第 28 卷 第 7 期
Vol. 28 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2013 年 7 月
Jul. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 07-1051-04

大型群组多属性决策Bayes概率修正法

马本江, 徐 晨, 毕文杰, 陈晓红

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 针对大型群组多属性决策问题, 给出了备选对象的优势集和Pareto有效率, 并讨论了二者的性质. 证明并指出了只有备选对象为Pareto解时, 其Pareto有效率才可能不为0. 将Pareto备选对象的Pareto有效率作为其“最优决策”的先验概率分布, 然后利用Bayes公式和群组专家们决策的后验概率对其加以修正, 即可得到“最优决策”概率最大的备选对象. 该方法在充分利用专家组决策信息的前提下避免了寻找一个主观集结规则的决策问题, 不需要集结出一个权重结果, 从而减少了决策过程中主观因素的影响, 并且当将每位专家的决策看成一个独立的随机实验时, 理论上专家人数越多, 决策结果越精确. 最后以一个算例说明了所提出方法的有效性.

关键词: Pareto有效解；优势集；Pareto有效率；多属性

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Revised method of Bayes probability in multi-attribute large group decision-making

MA Ben-jiang, XU Chen, BI Wen-jie, CHEN Xiao-hong

(School of Business，Central South University，Changsha 410083，China．Correspondent：MA Ben-jiang，E-mail: mabenjiang@126.com)

Abstract: Aiming at the multi-attribute large group decision-making, this paper presents the superior set of candidates and Pareto valid probability and then discusses the characteristics of them. The results show that the candidate set may not be zero only if it is the Pareto solution. This paper takes candidate’s Pareto valid probability as the priori probability distribution of “optimal decision” and then corrects them using the posterior probability in Bayes formula and experts’ decisions in groups. As a result, the candidate with the largest probability of “optimal decision” can be achieved. This method avoids finding a subjective aggregation rules after taking full advantage of the information from experts in group decision-making. More experts in groups can make the more accurate result when reducing subjective factors in decision-making process and taking each expert’s decision as an independent random experiment. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Pareto efficient solution；superior set；Pareto valid probability；multiple attribute

0 引 言

管理决策中常常面临如下多属性决策问题: 有 m 个选择对象 $B_1, B_2, \cdots, B_m$, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^{\mathrm{T}}$ 是表征 B_i 属性的向量, 其中 $x_{ij} (x_{ij} \geqslant 0)$ 表示 B_i 的第 j 个属性指标值, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. 令 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, 则有如下多目标问题:

$$\mathrm{LVP}\ \max_{x\in S} Z = x,$$

即在 m 个选择对象 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 中按“各属性指标值越大越好”的原则选出最好的. 在多目标的Pareto原则下, LVP的最优选择一般情况下不是唯一的. 实践中, 为了得到该问题唯一最佳选择, 常常通过专家组群体决策确定出属性指标间权重 $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n)^{\mathrm{T}}$, 最终通过比较各 $\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} x_i (i = \overline{1, m})$ 选出最大者.

实践中, 个体决策受专业能力差异、经验、知识面、决策时的精神状态、情绪和偏好等随机因素的影响, 决策结果具有随机性. 可以将专家的决策水平比作一把“尺子”, 将备选对象比作“测量对象”, 此时决

收稿日期: 2012-05-10；**修回日期:** 2013-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金创新群体项目(70921001)；国家自然科学基金面上项目(71072078, 70971139)；国家自然科学基金青年项目(71103203)；教育部人文社会科学基金项目(09YJC790260)；中南大学人文社科杰出青年人才基金项目(2011RWSK008)；中南大学2011年青年教师助推专项基金项目(2011QNZT237).

作者简介: 马本江(1972−), 男, 副教授, 从事决策理论及其应用、拍卖理论和市场交易机制设计等研究；陈晓红(1963−), 女, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法、中小企业融资、信息决策与信息系统等研究.

策过程就是“用尺子测量某对象长度”的过程, 就像尺子测量值是随机波动的一样, 各专家的决策结果具有随机性. 尽管当前理论界已有学者注意到群决策过程中某些随机因素的影响, 但并没有给出一个概率偏好集结规则[1-2]. 目前, 已有的概率偏好集结规则有群体概率的Bayes集结法[3-6]、加权集结法[7]、概率乘积法[8]、利用极大熵原理建立起来的概率集结模型[9]和最大似然估计法[10]等. 概率集结规则是人为的选择, 常常具有主观性[11]. 本文的研究思路与以往学者具有明显不同, 在吸纳、认可每个专家决策结果的前提下, 给出“某个备选对象最好”发生的主观概率, 然后将它用于贝叶斯公式对备选对象的Pareto有效率进行修正, 进而得出“备选对象最好”概率的排序. 本文方法还有一个优点是专家人数越多, 理论上决策结果越精确.

1 备选对象的优势集

考察对应于LVP线性加权意义下的如下单目标问题:

$$\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}\ \max_{x\in S} Z_{\bar\lambda}=\bar\lambda^{\mathrm T}x. \tag{1}$$

其中: $\bar\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm T}\in E_n^{++}=\{\bar\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_P)|诸\lambda_j>0\}$.

关于LVP和$\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}$, 有如下两个引理[12].

引理 1 对于任一$\bar\lambda\in E_n^{++}$, $\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}$存在最优解$\bar x$, 且$\bar x$是LVP的Pareto有效解.

引理 2 对于线性多目标规划LVP, $\bar x$是其任一有效解, 都必存在$\bar\lambda\in E_n^{++}$, 使$\bar x$是$\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}$的最优解.

由引理1和引理2可知: “$\bar x$是LVP的Pareto有效解”的等价表述是, 存在$\bar\lambda\in E_n^{++}$, 使$\bar x$是$\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}$的最优解. 令$\bar E=\{\bar\lambda|\bar\lambda\in E_n^{++}$, $\bar x$是$\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}$最优解$\}$, 则权重集合$\bar E$体现了$\bar x$的作为LVP的有效解的属性特征.

定义 1 若$\bar x$是LVP的有效解, 则称$\bar E=\{\bar\lambda|\bar\lambda\in E_n^{++}, \bar x$是$\mathrm{LSP}_{\bar\lambda}$的最优解$\}$是$\bar x$的优势集.

定理 1 $\bar x$是LVP的有效解的充分必要条件是$\bar x$的优势集$\bar E$非空.

为讨论方便, 当$\bar x$不是LVP的Pareto有效解时, 定义其优势集$\bar E$为空集, 即$\bar E=\varnothing$.

推论 1 (必要条件) 任何集结规则H下的大型群组决策最优选择的对象$\bar x$必是LVP的Pareto有效解.

2 备选对象的Pareto有效率

设x_0是备选对象B_{j_0}的属性向量, 考察如下线性规划问题:

$$\mathrm{LP}\begin{cases}\max\ \theta=\lambda^{\mathrm T}x_0;\\ \text{s.t. } \lambda^{\mathrm T}x_j\leqslant 1,\ j=\overline{1,m},\ j\neq j_0;\\ \qquad \lambda\geqslant 0.\end{cases} \tag{2}$$

定理 2 x_0是LVP的Pareto有效解的充分必要条件是存在$\bar\lambda>0$(即$\bar\lambda\in E_n^{++}$), 使LP的最优值$\theta=\bar\lambda^{\mathrm T}Cx_0=1$.

证明 1) 充分性. 由存在$\bar\lambda>0$使LP的最优值$\theta=\bar\lambda^{\mathrm T}Cx_0=1$可知, 对于$\bar\lambda>0, \bar\lambda^{\mathrm T}Cx_0\geqslant\bar\lambda^{\mathrm T}Cx_j$, 即$x_0$的优势集非空, 所以充分性成立.

2) 必要性. 由x_0是LVP的有效解可知其优势集非空, 即存在$\lambda'>0$, 使$\lambda'^{\mathrm T}Cx_0\geqslant\lambda'^{\mathrm T}Cx_j, j=\overline{1,m}, j\neq j_0$. 令$\mu=\lambda'^{\mathrm T}Cx_0>0$, 取$\lambda'=\dfrac{1}{\mu}\bar\lambda$, 即知存在$\lambda'>0$, 使LP的最优值$\theta=\lambda^{\mathrm T}Cx_0=1$. □

令$\bar S=\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}\}$是由LVP的所有$k$个Pareto有效解构成的集合, 其中$0<k\leqslant m$.

定理 3 已知$\bar x$是LVP的有效解, 则其优势集

$$\bar E=\bigcap_i\{\bar\lambda|\bar\lambda\in E_n^{++},\bar\lambda^{\mathrm T}\bar x\geqslant\bar\lambda^{\mathrm T}x^{(i)}\}, \tag{3}$$

其中$x^{(i)}\in\bar S(1\leqslant i\leqslant k)$且$x^{(i)}\neq\bar x$.

由定理1易证定理3成立.

设$x^{(i)}\in\bar S, i=\overline{1,k}$, 则其优势集$E_i$分别具有如下性质.

性质 1 (凸性) 对于任意$\lambda_1,\lambda_2\in E_i,\mu_1+\mu_2=1, 0\leqslant\mu_1,\mu_2\leqslant 1$, 有$\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2\in E_i$;

性质 2 (锥性) 对于任意$\lambda\in E_i, k>0$, 有$k\lambda\in E_i$;

性质 3 (可测性) $E_i(i=\overline{1,r})$勒贝格可测;

性质 4 (可分离性) E_i与E_j彼此是可分离的, $i\neq j, i=\overline{1,k}, j=\overline{1,k}$, 且$m(E_i\bigcap E_j)=0$, 其中$m(*)$表示集合“$*$”的勒贝格测度;

性质 5 (覆盖性) 所有E_i的并集恰好等于E^p_{++}, 即$\bigcup\limits_{i=1}^k E_i=E^p_{++}$.

证明 注意到引理1、引理3、定义1以及定理2, 易证性质1∼性质3和性质5成立. 下面证明性质4成立.

注意到定理3, 有

$$E_i=\bigcap_l\{\lambda|\lambda\in E_n^{++},\lambda^{\mathrm T}x^{(i)}\geqslant\lambda^{\mathrm T}x^{(l)}\}.$$

其中: $x^{(l)}\in\bar S, l=\overline{1,k}, l\neq i$.

$$E_j=\bigcap_l\{\lambda|\lambda\in E_n^{++},\lambda^{\mathrm T}x^{(j)}\geqslant\lambda^{\mathrm T}x^{(l)}\}.$$

其中: $x^{(l)}\in\bar S, l=\overline{1,k}, l\neq j$. 故

$$E_i\bigcap E_j\subseteq\{\lambda|\lambda\in E_n^{++},\lambda^{\mathrm T}x^{(i)}=\lambda^{\mathrm T}x^{(j)}\}.$$

注意到$\lambda^{\mathrm T}x^{(i)}-\lambda^{\mathrm T}x^{(j)}=0$是超平面, 所以$m(E_i\bigcap E_j)=0$. 又任意$\lambda\in E_i, \lambda^{\mathrm T}x^{(i)}-\lambda^{\mathrm T}x^{(j)}\geqslant 0$, 而任意$\lambda\in E_j$, $\lambda^{\mathrm T}x^{(i)}-\lambda^{\mathrm T}x^{(j)}\leqslant 0$, 所以$E_i$与$E_j$彼此是可分离的. □

定义 2 若 $\bar{x}$ 是 LVP 的可行解, $\bar{E}$ 是其优势集, 则称 $\eta = m(\bar{E})/m(E_n^{++})$ 为 $\bar{x}$ 的 Pareto 有效率.

由定理 1 及优势集的性质 4 和性质 5 可知: 当 $\bar{x}$ 不是 LVP 的有效解时, 其 Pareto 有效率 $\eta = 0$; 当 $\bar{x}$ 是 LVP 的 Pareto 有效解时, 其 Pareto 有效率 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

由优势集的性质 4 和性质 5 易证如下定理成立.

定理 4 设 $x^{(i)} \in \bar{S}, i = \overline{1,k}, x^{(i)}$ 的 Pareto 有效率为 η_i, 则

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i = 1.$$

由上述讨论可知, 非劣极点 $x^{(i)}$ 的 Pareto 有效率 η_i 表示在决策者对 LVP 目标间的重要性完全“无知”的状态下 (或者说权重为均匀分布), 考虑目标权重时 $x^{(i)}$ 成为最优解的可能性的大小, 它可看成“$x^{(i)}$ 是最优选择”事件的先验概率, 这个先验概率可由 Bayes 公式利用群体专家们的个体决策得到修正.

3 大型群组多属性决策 Bayes 概率修正法

定义 3 当群体决策系统 G 由不低于 50 个专家构成时, 称 G 为大型群组决策系统.

假定本文的多属性决策问题客观上存在最优决策 (选择), 只是事前不知道是 S 中的哪一个备选对象, 因而由大型群组先对各指标间的权重作出判断, 最终在某一理想集结规则下给出“最优决策”. 实践中, 由于群决策过程中某些随机因素的影响, 这个“最优决策”只是以一定概率为客观上确实最优的决策, 并且这个“最优决策”需要一个有效的集结规则才能得到. 以事件 B 表示“大型群组专家作出的群组决策客观上确实为最优决策”, 则 $0 < P(B) \leqslant 1$. 事实上不必知道大型群组的“理想集结规则”及其规则下的结果, 便可利用 Bayes 公式修正 S 中 Pareto 有效解为“客观上是最优决策”的概率.

对于由 $t(t \geqslant 50)$ 个专家组成的大型群组, 运用定理 2 可以轻易求得 m 个选择对象 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 的 Pareto 有效解 $x^{(i)} \in \bar{S},\ i = \overline{1,k}, x^{(i)}$ 的优势集和 Pareto 有效率分别为 E_i 和 η_i. 不妨设有 s_1 个专家的决策向量 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{s_1}$ 落在 E_1 中; 有 s_2 个专家的决策向量 $\lambda_{s_1+1}, \lambda_{s_1+2}, \cdots, \lambda_{s_1+s_2}$ 落在 E_2 中; $\cdots$; 有 s_k 个专家的决策向量 $\lambda_{s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+1}, \lambda_{s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+2}, \cdots, \lambda_{s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+s_k}$ 落在 E_k 中, $s_1 + s_2 + \cdots + s_{k-1} + s_k = t$. 令事件 A_i 表示“$x^{(i)}$ 是最优决策”, 则 A_i 发生的初始概率即为备选对象的 Pareto 有效率, 则对于 $i = \overline{1,k}$, 有

$$p(A_i) = \eta_i,\ p\left(\frac{B}{A_i}\right) = \frac{s_i}{t}. \tag{4}$$

由 Bayes 公式, 事后 (群体中的专家分别给出个人决策后) 的后验概率为

$$p\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{p\left(\dfrac{B}{A_i}\right) \cdot p(A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p\left(\dfrac{B}{A_i}\right) \cdot p(A_i)} = \frac{\eta_i s_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \eta_i s_i}. \tag{5}$$

4 应用算例

现有 7 个城市, 欲评价这些城市的经济运行状况, 择其最优者作为重点扶持对象, 建设新型工业发展特区. 分别考察表征该城市经济运行状况的两项重要的效益型 (即越大越好) 指标 (见表 1), 两项指标的相对重要程度未知, 但已知由大型群组决策专家系统 $G(t = 50)$ 给出的个体决策向量 (两项指标在 0-1 之间打分) 如表 2 所示.

表 1 城市的属性指标值

指标	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市 5	城市 6	城市 7
1	9	3	8	3.5	4	6	4
2	4	5	3	4	4.5	3.5	5

表 2 专家决策数据表

专家序号	决策向量	所属优势集	专家序号	决策向量	所属优势集
1	$(0.2, 0.96)$	E_1	26	$(0.29, 0.98)$	E_1
2	$(0.13, 0.99)$	E_2	27	$(0.20, 0.98)$	E_1
3	$(0.27, 1)$	E_1	28	$(0.11, 0.99)$	E_2
4	$(0.11, 0.99)$	E_2	29	$(0.25, 1)$	E_1
5	$(0.37, 0.99)$	E_1	30	$(0.29, 1)$	E_1
6	$(0.320.99)$	E_1	31	$(0.21, 0.98)$	E_1
7	$(0.22, 0.99)$	E_1	32	$(0.22, 0.99)$	E_1
8	$(0.24, 0.99)$	E_1	33	$(0.28, 0.98)$	E_1
9	$(0.09, 1)$	E_2	34	$(0.28, 0.98)$	E_1
10	$(0.28, 0.99)$	E_1	35	$(0.09, 1)$	E_2
11	$(0.31, 0.99)$	E_1	36	$(0.25, 1)$	E_1
12	$(0.24, 0.99)$	E_1	37	$(0.29, 0.98)$	E_1
13	$(0.20, 0.98)$	E_1	38	$(0.20, 0.98)$	E_1
14	$(0.15, 0.99)$	E_2	39	$(0.26, 0.99)$	E_1
15	$(0.26, 1)$	E_1	40	$(0.25, 0.99)$	E_1
16	$(0.29, 0.98)$	E_1	41	$(0.26, 0.99)$	E_1
17	$(0.24, 0.99)$	E_1	42	$(0.29, 0.98)$	E_1
18	$(0.26, 0.99)$	E_1	43	$(0.22, 0.99)$	E_1
19	$(0.24, 0.97)$	E_1	44	$(0.16, 0.99)$	E_2
20	$(0.11, 0.99)$	E_2	45	$(0.27, 0.99)$	E_1
21	$(0.27, 0.99)$	E_1	46	$(0.26, 0.99)$	E_1
22	$(0.20, 0.98)$	E_1	47	$(0.17, 0.99)$	E_2
23	$(0.21, 0.99)$	E_1	48	$(0.26, 0.97)$	E_1
24	$(0.24, 1)$	E_1	49	$(0.27, 1)$	E_1
25	$(0.34, 0.99)$	E_1	50	$(0.24, 0.99)$	E_1

首先运用模型 $\mathrm{LSP}_{\bar{\lambda}}$ 求得 Pareto 解如下: 城市 1 为 $(9,4)^{\mathrm{T}}$; 城市 2 为 $(4,5)^{\mathrm{T}}$. 对于城市 1, 可得其优势集为 $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \in E_2^{++} | 5\lambda_1 - \lambda_2 \geqslant 0 \right\}$, 见图 1. 可求得该点的 Pareto 有效率等于图 1 中阴影扇形区域部分的测度与作为第一象限的扇形区域的测度之比. 即

$$\eta_1 = \frac{m(E_1)}{m(E_2^{++})} = \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{\mathrm{arctg}5} \int_0^{\rho} r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\rho} r\mathrm{d}r} = \frac{2\mathrm{arctg}5}{\pi} \approx 0.875.$$

城市 2 的优势集为 $E_2=\left\{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}\in E_2^{++}|5\lambda_1-\lambda_2\leqslant 0\right\}$, 其 Pareto 有效率为 $\eta_2=1-0.875=0.125$.

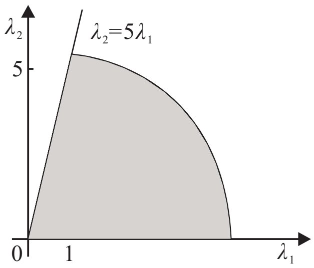

图 1 城市 1 的优势集

令事件 A_1表示"城市 1 是最优决策", 事件 A_2表示"城市 2 是最优决策", B 表示"大型群组专家作出的群组决策客观上确实为最优决策", 则有 $p(A_1)=0.875, p(A_2)=0.125$. 利用表 2 可求得

$$p\left(\frac{B}{A_1}\right)=\frac{42}{50}=0.84,\ p\left(\frac{B}{A_2}\right)=0.16.$$

于是

$$p\left(\frac{A_1}{B}\right)=\frac{p(A_1)\cdot P\left(\dfrac{B}{A_1}\right)}{p(A_1)\cdot P\left(\dfrac{B}{A_1}\right)+p(A_2)\cdot P\left(\dfrac{B}{A_2}\right)}=0.974,$$

$$p\left(\frac{A_2}{B}\right)=0.026.$$

所以最优选择是城市 1.

5 结 论

由于大型群组多属性决策受诸多随机因素的影响, 专家组在某一理想集结规则下给出的"最优决策"只是以一定概率为"客观上确实是最优的决策". 注意到这一点, 本文在发现多属性备选对象优势集的基础上, 给出了其 Pareto 有效率, 并证明只有作为 Pareto 解的备选对象的 Pareto 有效率才可能不为零. 将这些 Pareto 有效率作为相应备选对象为"最优决策"的先验概率分布, 利用贝叶斯公式和专家组决策结果对其进行修正, 从而获得"最优决策"概率最大的备选对象. 由算例可以看出, 本文方法在充分利用专家组决策信息前提下避免了寻找一个主观集结规则的决策问题, 不需集结出一个权重结果, 从而减少了决策过程中主观因素影响, 并且当将每位专家的决策看成一个独立的随机实验时, 理论上专家人数越多决策结果越精确.

参考文献(References)

[1] French S. Group consensus probability distributions: A critical survey[C]. Bayesian Statistics. Leiden: Elsevier, 1985: 183-201.

[2] Genest C, Zidek J V. Combining probability distributions: A critique and an annotated bibiography[J]. Statistical Science, 1986, 1(1):114-148.

[3] Nitzan S, Paroush J. Optimal decision rules in uncertain dichotomous choice situations[J]. Int Economic Review, 1982, 23(2): 289-297.

[4] Nitzan S, Paroush J. Collective decision making: An economic outlook[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 85-92.

[5] Morris P A. Combining expert opinion: A Bayesian approach[J]. Management Science, 1977, 23(7): 679-693.

[6] Morris P A. An axiomatic approach to expert resolution[J]. Management Science, 1983, 29(1): 24-32.

[7] Madansky A. Externally Bayesian groups[M]. Chicago: University of Chicano, 1978: 32-56.

[8] Bordley R F. A multiplicative formula for aggregating probability estimates[J]. Management Science, 1982, 28(10): 1137-1148.

[9] Levy W B, Delic H. Maximum entropy aggregation of individual opinions[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1994, 24(4): 606-613.

[10] Young H P. An axiomatization of the Borda rule[J]. J of Economic Theory, 1974, 9(1): 43-52.

[11] 杨雷, 席酉民. 理性群体决策的概率集结研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(4): 90-120.
(Yang L, Xi Y M. Probability aggregation in rational group decision making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1998, 18(4): 90-120.)

[12] 运筹学教材编写组. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 449-452.
(Team to Compile Teaching Material for Operational Research. Operational research[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 449-452.)

(上接第1040页)

[20] Wei G W. Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and their application to group decision making[J]. Applied Soft Computing, 2010, 10(2): 423-431.

[21] Su Z X, Xia G P, Chen M Y, et al. Induced generalized intuitionistic fuzzy OWA operator for multi-attribute group decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(2): 1902-1910.