数.

1.2 象空间中的 Mori-Tanaka 方法

考虑给定的含球形夹杂的黏弹性复合材料, 设它在边界上承受远场均匀恒应力 $\sigma^\circ(t) = \sigma^\circ \mathbf{H}(t)$. 另外考虑无论是形状还是黏弹性性质都和它的基体黏弹性性质一样的均质材料, 作用相同远场均匀应力, 产生应变 ε° , 其象函数由本构关系(10)确定

$$\bar{\varepsilon}^{\circ*} = (\bar{C}_s^{2*})^{-1} \bar{\sigma}^{\circ*} \quad (14)$$

式中, $\bar{\varepsilon}^{\circ*}$ 与 $\bar{\sigma}^{\circ*}$ 分别为 ε° 和 $\sigma^\circ(t)$ 的象函数.

复合材料基体受夹杂相的影响产生扰动应变 $\bar{\varepsilon}$, 基体的平均应变和平均应力为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^{(2)*} &= \bar{\sigma}^{\circ*} + \bar{\sigma}^* = \bar{C}_s^{2*} \bar{\varepsilon}^{(2)*} \\ \bar{\varepsilon}^{(2)*} &= \bar{\varepsilon}^{\circ*} + \bar{\varepsilon}^* \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $\bar{\sigma}^{(2)*}$ 和 $\bar{\varepsilon}^{(2)*}$ 分别为基体平均应力 $\sigma^{(2)}$ 和平均应变 $\varepsilon^{(2)}$ 的象函数, $\bar{\sigma}^*$ 与 $\bar{\varepsilon}^*$ 分别为扰动应力 $\bar{\sigma}$ 与扰动应变 $\bar{\varepsilon}$ 的象函数. 显然

$$\bar{\sigma}^* = \bar{C}_s^{2*} \bar{\varepsilon}^* \quad (16)$$

复合材料夹杂的平均应变和扰动应力与基体的相应平均场的差别记为 ε' 与 σ' . 用式(12)和式(13)表示的等效夹杂方法处理此扰动问题, 夹杂平均应力应变场为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^{(1)*} &= \bar{\sigma}^{\circ*} + \bar{\sigma}^* + \bar{\sigma}'^* = \bar{C}_s^{1*} \bar{\varepsilon}^{(1)*} \\ &= \bar{C}_s^{2*} (\bar{\varepsilon}^{\circ*} + \bar{\varepsilon}^* + \bar{\varepsilon}'^* - \bar{\varepsilon}^*) \\ \bar{\varepsilon}^{(1)*} &= \bar{\varepsilon}^{\circ*} + \bar{\varepsilon}^* + \bar{\varepsilon}'^* \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中, $\bar{\sigma}^{(1)*}$ 和 $\bar{\varepsilon}^{(1)*}$ 分别为平均应力 $\sigma^{(1)}$ 和平均应变 $\varepsilon^{(1)}$ 的象函数, $\bar{\sigma}'^*$ 为扰动应力 σ' 的象函数, $\bar{\varepsilon}^*$ 和 $\bar{\varepsilon}'^*$ 分别为等效本征应变和扰动应变的象函数. 后两个应变张量之间的关系由式(13)给出, 由式(15), (17)和(13), 可求得

$$\bar{\sigma}'^* = \bar{C}_s^{2*} (\bar{\varepsilon}'^* - \bar{\varepsilon}^*) = \bar{C}_s^{2*} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \bar{\varepsilon}^* \quad (18)$$

式中, \mathbf{I} 为四阶单位张量.

复合材料远场均匀应力 σ° 与其体积平均应力是相同的, 于是有

$$\bar{\sigma}^{\circ*} = V_1 \bar{\sigma}^{(1)*} + (1 - V_1) \bar{\sigma}^{(2)*} \quad (19)$$

式中 V_1 为夹杂相的体积分. 由式(15)~式(19)得到

$$\bar{\varepsilon}^* = -V_1 (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \bar{\varepsilon}^* \quad (20)$$

将式(13), (20)代入式(17)解出

$$\bar{\varepsilon}^* = \mathbf{A} \bar{\varepsilon}^{\circ*} \quad (21)$$

式中

$$\mathbf{A} = \{ \bar{C}_s^{2*} + (\bar{C}_s^{1*} - \bar{C}_s^{2*}) [V_1 \mathbf{I} + (1 - V_1) \mathbf{A}] \}^{-1} (\bar{C}_s^{2*} - \bar{C}_s^{1*})$$

在式(20), (21)及(14)的基础上, 复合材料平均应变场 $\bar{\varepsilon}$ 的象函数表示为

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^* &= V_1 \bar{\varepsilon}^{(1)*} + (1 - V_1) \bar{\varepsilon}^{(2)*} = \\ &= (\mathbf{I} + V_1 \mathbf{A}) (\bar{C}_s^{2*})^{-1} \bar{\sigma}^{\circ*} \end{aligned} \quad (22)$$

于是, 象空间中复合材料的等效黏弹性张量为

$$\bar{C}_s^* = \bar{C}_s^{2*} (\mathbf{I} + V_1 \mathbf{A})^{-1} \quad (23)$$

有效体积松弛模量和剪切松弛模量分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{K}^*}{\bar{K}_2^*} &= 1 + \frac{V_1 (\bar{K}_1^* - \bar{K}_2^*)}{\bar{K}_2^* + \chi_2 (1 - V_1) (\bar{K}_1^* - \bar{K}_2^*)} \\ \frac{\bar{G}^*}{\bar{G}_2^*} &= 1 + \frac{V_1 (\bar{G}_1^* - \bar{G}_2^*)}{\bar{G}_2^* + \beta_2 (1 - V_1) (\bar{G}_1^* - \bar{G}_2^*)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中的 χ_2 和 β_2 与式(3)的相同. 视球形颗粒复合材料为宏观各向同性的, 其有效松弛模量的象函数为

$$\bar{E}^* = \frac{9\bar{G}^* \bar{K}^*}{3\bar{K}^* + \bar{G}^*} \quad (25)$$

1.3 热传导系数与热膨胀系数的预测

有效热传导系数由细观力学方法导出^[14]

$$\frac{\kappa}{\kappa_2} = 1 + \frac{3V_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{3\kappa_2 + (1 - V_1)(\kappa_1 - \kappa_2)} \quad (26)$$

式中, κ_1 , κ_2 和 κ 分别为夹杂、基体与复合材料的热传导系数. κ 与模量无关, 故文中直接将式(26)用于黏弹性情形.

文献[14]给出了Levin预测颗粒复合材料热膨胀系数的方法, 即对同一胞元模型分别构造纯机械应力场和纯热应变场问题, 作耦合求积运算, 得

$$\frac{\alpha}{\alpha_2} = 1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{(K_2 - K)K_1}{(K_2 - K_1)K} \quad (27)$$

式中, α_1 , α_2 和 α 分别为夹杂、基体与复合材料的热膨胀系数. 在象空间中进行与弹性情形完全类似的运算, 可导出等效热膨胀系数的象函数为

$$\frac{\bar{\alpha}^*}{\bar{\alpha}_2^*} = 1 + \left(\frac{\bar{\alpha}_1^*}{\bar{\alpha}_2^*} - 1 \right) \frac{(\bar{K}_2^* - \bar{K}^*)\bar{K}_1^*}{(\bar{K}_2^* - \bar{K}_1^*)\bar{K}^*} \quad (28)$$

当 $0.4 < V_1 < 0.6$ 时, 需考虑夹杂之间的强相互作用. 热物参量可根据两个端点 $V_1 = 0.4$ 和 $V_1 = 0.6$ 的相应值进行线性内插求出^[15]. 以松弛模量为例

$$\frac{\bar{E}^* - \bar{E}_{0.4}^*}{V_1 - 0.4} = 5(\bar{E}_{0.6}^* - \bar{E}_{0.4}^*)$$

其中, $\bar{E}_{0.4}^*$ 和 $\bar{E}_{0.6}^*$ 分别表示 V_1 等于 0.4 和 0.6 时的有效松弛模量的象函数.

考虑 NiCr/Al₂O₃ 材料, 陶瓷 Al₂O₃ 为弹性, NiCr 的松弛模量设定为^[10]

$$E_{\text{NiCr}} = 56 + 100e^{-t/200}$$

式中, 模量单位为 GPa, 时间 t 的单位为 s, 其余热物参数见表 1.

表 1 组分材料的热弹性参数^[10]

Table 1 Thermo-elastic parameters of constitutes^[10]

	E/GPa	ν	$\alpha/(\text{K})$
Al ₂ O ₃	380	0.26	8.6×10^{-6}
NiCr	—	0.27	12.0×10^{-6}

由式 (7) 给出组分材料体积松弛模量与剪切松弛模量, 拉氏变换后, 代入式 (24), 由式 (25) 和式 (28) 得到有效松弛模量和有效热膨胀系数的象函数. 实施 Laplace 数值逆变换^[16] 得到物理空间的相应量. 图 1 给出了 4 个不同时刻的松弛模量与 Al₂O₃ 陶瓷体积分数的关系曲线, 同时给出文献 [10] 中基于微观计算得到的结果, 可见两者非常接近. 图 2 给出了 4 个不同时刻的热膨胀系数与陶瓷体积分数的关系. 总体上, 热膨胀系数随时间变化不明显, 只是当陶瓷体积分数在 0.4 ~ 0.8 时, 其值变化范围相对大一些.

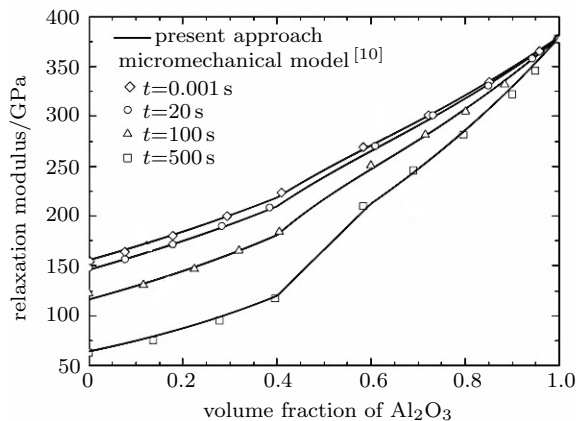


图 1 NiCr/Al₂O₃ 材料与时间相关的有效模量预测

Fig. 1 Prediction of time-dependent effective modulus for NiCr/Al₂O₃ composite materials

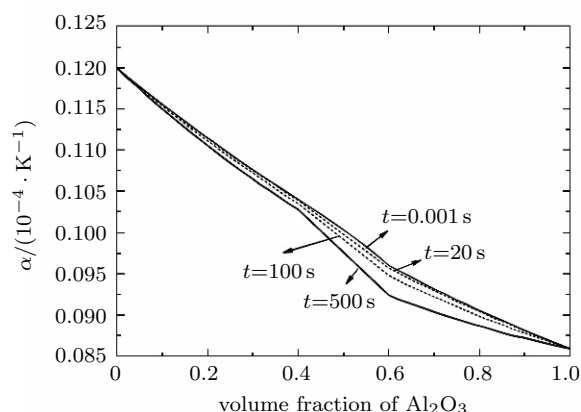


图 2 NiCr/Al₂O₃ 的有效热膨胀系数预测

Fig. 2 Prediction of effective coefficient of thermal expansion for NiCr/Al₂O₃

2 黏弹性功能梯度圆柱薄壳的轴对称弯曲

2.1 基本方程

考虑处于稳态温度场中的功能梯度等厚度圆柱薄壳, 机械载荷包括均匀分布的侧向压力 q 和轴向压力 p . 设圆柱薄壳的中曲面半径、轴向长度和厚度分别为 R , L 和 h . 建立直角坐标系 (x, y, z) , 其中 x 轴沿母线方向, 且以中间截面中性面上的一点为原点, y 是圆周方向的坐标, z 为厚度方向坐标 ($-h/2 < z < h/2$). 设中曲面上任意一点沿 x 与 y 方向的面内位移分别为 u_0 和 v_0 , 挠度为 w .

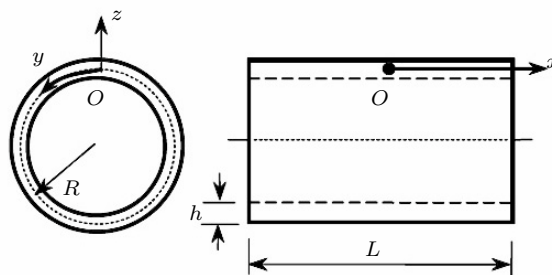


图 3 功能梯度圆柱薄壳

Fig. 3 Schematics of functionally graded cylindrical shell

稳态温度 T 只是 z 坐标的函数, 此时, 平面应力条件下的黏弹性本构关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \int_0^t J(t-\tau) d(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha(T - T_0) \\ \varepsilon_y &= \int_0^t J(t-\tau) d(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha(T - T_0) \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \int_0^t J(t-\tau) d\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中, T 和 T_0 分别表示温度与参考温度. 上式两边作 Laplace 变换, 注意到 $s^2 \bar{J}^* \bar{E}^* = 1$, 解出应力为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x^* &= \frac{s\bar{E}^*}{(1-\nu^2)} [\bar{\varepsilon}_x^* + \nu\bar{\varepsilon}_y^* - (1+\nu)\bar{\alpha}^*(T-T_0)] \\ \bar{\sigma}_y^* &= \frac{s\bar{E}^*}{(1-\nu^2)} [\nu\bar{\varepsilon}_x^* + \bar{\varepsilon}_y^* - (1+\nu)\bar{\alpha}^*(T-T_0)] \\ \bar{\tau}_{xy}^* &= \frac{s\bar{E}^*}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy}^* \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

由式 (4), (25) 和 (28) 确定象空间中功能梯度材料的本构参数. 假设陶瓷体积含量 V_1 沿厚度以幂函数形式变化, 即

$$V_1 = 1 - (0.5 - z/h)^n \quad (31)$$

其中, n 为材料 1 的体积分数指数 ($0 < n < \infty$).

轴对称弯曲的几何关系写为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - zw_{,xx}, \quad \varepsilon_y = w/R, \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (32a)$$

式中, $\varepsilon_{x0} = u_{0,x}$ 为轴向中面应变. 象空间中

$$\bar{\varepsilon}_x^* = \bar{\varepsilon}_{x0}^* - z\bar{w}_{,xx}^*, \quad \bar{\varepsilon}_y^* = \bar{w}^*/R, \quad \bar{\gamma}_{xy}^* = 0 \quad (32b)$$

物理关系为

$$\left. \begin{aligned} [\bar{N}_x^* \quad \bar{N}_y^*] &= \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\sigma}_x^* \quad \bar{\sigma}_y^*] dz \\ [\bar{M}_x^* \quad \bar{M}_y^*] &= \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\sigma}_x^* \quad \bar{\sigma}_y^*] z dz \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中, \bar{N}_x^* 和 \bar{N}_y^* 为薄膜内力, \bar{M}_x^* 与 \bar{M}_y^* 是内力矩.

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_x^* &= \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{x0}^* + \bar{A}_{12}^* \bar{w}^*/R - \bar{B}_{11}^* \bar{w}_{,xx}^* - \bar{N}_T^* \\ \bar{M}_x^* &= \bar{B}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{x0}^* + \bar{B}_{12}^* \bar{w}^*/R - \bar{D}_{11}^* \bar{w}_{,xx}^* - \bar{M}_T^* \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中, \bar{N}_T^* 和 \bar{M}_T^* 为热膜力和热弯矩, 且有

$$[\bar{N}_T^*, \bar{M}_T^*] = \int_{-h/2}^{h/2} s\bar{E}^* \bar{\alpha}^*(T-T_0)(1-\nu)^{-1} [1, z] dz$$

面内刚度、弯曲刚度以及耦合刚度分别为

$$\begin{aligned} [\bar{A}_{11}^*, \bar{B}_{11}^*, \bar{D}_{11}^*] &= s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{E}^* (1-\nu^2)^{-1} [1, z, z^2] dz \\ [\bar{A}_{12}^*, \bar{B}_{12}^*] &= s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{E}^* \nu (1-\nu^2)^{-1} [1, z] dz \end{aligned}$$

2.2 稳态热传导方程

温升 T 沿圆柱薄壳厚度的变化规律由一维定常热传导方程描述, 有

$$\frac{d}{dz} \left[\kappa(z, T) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad (35a)$$

式中, $\kappa(z, T)$ 为热传导系数. 相应的边界条件为

$$T(-h/2) = T_m, \quad T(h/2) = T_c \quad (35b)$$

边值问题 (35) 的解可表示为

$$T(z) = T_m \left[1 + (T_r - 1) \frac{\int_{-h/2}^z (\kappa(\eta, T))^{-1} d\eta}{\int_{-h/2}^{h/2} (\kappa(\eta, T))^{-1} d\eta} \right] \quad (36)$$

式中 $T_r = T_c/T_m$. 由于热传导系数与温度相关, 由式 (36) 构造同步迭代格式求得温度分布.

2.3 轴对称蠕变变形解

准静态下, 基于 DMV 浅壳理论给出的圆柱薄壳轴对称平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} &= 0 \\ M_{x,xx} - N_y/R + N_x w_{,xx} &= qH(t) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

两端的膜力边界条件为 $N_x = -pH(t)$. 将式 (37) 两端关于时间进行 Laplace 变换, 并利用式 (34), 得到

$$\bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{x0}^* + \bar{A}_{12}^* \bar{w}^*/R - \bar{B}_{11}^* \bar{w}_{,xx}^* = \bar{N}_T^* - p/s \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11}^* \bar{w}_{,xxx}^* + (Rp - 2\bar{B}_{12}^*) \bar{w}_{,xx}^*/R + \bar{A}_{11}^* \bar{w}^*/R^2 \\ - \bar{B}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{x0,xx}^* + \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{x0}^*/R = \bar{N}_T^*/R - q/s \end{aligned} \quad (38b)$$

由式 (38a) 解出

$$\bar{\varepsilon}_{x0}^* = -\frac{\bar{A}_{12}^*}{\bar{A}_{11}^* R} \bar{w}^* + \frac{\bar{B}_{11}^*}{\bar{A}_{11}^*} \bar{w}_{,xx}^* + \frac{\bar{N}_T^*}{\bar{A}_{11}^*} - \frac{p}{s\bar{A}_{11}^*}$$

代入式 (38b), 整理得

$$\bar{w}_{,xxxx}^* + 4\Gamma \bar{w}_{,xx}^* + 4\Omega^2 (\bar{w}^* - w_p) = 0 \quad (39)$$

式中

$$\begin{aligned} 4\Gamma &= \frac{pR\bar{A}_{11}^* - 2(\bar{A}_{11}^* \bar{B}_{12}^* - \bar{B}_{11}^* \bar{A}_{12}^*)}{R(\bar{A}_{11}^* \bar{D}_{11}^* - \bar{B}_{11}^{*2})} \\ 4\Omega^2 &= \frac{\bar{A}_{11}^{*2} - \bar{A}_{12}^{*2}}{R^2(\bar{A}_{11}^* \bar{D}_{11}^* - \bar{B}_{11}^{*2})} \\ w_p &= \frac{R[\bar{N}_T^*(\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*)s - qR\bar{A}_{11}^* + p\bar{A}_{12}^*]}{s(\bar{A}_{11}^{*2} - \bar{A}_{12}^{*2})} \end{aligned}$$

引入如下两个参数 θ_1 和 θ_2

$$\theta_{1,2} = \sqrt{2} \sqrt{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \Omega^2}}$$

式 (39) 的解可写为

$$\bar{w}^* = \eta_1 \cosh(\theta_1 x) + \eta_2 \cosh(\theta_2 x) + w_p \quad (40)$$

式中系数 η_1, η_2 由边界条件确定.

两端简支圆柱薄壳的边界条件为:

当 $x = \pm 0.5L$ 时 $\bar{w}^* = 0, \bar{M}_x^* = 0$. 得系数

$$\eta_1 = -\frac{w_p \lambda_2 + \lambda_3}{(\theta_2^2 - \theta_1^2)(\bar{B}_{11}^{*2} - \bar{A}_{11}^* \bar{D}_{11}^*) \cosh(\theta_1 L/2)}$$

$$\eta_2 = \frac{w_p \lambda_1 + \lambda_3}{(\theta_2^2 - \theta_1^2)(\bar{B}_{11}^{*2} - \bar{A}_{11}^* \bar{D}_{11}^*) \cosh(\theta_2 L/2)}$$

其中

$$\lambda_1 = \theta_1^2 (\bar{B}_{11}^{*2} - \bar{A}_{11}^* \bar{D}_{11}^*) + R^{-1} (\bar{A}_{11}^* \bar{B}_{12}^* - \bar{A}_{12}^* \bar{B}_{11}^*)$$

$$\lambda_2 = \theta_2^2 (\bar{B}_{11}^{*2} - \bar{A}_{11}^* \bar{D}_{11}^*) + R^{-1} (\bar{A}_{11}^* \bar{B}_{12}^* - \bar{A}_{12}^* \bar{B}_{11}^*)$$

$$\lambda_3 = s^{-1} p \bar{B}_{11}^* - R^{-1} (\bar{A}_{11}^* \bar{B}_{12}^* - \bar{A}_{12}^* \bar{B}_{11}^*) w_p + \bar{A}_{11}^* \bar{M}_T^* - \bar{B}_{11}^* \bar{N}_T^*$$

两端固支:

当 $x = \pm 0.5L$ 时 $\bar{w}^* = 0, \bar{w}_{,x}^* = 0$. 则

$$\eta_1 = -\theta_2 w_p \lambda_4^{-1} \sinh(0.5\theta_2 L)$$

$$\eta_2 = \theta_1 w_p \lambda_4^{-1} \sinh(0.5\theta_1 L)$$

其中

$$\lambda_4 = \theta_2 \cosh(0.5\theta_1 L) \sinh(0.5\theta_2 L) - \theta_1 \sinh(0.5\theta_1 L) \cosh(0.5\theta_2 L)$$

首先依式 (36) 迭代求解温度场, 并在象空间中, 沿厚度方向用数值求积的方法得到刚度参数 $\bar{A}_{11}^*, \bar{B}_{11}^*, \bar{D}_{11}^*, \bar{A}_{12}^*, \bar{B}_{12}^*$, 以及热载荷参数 \bar{N}_T^* 和 \bar{M}_T^* . 然后, 由式 (40) 进行数值反演得各点挠度.

2.4 算例

考虑 Al/SiC 功能梯度圆柱薄壳. 组分材料的热物参数与温度的关系见表 2, 其中 T 表示单位为 K 的温度. Al 的蠕变柔量表示为

$$J(t, T) = g_T \Theta_0 + \sum_{n=1}^6 \Theta_n (1 - e^{-\lambda_n t})$$

式中, $g_T = \exp\{0.35[(T - T_0)/T_0]^2\}$, 与温度相关, 参考温度 $T_0 = 300$ K, $\Theta_n (n = 1, 2, \dots, 6)$ 的取值见表 3.

表 2 Al 与 SiC 的热弹性参数^[11]

Table 2 Thermo-elastic parameters of Al and SiC^[11]

	Al	SiC
E/GPa	—	$406.783 - 0.022617T$
ν	0.33	0.2
$\kappa/(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	$235 - 0.03057T + 0.00037T^2 - 6 \times 10^{-7}T^3 + 3 \times 10^{-10}T^4$	$183.78 - 0.15697T$
$\alpha/(1 \cdot \text{K}^{-1})$	$2 \times 10^{-11} + 6 \times 10^{-15}T + 3 \times 10^{-18}T^2 + 1 \times 10^{-20}T^3$	$3 \times 10^{-12} + 3 \times 10^{-15}T - 6 \times 10^{-18}T^2$

表 3 Al 的蠕变柔量系数^[11]

Table 3 Coefficients of creep flexibility of Al^[11]

n	λ_n	Θ_n/GPa^{-1}
0	—	0.01377
1	1	0.0001
2	10^{-1}	0.00015
3	10^{-2}	0.02
4	10^{-3}	0.03
5	10^{-4}	0.16
6	10^{-5}	1.10

取体积含量分布的幂指数 $n = 1$, 几何参数 $L = 2$ m, $R = 1$ m, $h = 0.005$ m. 圆柱薄壳承受内压 $q =$

-2 MPa, 考虑壁厚方向的均匀升温 $T_c = T_m = 800$ K 和两端简支边界条件, 不同时刻的挠度分布示于图 4. 为验证黏弹性解的有效性, 同图给出相应的准弹性解, 它是将式 (5) 和式 (29) 中的卷积运算替换为乘法运算给出的, 可在实域中直接推导基本方程, 最后得到与式 (40) 形式相同的准弹性挠度解. 从图 4 可见, 挠度随时间增大, 蠕变变形较明显, 在加恒载后的初期, 准弹性解与黏弹性解基本相同, 随着载荷持续时间增加, 准弹性解略小于黏弹性解. 考虑均匀升温 $T_c = T_m = 800$ K 和梯度升温 $T_c = 1100$ K, $T_m = 500$ K 两种方式, 取不同的体积含量幂指数, 两端简支圆柱薄壳中点的蠕变曲线示于图 5, 可知蠕变初期, 两种升温方式所对应的挠度值有一定的差别,

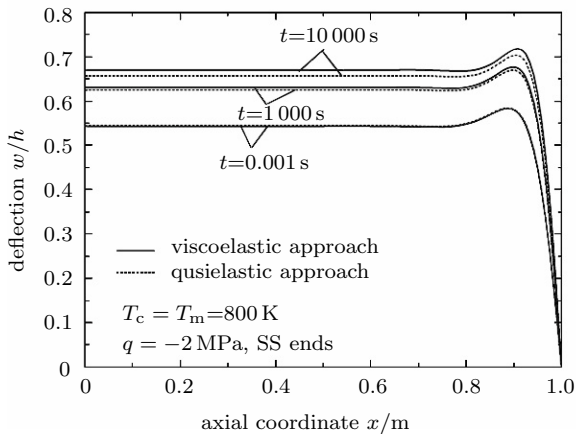


图 4 受内压且两端简支的挠度

Fig. 4 Deflection for simply supported ends under internal pressure

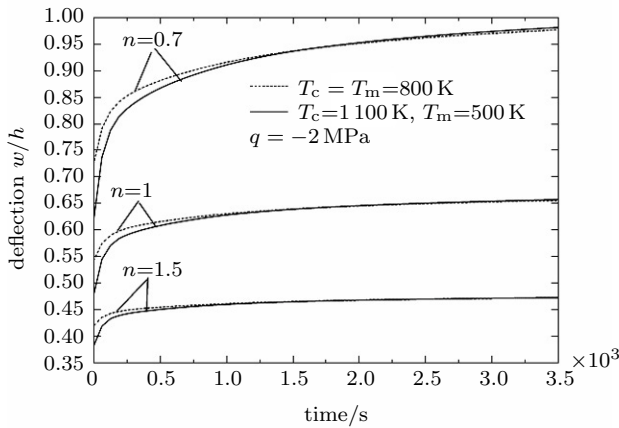


图 5 受内压时均匀升温与梯度升温的挠度

Fig. 5 Deflection for internal pressure with uniform temperature rise

随着载荷持续时间的增加, 挠度值趋于相同. 陶瓷的体积含量分布对蠕变行为影响明显, 随着 n 的增大, 陶瓷含量增加, 功能梯度圆柱薄壳的蠕变范围明显缩小.

考虑圆柱薄壳轴向受压, $p=600$ kN/m, 取材料分布幂指数 $n=1$, 分别对应两端简支与固支的边界条件, 不同时刻的挠度分布示于图 6. 可见, 靠近端部, 由于对变形的约束强, 固支时的挠度明显小于简支的, 后者的变形随时间变化显著. 说明轴压作用下, 材料的蠕变特性显著放大了圆柱薄壳的端部约束效应. 进一步分析均匀温升和梯度温升时两端简支圆柱薄壳端部的蠕变, 结果示于图 7, 同样可见, 在蠕变初期, 两种温升方式所对应的挠度值相差显著, 随着时间增加, 差异逐渐变小. 与受内压的结果比较可知, 升温方式对承受轴压的两端简支圆柱薄壳的端

部变形有明显影响. 需要指出的是, 上述蠕变变形特征都是针对圆柱薄壳两端面内可动的情形获得的.

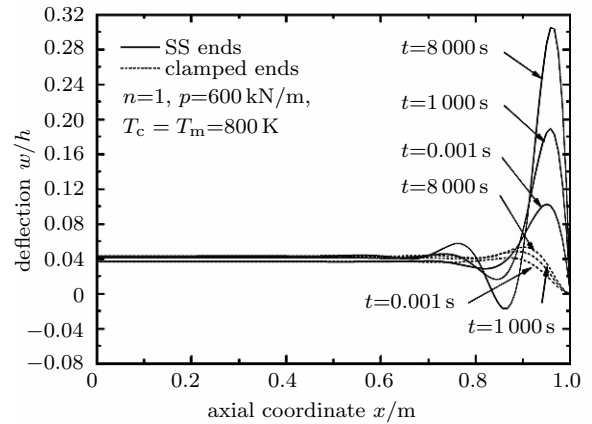


图 6 受轴压时简支与固支边界的端部约束效应

Fig. 6 Effect of boundary conditions on deformation near ends under axial compression

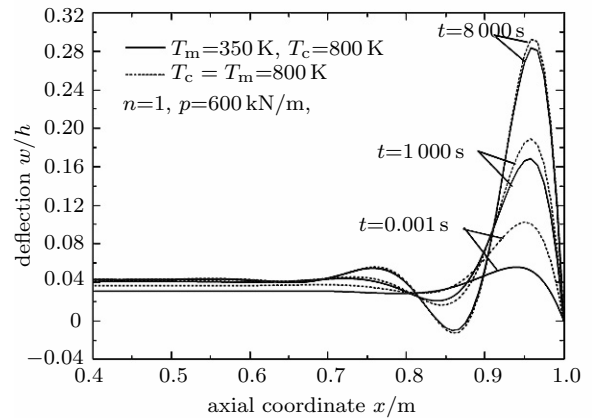


图 7 均匀温升和梯度温升时的端部约束效应

Fig. 7 Influence of uniform and gradient temperature rise on deformation near ends

3 结 论

基于经典的弹性 - 黏弹性对应原理和泊松比与时间呈弱相关的简化, 直接得到 Laplace 象空间中黏弹性功能梯度材料的松弛模量和热膨胀系数, 并给出耦合热应变的多维黏弹性本构关系. 分析实例表明, 松弛模量的预测与文献中的细观场计算结果是吻合的; 热膨胀系数随时间变化的范围不大, 且这种时间相依性与体积含量有关.

考虑陶瓷体积分量的幂函数分布, 求解了热/机载荷作用下黏弹性功能梯度圆柱薄壳的轴对称弯曲问题. 算例表明, 蠕变初期, 升温 and 升温方式的影响

明显, 随着载荷维持时间的增加, 热应力松弛, 热影响逐渐消失. 当圆柱薄壳受轴压时, 相比于两端固支, 两端简支的端部变形更加明显. 通过此轴对称弯曲问题的求解, 期望给出热环境中体积含量呈任意分布的黏弹性功能梯度结构的蠕变分析途径.

参 考 文 献

- 1 陈建钧, 涂善东, 轩福贞等. 蠕变条件下梯度材料球罐应力应变行为分析. 机械工程学报, 2008, 44(3): 89-93 (Chen Jianjun, Tu Shandong, Xuan Fuzhen, et al. Analysis on stress and strain behavior of spherical vessel of functionally graded material under creep condition. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(3): 89-93 (in Chinese))
- 2 You LH, Ou H, Zheng ZY. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure. *Composite Structures*, 2007, 78(2): 285-291
- 3 Mukherjee S, Paulino GH. The elastic-viscoelastic correspondence principle for functionally graded materials, revisited. *ASME J Appl Mech*, 2003, 70(3): 359-363
- 4 Lev Khazanovich. The elastic-viscoelastic correspondence principle for non-homogeneous materials with time translation non-invariant properties. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(1): 2-10
- 5 Zhang NH, Wang ML. Thermoviscoelastic deformations of functionally graded thin plates. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2007, 26(5): 872-886
- 6 李伟杰, 王保林, 张幸红. 功能梯度材料的黏弹性断裂问题. 力学学报, 2008, 40(3): 402-406 (Li Weijie, Wang Baolin, Zhang Xinghong. Viscoelastic fracture of a functionally graded material strip. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(3): 402-406 (in Chinese))
- 7 沈惠申. 功能梯度复合材料板壳结构的弯曲、屈曲和振动. 力学进展, 2004, 34(1): 53-60 (Shen Huishen. Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(1): 53-60 (in Chinese))
- 8 梁军, 杜善义. 粘弹性复合材料力学性能的细观研究. 复合材料学报, 2001, 18(1): 97-100 (Liang Jun, Du Shanyi. Study of mechanical properties of viscoelastic matrix composite by micromechanics. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2001, 18(1): 97-100 (in Chinese))
- 9 刘书田, 马宁. 粘弹性复合材料热应力松弛与本构关系研究 (I): 理论分析. 复合材料学报, 2005, 22(1): 152-157 (Liu Shutian, Ma Ning. Study on the thermal stress relaxation and constitutive equations of viscoelastic composite materials (I): general theory. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(1): 152-157 (in Chinese))
- 10 Muliana AH. A micromechanical model for predicting thermal properties and thermo-viscoelastic responses of functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(9): 1911-1925
- 11 Khan KA, Muliana AH. A multi-scale model for coupled heat conduction and deformations of viscoelastic functionally graded materials. *Composites: Part B*, 2009, 40(6): 511-521
- 12 Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgy*, 1973, 21(5): 571-574
- 13 杜善义, 王彪. 复合材料细观力学. 北京: 科学出版社, 1998 (Du Shanyi, Wang Biao. *Micromechanics of Composite Materials*. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese))
- 14 Christensen RM. *Mechanics of Composite Materials*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1979
- 15 Yin HM, Paulino GH, Buttlar WG, et al. Micromechanics-based thermoelastic model for functionally graded particulate materials with particle interactions. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2007, 55(1): 132-160
- 16 彭凡, 陈耀军, 刘一凡等. 基于 Fourier 级数展开的 Laplace 数值逆变换. 力学学报, 2008, 40(2): 215-221 (Peng Fan, Chen Yaojun, Liu Yifan, et al. Numerical inversion of Laplace transforms in viscoelastic problems by Fourier series expansion. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(2): 215-221 (in Chinese))

CNKI 优先出版编码: 1xxb2011-201-20111021

(责任编辑: 周冬冬)

CREEP BEHAVIOR OF VISCOELASTIC FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS AND STRUCTURES IN THERMAL ENVIRONMENT¹⁾

Peng Fan²⁾ Gu Yongjun Ma Qingzhen

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract Based on classical correspondence principle, Mori-Tanaka and other micromechanical approaches are extended to treat the case of linear viscoelasticity in the constant thermal environment. The relaxation modulus and coefficient of thermal expansion of linearly viscoelastic FGMs are given directly in Laplace phase space, and multi-dimensional viscoelastic constitutive relation coupling thermal strain is constructed through considering the weak time-dependent feature of Poisson's ratio. Following the above work, the problem of axial symmetrical bending of viscoelastic functionally graded circular cylindrical thin shells is solved. The steady temperature field is determined taking into account of the temperature dependence of thermal and mechanical parameters. The analytic solution is derived in phase space and the creep deflection is obtained by means of Laplace numerical inversion. It is shown that the thermal effect is obvious at initial creep stage, but abates with the increase of time due to the relaxation of the thermal stresses, and the constraint effect for hinged ends is more prominent than that of clamped ends on the deflection near ends when circular cylindrical thin shell is subjected to axial compression. It is expected to give the general approach to analyze the creep deformation of viscoelastic functionally graded structures with arbitrary distribution of volume content under thermal and mechanical loading by solving above problem of axial symmetrical bending.

Key words functionally graded material, thermal environment, viscoelasticity, circular cylindrical shell, creep, micromechanics

Received 16 July 2011, revised 12 October 2011.

1) The project was supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province (11JJ3001).

2) E-mail: fanpeng@hnu.edu.cn