

# 外伸梁离散系统模态的若干定性性质<sup>1)</sup>

王其申<sup>\*,2)</sup> 章礼华<sup>\*</sup> 王大钧<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(安庆师范学院物理与电气工程学院, 安庆 246011)

<sup>†</sup>(北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室, 力学与空天技术系, 北京 100871)

**摘要** 在已证明外伸梁的差分离散模型频率和位移振型基本振荡性质的基础上, 首先揭示了两跨外伸梁的共轭系统是一端铰支一端固定并有一个中间铰的两跨连续梁, 证明了两跨外伸梁的共轭梁的刚度矩阵是符号振荡矩阵, 进而确定了外伸梁的弯矩振型的符号改变数; 由此进一步讨论了它的转角振型和剪力振型的符号改变数规律以及位移振型的其他一些定性性质.

**关键词** 外伸梁, 共轭系统, 弯矩、转角和剪力振型, 定性性质

中图分类号: O327, O241.3, O151.21 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)06-1071-04

## 引言

工程实际中常见有 3 种静定梁: 悬臂梁、简支梁和外伸梁. 前两种梁都是单跨梁, 它们横振动的频谱和模态的定性性质, 在文献 [1-4] 中已进行了充分的研究. 因外伸梁属于多跨结构, 直到最近才对其定性性质进行了讨论 [5-7]. 文献 [5] 证明了属于正系统的多跨梁柔度矩阵的振荡性, 获得了属于正系统的多跨梁差分离散模型频率和位移振型的基本振荡性质. 不过该文的结论对于外伸梁这类结构不适用. 文献 [6] 讨论了任意支承多跨梁差分离散模型刚度矩阵的符号振荡性, 扩展了文献 [5] 所得结论的适用范围. 文献 [6] 的结果显然适用于外伸梁. 因此, 文献 [7] 证明了两跨外伸梁的差分离散模型频率和位移振型具有如下基本振荡性质:

**性质 1** 两跨外伸梁的频率全是正的和单的, 即

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1}$$

**性质 2** 两跨外伸梁的第一振型恰有 1 个节点. 如果约定称节点与支座之间没有系统的质点的情况为节点与支座重合, 则此节点与支座重合.

**性质 3** 两跨外伸梁的第  $i$  振型  $u^{(i)}$  恰有  $i-2t$  个节点 ( $i \geq 2$ ). 其中  $t$  为  $\tilde{u}^{(i)}$  线的节点与支座重合的次数,  $0 \leq t \leq 1$ .  $\tilde{u}^{(i)}$  与  $u^{(i)}$  的分量之间的关系为  $\tilde{u}_j = \varepsilon_j u_j$ . 式中  $\varepsilon_j = (-1)^{\alpha-1}$ ,  $\alpha$  为外伸梁的差分点  $x_j$  所在的段数,  $\alpha = 1, 2$ .

**性质 4** 当  $\tilde{u}^{(i)}$  线与  $\tilde{u}^{(i+1)}$  线的节点均不与支座重合时, 外伸梁的  $u^{(i)}$  线与  $u^{(i+1)}$  线 ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ) 除支座外的节点彼此相间; 而当  $\tilde{u}^{(i)}$  线与  $\tilde{u}^{(i+1)}$  线的节点之一与支座重合时, 外伸梁的  $u^{(i)}$  线与  $u^{(i+1)}$  线 ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ) 的节点不一定彼此相间.

基于外伸梁在工程中的广泛使用 [8], 有必要进一步讨论它的转角、弯矩和剪力振型的定性性质. 为此, 首先导出了两跨外伸梁的共轭梁是左端铰支右端固定并有一个中间铰的两跨连续梁; 接着证明了相应共轭梁的离散模型刚度矩阵属于符号振荡矩阵, 由此获得了共轭系统的“位移”振型, 亦即外伸梁的弯矩振型的符号改变数. 在此基础上进一步阐明了外伸梁的位移、转角、弯矩和剪力振型的一系列定性性质.

## 1 外伸梁的差分离散模型及其振动方程

考虑长为  $l$  的两跨外伸 Euler 梁. 梁材料的线密度为  $\rho(x)$ , 截面抗弯刚度为  $S(x) = E(x)J(x)$ , 梁的横向固有振动的模态方程是

$$(S(x)u''(x))'' = \omega^2 \rho u(x), \quad 0 < x < l \quad (1)$$

其中,  $u(x)$  为梁的位移振型,  $\omega$  为固有圆频率. 两跨外伸梁的支承条件包括

$$\left. \begin{aligned} u(0) = 0, \quad u''(0) = 0 \\ S(l)u''(l) = 0, \quad (S(x)u''(x))'|_{x=l} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2012-01-17 收到第 1 稿, 2012-05-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10772001).

2) E-mail: wangqsh523@126.com

$$u(c) = 0, \quad u'(c) \text{ 和 } u''(c) \text{ 连续} \quad (3)$$

文献 [6-7] 证明了, 若取  $c$  点为差分点:  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_r (= c) < x_{r+1} < \dots < x_n = l$ , 记  $s_i = S(x_i)$ ,  $\rho_i = \rho(x_i)$ , 采用二阶中心差分公式并引入参数变换

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{\rho_0 l_1}{2}, \quad m_n = \frac{\rho_n l_n}{2} \\ m_r &= \rho_r \frac{l_r + l_{r+1}}{2}, \quad k_r = \frac{2s_r}{l_r + l_{r+1}} \\ r &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

即得图 1 所示的两跨外伸梁的差分离散模型. 图中,  $l_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_0 = 0, x_n = l$ ) 是差分步长,  $m_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 是结点质量,  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 则是连接  $m_i$  两侧刚杆的转动弹簧刚度. 以下称图 1 所示模型为系统  $S_1$ .

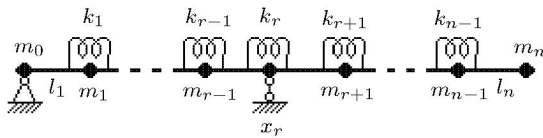


图 1 两跨外伸梁的弹簧-质点-刚杆模型

Fig.1 Spring-mass point-rigid rod model for a two-span beam with an overhang

若记  $\lambda = \omega^2$ ,  $u_i = u(x_i)$ , 文献 [6-7] 已经证明, 可将系统  $S_1$  的模态方程组写成以下向量形式

$$\lambda \mathbf{M}_1 \mathbf{u} = \mathbf{A}_1 \mathbf{u} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_{r+1}, \dots, u_n)^T$  是系统  $S_1$  的位移振型,  $\mathbf{M}_1 = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_{r-1}, m_{r+1}, \dots, m_n)$  是系统  $S_1$  的质量矩阵,  $\mathbf{A}_1$  是系统  $S_1$  的刚度矩阵, 它的表达式参见文献 [7] 中的式 (12).

### 2 外伸梁的共轭结构

为了进一步阐明外伸梁的其他几种振型的定性性质, 需要引入外伸梁的共轭结构. 记

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_r, \dots, m_n)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_r, \dots, k_{n-1})$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times n}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (u_1, \dots, u_{r-1}, 0, u_{r+1}, \dots, u_n)^T$$

$$\mathbf{L} = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

以及两跨外伸梁的弯矩振型为

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})^T = \mathbf{K} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \bar{\mathbf{u}} \quad (6)$$

则方程 (5) 可以被改写为

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \bar{\mathbf{u}} + R_r \mathbf{e}^{(r)} = \\ & \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{E}}^T \boldsymbol{\tau} + R_r \mathbf{e}^{(r)} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{e}^{(r)}$  为第  $r$  个分量为 1 其余分量为 0 的  $n$  维单位列矢量. 式 (7) 中包含了第  $r$  个质点即中间支座处的平衡方程

$$0 = \frac{1}{m_r} \left( \frac{\tau_r - \tau_{r-1}}{l_r} - \frac{\tau_{r+1} - \tau_r}{l_{r+1}} \right) + \frac{R_r}{m_r} \quad (8)$$

其中,  $R_r$  为中间支座处的约束反力. 当视  $m_r$  为无穷大时,  $R_r/m_r \rightarrow 0$ . 进一步可以把式 (7) 改写为

$$\lambda \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{E}}^T \boldsymbol{\tau}$$

或

$$\lambda \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{E}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

此式显然可以看作某个具有  $n-1$  个自由度的“梁”的模态方程, 把此式所代表的振动系统称为两跨外伸梁的共轭系统. 由平衡方程 (8) 和两跨外伸梁的边界条件推知

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_0'' = 0, \quad \tau_n = 0, \quad \tau_n' = 0, \quad \tau_r''/m_r = 0$$

由此得到两跨外伸梁的共轭系统是如图 2 所表示的左端铰支, 右端固定, 而在  $x_r = c$  处存在一个中间铰链连接的两跨连续梁的离散系统. 这个系统具有参数  $\{\bar{m}_i\}_1^{n-1} = \{k_i^{-1}\}_1^{n-1}$ ,  $\bar{k}_i = m_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $i \neq r$ ) 和  $\{l_i\}_1^n$  并视  $\bar{k}_r = m_r^{-1} = 0$ , 并以  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})^T$  为自己的“位移”振型.

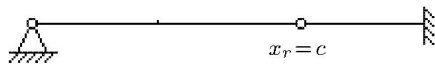


图 2 两跨外伸梁的共轭系统

Fig.2 The conjugated systems of two-span overhang beams

上面的推导过程直接表明，外伸梁的共轭系统与外伸梁本身有完全相同的频谱。

### 3 外伸梁共轭系统的基本定性性质

#### 3.1 两跨外伸梁共轭系统的刚度矩阵的符号振荡性

由式 (9)，上节导出的两跨外伸梁的共轭模型离散系统的刚度矩阵是

$$A_{1\tau} = \bar{E}L^{-1}E^T M^{-1}EL^{-1}\bar{E}^T$$

注意到刚度矩阵  $A_{1\tau}$  的符号倒换矩阵

$$A_{1\tau}^* = (\bar{E}L^{-1}E^T M^{-1}EL^{-1}\bar{E}^T)^*$$

是一系列完全非负矩阵的乘积，因而  $A_{1\tau}^*$  必为完全非负矩阵；不难检验， $A_{1\tau}^*$  有正的次主对角元，还可以证明，它的行列式  $|A_{1\tau}^*|$  必定大于 0。这样，根据振荡矩阵的判定准则 [1]，两跨外伸梁的共轭系统的刚度矩阵是符号振荡矩阵。

#### 3.2 外伸梁的弯矩振型的定性性质

既然两跨外伸梁的共轭系统的刚度矩阵  $A_{1\tau}$  是符号振荡矩阵，它的质量矩阵  $M_{1\tau} = \text{diag}\{\bar{m}_i\}_1^{n-1}$  是具有正元素的对角矩阵，则乘积  $M_{1\tau}^{-1}A_{1\tau}$  仍为符号振荡矩阵。那么根据振荡矩阵的理论 [1]，若记与  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 相应的外伸梁的弯矩振型为  $\tau^{(i)}$ ，则两跨外伸梁的弯矩振型具有以下定性性质：

**性质 5**  $\tau^{(i)}$  有且仅有  $i-1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 个节点。

**性质 6**  $\tau^{(i)}$  线与  $\tau^{(i+1)}$  线 ( $i = 2, \dots, n-2$ ) 的节点彼此相间。

### 4 外伸梁的其他定性性质

(1) 考察两跨外伸梁的  $\tilde{u}^{(i)}$  线的某一节点与支座重合的情况。根据“位移振型遇支座变号”的规则，中间支座两侧紧邻的质点必在梁的平衡位置的同一侧，如图 3 所示。这表明，当两跨外伸梁的  $\tilde{u}^{(i)}$  线的某一节点与支座重合时，中间支座必是包含中间支承点在内的位移振型  $\bar{u}^{(i)}$  的一个零腹点。于是，

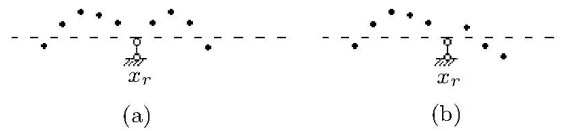


图 3  $\tilde{u}^{(i)}$  线的某一节点与支座重合的两种可能图案

Fig.3 Two possible patterns of the  $\tilde{u}^{(i)}$ -line when a node of the respective  $\tilde{u}^{(i)}$ -line overlaps with a support

尽管两跨外伸梁的第  $i$  振型  $u^{(i)}$  只有  $i-2t$  个节点，但与振型  $u^{(i)}$  相应的  $\bar{u}^{(i)}$  线则有  $i$  个零点（一个零腹点当作两个单零点计数）。

(2) 设  $u_s$  是  $u^{(i)}$  的一个内部极大值，即  $u_s \geq u_{s-1}, u_s \geq u_{s+1}$ 。由  $\tau$  的定义

$$\tau_s = k_s \left( \frac{u_s - u_{s-1}}{l_s} - \frac{u_{s+1} - u_s}{l_{s+1}} \right)$$

和  $\tau^{(i)}$  有确定的变号数推知，上面两个不等式中等号不能同时成立。这样，当  $u_s$  是一个内部极大值时  $\tau_s > 0$ 。同理当  $u_s$  是一个内部极小值时  $\tau_s < 0$ 。

(3) 如果定义两跨外伸梁的转角振型为  $\theta = L^{-1}\bar{E}_n^T \bar{u}$ ， $\bar{E}_n$  与前文定义过的  $\bar{E}$  有完全相同的结构，只是阶数为  $n \times (n+1)$ 。那么

**性质 7** 外伸梁的第  $i$  个转角振型  $\theta^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的分量序列中恰有  $i$  个变号数。

事实上，根据两跨外伸梁的第  $i$  振型  $u^{(i)}$  有且仅有  $i-2t$  个节点和节点的定义，这些节点把  $u^{(i)}$  的分量序列分成  $i+1-2t$  个同号段。除包含自由端的同号段外，每个同号段中至少存在一个极值位置。这样，在  $u^{(i)}$  的分量序列中至少存在  $i-2t$  个内部极值位置。当外伸梁的  $\tilde{u}^{(i)}$  线的节点均不与支座重合时， $t = 0$ ；当两跨外伸梁的  $\tilde{u}^{(i)}$  线的某一节点与支座重合时，由图 3，中间支座两侧紧邻的  $u^{(i)}$  的两个节点之间存在  $\bar{u}^{(i)}$  线的 3 个极值位置。于是  $\bar{u}^{(i)}$  线的分量序列中至少存在  $i$  个内部极值位置。另一方面，根据外伸梁的弯矩振型  $\tau^{(i)}$  恰有  $i-1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 个节点即  $\tau^{(i)}$  的分量序列中恰有  $i-1$  个变号数和前文内容可知， $\bar{u}^{(i)}$  线的分量序列中至多存在  $i$  个内部极值位置。这就表明  $\bar{u}^{(i)}$  线的分量序列中有且仅有  $i$  个内部极值位置。每个极值位置的两侧  $\theta^{(i)}$  显然改变符号一次，这样， $\theta^{(i)}$  的分量序列中恰有  $i$  个变号数。

**推论** 除支座紧邻两侧外，在  $u^{(i)}$  的正的（负的）同号段中只有一个极大（极小）位置。

(4) 如果定义外伸梁的剪力振型为  $\varphi = L^{-1}\bar{E}^T \tau$ ，则由  $\tau^{(i)}$  的节点数和  $\bar{u}^{(i)}$  的零点数以及

方程 (7), 类似的讨论可以给出:

**性质 8** 第  $i$  个剪力模态  $\varphi^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的分量序列中恰有  $i$  个变号数.

## 5 结束语

本文成功地导出了两跨外伸梁的差分离散系统的共轭系统, 证明了相应共轭系统刚度矩阵的符号振荡性, 进而阐明了外伸梁的转角振型、弯矩振型和剪力振型的变号数以及其他一些在工程实际中有用的定性性质. 关于三跨外伸梁可以完全相似的讨论.

顺便指出, 文中关于共轭系统振荡性的讨论实际上也就证明了左右两端为静定或超静定支承并有中间铰连接的两跨和三跨连续梁的基本振荡特性.

## 参 考 文 献

- 1 Гантмахер ФР, Крейн МГ. Осцилляционные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем. Москва: Государственное Издательство Техничко Теоретической Литературы, 1950. 82-208 (in Russian)
- 2 Gladwell GML. Inverse Problems in Vibration. Boston: Martinus Nijhoff Publishers, 1986
- 3 王其中, 何北昌, 王大钧. Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质. 振动工程学报, 1990, 3(4): 58-66 (Wang Qishen, He

- Beichang, Wang Dajun. Some qualitative properties of frequencies and modes of Euler beams. *J Vibration Engineering*, 1990, 3(4): 58-66 (in Chinese))
- 4 王其中, 王大钧. 任意支承梁的固有振动频谱和模态的定性性质. 力学学报, 1997, 29(5): 540-547 (Wang Qishen, Wang Dajun. Qualitative properties of frequency spectrum and modes of arbitrary supported beams in vibration. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(5): 540-547 (in Chinese))
- 5 王其中, 吴磊, 王大钧. 多跨梁横振动的频率和模态的定性性质. 力学学报, 2009, 41 (6): 947-952 (Wang Qishen, Wu Lei, Wang Dajun. Qualitative properties of frequencies and modes of multi-span beam. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, 41(6): 947-952 (in Chinese))
- 6 Wang QS, Wang DJ, Wu L, et al. Qualitative properties of frequencies and modes of vibrating multi-span beam. *QJ-MAM*, 2011, 64(1): 75-86
- 7 王其中, 王大钧, 吴磊等. 外伸梁差分离散系统刚度矩阵的符号振荡性及其定性性质. 振动与冲击, 2009, 28(6): 113-117 (Wang Qishen, Wang Dajun, Wu Lei, et al. Sign-oscillating property of stiffness matrix of difference discrete system and qualitative properties of beam with overhang. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(6): 113-117 (in Chinese))
- 8 盛光复, 任迎春. CFRP 加固钢筋混凝土外伸梁斜截面试验研究. 四川建筑科学研究, 2005, 31(4): 51-54 (Sheng Guangfu, Ren Yingchun. Experimental study on shear strengthening with CFRP in negative area of cantilever beams. *Sichuan Building Science*, 2005, 31(4): 51-54 (in Chinese))

DOI: 10.6052/0459-1879-12-023

(责任编辑: 周冬冬)

# SOME QUALITATIVE PROPERTIES OF MODES OF DISCRETE SYSTEM OF BEAM WITH OVERHANG<sup>1)</sup>

Wang Qishen<sup>\*,2)</sup> Zhang Lihua<sup>\*</sup> Wang Dajun<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(Department of Physics, Anqing Teachers College, Anqing 246011, China)

<sup>†</sup>(State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems and Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract** Base on the basic oscillating properties of the frequencies and the displacement modes in the discrete system of the beam with overhang, it is proved that the stiffness matrices of conjugated system of a two-span beam with one cantilever is to be sign-oscillated. Then, the sign interchanges number of the flexural moment modes of a beam with one cantilever are determined. Furthermore, some qualitative properties of its displacement modes, rotation modes, moment modes and shearing force mode are given. The basic oscillating properties about two-span and three-span continuous beams having middle pinned are obtained practically in this paper as well.

**Key words** beam with overhang, conjugated system, flexural moment modes, rotation modes and shearing force modes, qualitative properties

Received 17 January 2012, revised 3 May 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10772001).

2) E-mail: wangqsh523@126.com