

## Golomb Costas 序列的结构及其在 OFDM 系统中的应用

姚建国<sup>1</sup>, 王玉峰<sup>1</sup>, 衡伟<sup>2</sup>

(1. 南京邮电大学 江苏省无线通信重点实验室, 江苏 南京 210003; 2. 东南大学 移动通信国家重点实验室, 江苏 南京 210096)

**摘 要:**研究了用循环移位法获得的 Golomb Costas 序列族的特性,建立了含有一个间隙行和一个间隙列的 Golomb Costas 序列的结构理论,深入研究了含有一个间隙行和一个间隙列的 Golomb Costas 序列的代数结构、构造方法和自(互)相关特性,并证明了相关的定理。探索了用含有一个间隙行和一个间隙列的 Golomb Costas 序列设计 OFDM 系统中跳频图样的方法,举例说明了如何设计跳频码和怎样将跳频码分配给 OFDM 系统中的用户。用含有一个间隙行和一个间隙列的 Golomb Costas 序列设计跳频码能获得理想的自相关特性,并且当无线通信系统中多普勒频移受限时能获得极佳的互相关性能。

**关键词:** Golomb Costas 序列; 互相关函数; 循环移位; 正交频分复用; 跳频图样

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)07-0001-13

## Constructions of Golomb Costas arrays and their applications in OFDM systems

YAO Jian-guo<sup>1</sup>, WANG Yu-feng<sup>1</sup>, HENG Wei<sup>2</sup>

(1. Jiangsu Key Laboratory of Wireless Communications, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China;

2. National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** Theory of structures of Golomb Costas arrays with 1-gap row and 1-gap column was established with the study of the properties and mathematical models of Golomb Costas arrays and their families which are obtained by the cyclic shift method. By conducting a number of researches on the algebraic constructions and the auto- and cross-correlation properties of Golomb Costas arrays with 1-gap row and 1-gap column, certain theorems were confirmed. The design of frequency hopping codes and the distribution of them to the users were illustrated while the design of frequency hopping patterns was explored in OFDM system with Golomb Costas arrays with 1-gap row and 1-gap column. By designing frequency hopping codes with Golomb Costas arrays with 1-gap row and 1-gap column, an algebraically constructed frequency hop code family can achieve ideal auto-correlation properties. And excellent cross-correlation performance can be obtained when the Doppler shifts are restricted in a wireless communication system.

**Key words:** Golomb Costas arrays; cross-correlation function; cyclic shift; orthogonal frequency division multiplexing; frequency hopping patterns

### 1 引言

由于无线传播存在传播时延和多普勒频移(Doppler shift),会破坏 OFDM 系统子载波间的正交性,产生子载波间的严重干扰。在不考虑多普勒频移时,通常采用在 OFDM 符号前加入循环前缀(cyclic prefix)的方法消除因时延产生的子载波间的

干扰<sup>[1,2]</sup>,此时每个用户的频率是固定不变的。当多普勒频移不能忽略时,用户就需要按预定的跳频图样进行跳频躲避干扰<sup>[3-5]</sup>,通过合理设计 OFDM 系统的跳频图样,以获取理想的自相关性能(自相关函数副瓣的最大值为 1)和最低的互相关性能(互相关函数的最大值为 1)。

用跳频的方法可以同时减小或消除因时延和

收稿日期: 2012-08-21; 修回日期: 2013-01-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61171092)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China(61171092)

多普勒频移产生的用户间的干扰, 此时每个用户的频率就不再是固定不变的。在以往的小区制蜂窝移动通信中, 每个用户的频率是固定不变的, 同一个小区内各小区用户的频率不同, 采用同频复用的方法提高系统容量和频率资源的利用率, 采用这种方法由于每个用户的频率是固定不变的, 所以用户之间一旦产生干扰将无法躲避。在 OFDM 系统中, 用户采用跳频, 如果产生干扰, 最多只有一个时隙。设计 OFDM 系统各小区内用户的跳频图样是第四代移动通信系统采用 OFDM 技术的关键。

文献[3]介绍了一种基于 Welch Costas 序列的跳频图样的设计方法, 但自相关与互相关都不能达到最佳。本文在研究 Golomb Costas 序列的代数结构与特性的基础上, 介绍了一种基于 Golomb Costas 序列的带有一个间隙行和一个间隙列的序列族的结构, 研究用循环移位(cyclic shift)法获得的 Golomb Costas 序列族的特性和数学模型, 并研究用这种序列族设计同时具有理想的自相关与互相关性能的 OFDM 系统的跳频图样方法。

## 2 Golomb Costas 序列的代数结构与特性

Costas 序列具有理想的自相关特性<sup>[6,7]</sup>, 在时频平面上, Costas 序列具有二维的结构<sup>[8]</sup>, 可以看作特殊的时频码<sup>[9~11]</sup>。1984 年, Solomon W. Golomb 构造出了基于有限域理论(theory of finite field)的 Welch Costas 序列和 Golomb Costas 序列<sup>[12,13]</sup>。

### 2.1 Golomb Costas 序列的结构

设有限域  $GF(q)(q=p^n, p$  为素数,  $n \in \mathbb{Z}^+$ )。  $\alpha, \beta$  为  $GF(q)$  的本原元, 序列  $C$  为  $(q-2)$  阶置换矩阵, 则序列  $C$  为 Golomb Costas 序列的充要条件是序列  $C$  的放置函数为<sup>[13~16]</sup>

$$y(k) = \log_{\beta}(1 - \alpha^k), 1 \leq k \leq q - 2 \quad (1)$$

式(1)表示, 当序列  $C$  的单元格的坐标  $(k, y(k))$

满足式(2)时, 在该单元格放置 “1”。

$$\alpha^k + \beta^{y(k)} = 1, 1 \leq k \leq q - 2 \quad (2)$$

当  $n=1$ , 即  $q=p$  时, 式(1)和式(2)是指模  $p$  同余, 用符号 “ $\equiv \pmod{p}$ ” 表示; 当  $n>1$  时, 式(1)和式(2)是指模  $f(x)$  同余, 用符号 “ $\equiv \pmod{f(x)}$ ” 表示,  $f(x)$  为  $Z_p=GF(p)$  上的任一个  $n$  次不可约多项式。在下面的讨论中, 在不引起混淆时, 为简便起见, 模  $p$  同余 “ $\equiv \pmod{p}$ ” 或模  $f(x)$  同余 “ $\equiv \pmod{f(x)}$ ” 均用等号 “ $=$ ” 表示。

当  $1 \leq k \leq q-2, 1 \leq y(k) \leq q-2$  时, 式(2)一定成立。因为  $\alpha$  为  $GF(q)$  的本原元, 所以对于给定的  $k, 1 \leq k \leq q-2, \alpha^k$  表示  $GF(q)$  内的非零元素, 又  $k \neq q-1$ , 所以  $\alpha^k \neq 0, 1$ 。因此,  $1 - \alpha^k \neq 1, 0$ 。而  $\beta$  为本原元, 所以一定存在唯一  $y(k), 1 \leq y(k) \leq q-2$ , 使  $\beta^{y(k)} = 1 - \alpha^k$ , 即  $\alpha^k + \beta^{y(k)} = 1$ 。

对于有限域  $GF(2^3)=\{b_0+b_1x+b_2x^2|b_i \in Z_2\}=\{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$ ,  $q=8, p=2, n=3$ , 取  $f(x)=x^3+x+1$  为  $Z_2=GF(2)$  上的 3 次不可约多项式,  $\phi(q-1)=\phi(7)=6, \phi(k)$  为欧拉 phi 函数<sup>[15,17,18]</sup>, 表示小于  $k$  并与  $k$  互素的正整数的个数, 所以有限域  $GF(2^3)$  共有 6 个本原元, 分别为:  $x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1$ , 其中,  $x$  和  $x^2+1, x+1$  和  $x^2+x, x^2$  和  $x^2+x+1$  分别是 3 对互逆的本原元。本原元的各次幂和本原元之间的关系如表 1 所示。

图 1(a) $C_1$  为 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_1(k) \equiv \log_{\beta}(1 - \alpha^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 6$ ; 图 1(b) $C_2$  为 Lempel Costas 序列<sup>[13,15,19]</sup>, 其放置函数为  $y_2(k) \equiv \log_{\sigma}(1 - \sigma^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 6$ ; 图 1(c) $C_3$  为 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_3(k) \equiv \log_{\rho_1}(1 - \sigma_1^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 6$ ; 图 1(d) $C_4$  为 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_4(k) \equiv \log_{\rho_2}(1 - \sigma_2^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 6$ 。图 1(e)、图 1(f)、图 1(g)分别为序列  $C_1$  和  $C_2$ 、序列  $C_1$  和  $C_3$ 、序列  $C_1$  和  $C_4$  的互相关函数。

表 1  $GF(2^3)$  上本原元的各次幂和本原元之间的关系

本原元	本原元的各次幂					
$\alpha=x=\sigma^3=\sigma_1^2=\sigma_2^6$	$\alpha^2=x^2$	$\alpha^3=x+1$	$\alpha^4=x^2+x$	$\alpha^5=x^2+x+1$	$\alpha^6=x^2+1$	$\alpha^7=1$
$\beta=x+1=\rho^2=\rho_1^5=\rho_2^6$	$\beta^2=x^2+1$	$\beta^3=x^2$	$\beta^4=x^2+x+1$	$\beta^5=x$	$\beta^6=x^2+x$	$\beta^7=1$
$\sigma=\rho=x^2+x+1$	$\sigma^2=x+1$	$\sigma^3=x$	$\sigma^4=x^2+1$	$\sigma^5=x^2+x$	$\sigma^6=x^2$	$\sigma^7=1$
$\sigma_1=x^2+x$	$\sigma_1^2=x$	$\sigma_1^3=x^2+x+1$	$\sigma_1^4=x^2$	$\sigma_1^5=x^2+1$	$\rho_1^6=x+1$	$\sigma_1^7=1$
$\rho_1=x^2$	$\rho_1^2=x^2+x$	$\rho_1^3=x^2+1$	$\rho_1^4=x$	$\rho_1^5=x+1$	$\rho_1^6=x^2+x+1$	$\rho_1^7=1$
$\sigma_2=x^2+1$	$\sigma_2^2=x^2+x+1$	$\sigma_2^3=x^2+x$	$\sigma_2^4=x+1$	$\sigma_2^5=x^2$	$\sigma_2^6=x$	$\sigma_2^7=1$
$\rho_2=\sigma_1=x^2+x$	$\rho_2^2=x$	$\rho_2^3=x^2+x+1$	$\rho_2^4=x^2$	$\rho_2^5=x^2+1$	$\rho_2^6=x+1$	$\rho_2^7=1$

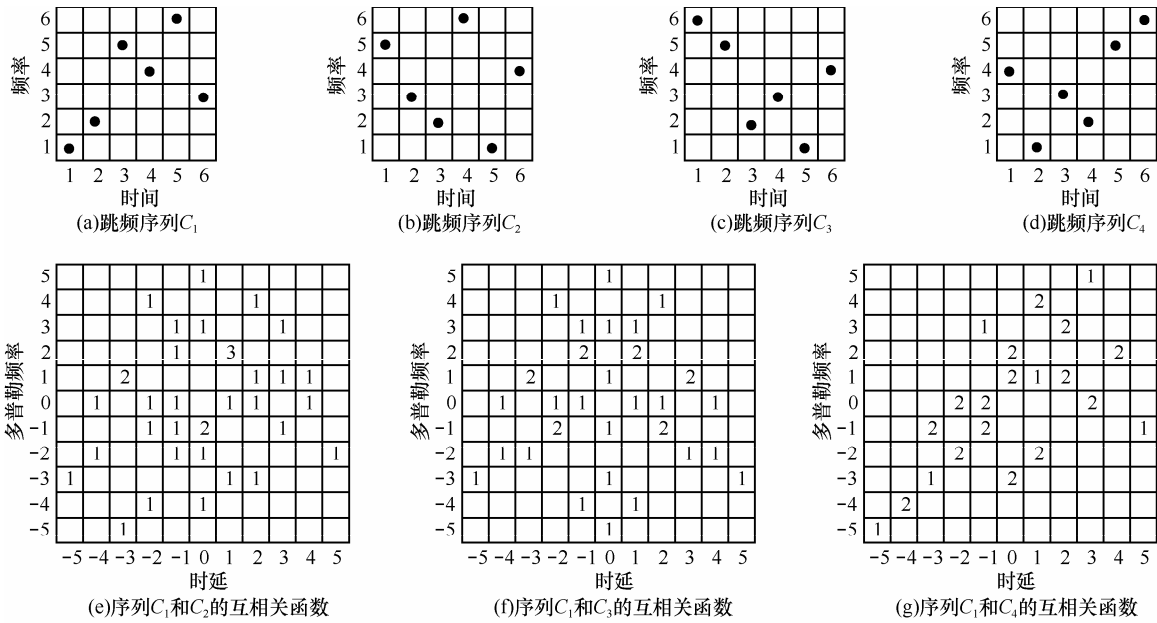


图 1 Golomb Costas 序列的互相关函数

Golomb Costas 序列在水平方向和垂直方向都以  $q-1$  为循环周期<sup>[20]</sup>。

### 2.2 Golomb Costas 序列的循环移位

Golomb Costas 序列是  $(q-2) \times (q-2)$  序列, 因为 Golomb Costas 序列在水平方向和垂直方向都以  $q-1$  为循环周期, 所以 Golomb Costas 序列在水平方向的循环移位含有一个间隙列, 在垂直方向的循环移位含有一个间隙行。

根据 Golomb Costas 序列在水平方向和垂直方向都以  $q-1$  为循环周期的双周期特性, 利用 Golomb Costas 序列在水平方向的循环移位可以构造出带有一个间隙列的  $(q-2) \times (q-1)$  序列; 利用 Golomb Costas 序列在垂直方向的循环移位可以构造出带有一个间隙行的  $(q-1) \times (q-2)$  序列; 利用 Golomb Costas 序列在水平方向和在垂直方向的循环移位可以构造出带有一个间隙列和一个间隙行的  $(q-1) \times (q-1)$  序列。

#### 2.2.1 Golomb Costas 序列在水平方向的循环移位

设  $\alpha, \beta$  为  $GF(q)$  的本原元,  $\eta$  为  $GF(q)$  的非零元,  $C$  是带有一个“空”列的  $(q-2) \times (q-1)$  序列, 序列  $C$  的放置函数为

$$y(k) = \log_{\beta}(1 - \eta\alpha^k), 1 \leq k \leq q-1 \quad (3)$$

若设序列  $C$  的单元格的坐标为  $(i, j)$ , 则当  $\eta\alpha^i + \beta^j = 1$  时, 在该单元格放置“1”。注意: 若  $\eta\alpha^i = 1$ , 则序列  $C$  的第  $i$  列为“空”。

式(3)表示的  $(q-2) \times (q-1)$  序列可以看作由式(1)

表示的  $(q-2)$  阶 Golomb Costas 序列在水平方向作含有一个间隙列的循环移位得到的。

设  $q=p^n=7(p=7, n=1)$ , 因为  $\phi(q-1)=\phi(6)=2$ , 所以有限域  $GF(7)$  共有 2 个本原元, 又因为 7 的最小原根是 3, 所以  $GF(7)$  的本原元为  $\alpha=3, \beta=3^5 \equiv 5 \pmod{7}$ , 注意: 3 和 5 为一对互逆的本原元。

图 2 表示出了 Golomb Costas 序列在水平方向作含有一个间隙列的循环移位。序列  $C_1$  的放置函数为  $y_1(k) \equiv \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ; 序列  $C_2$  的放置函数为  $y_2(k) \equiv \log_5(1-3 \times 3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 6$ ; 序列  $C_3$  的放置函数为  $y_3(k) \equiv \log_5(1-3^2 \times 3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 6$ ; 序列  $C_4$  的放置函数为  $y_4(k) \equiv \log_5(1-3^3 \times 3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 6$ ; 序列  $C_5$  的放置函数为  $y_5(k) \equiv \log_5(1-3^4 \times 3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 6$ ; 序列  $C_6$  的放置函数为  $y_6(k) \equiv \log_5(1-3^5 \times 3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 6$ 。

#### 2.2.2 Golomb Costas 序列在垂直方向的循环移位

设  $\alpha, \beta$  为  $GF(q)$  的本原元,  $\lambda$  为整数,  $|\lambda| \leq q-2$ ,  $C$  是带有一个“空”行的  $(q-1) \times (q-2)$  序列, 序列  $C$  的放置函数为

$$y(k) = \lambda + \log_{\beta}(1 - \alpha^k), 1 \leq k \leq q-2 \quad (4)$$

若设序列  $C$  的单元格的坐标为  $(i, j)$ , 则当  $\alpha^i + \beta^{j-\lambda} = 1$  时, 在该单元格放置“1”。注意: 若  $\beta^{j-\lambda} = 1$ , 则序列  $C$  的第  $j$  行为“空”。

式(4)表示的  $(q-1) \times (q-2)$  序列可以看作由式(1)表示的  $(q-2)$  阶 Golomb Costas 序列在垂直方向做含

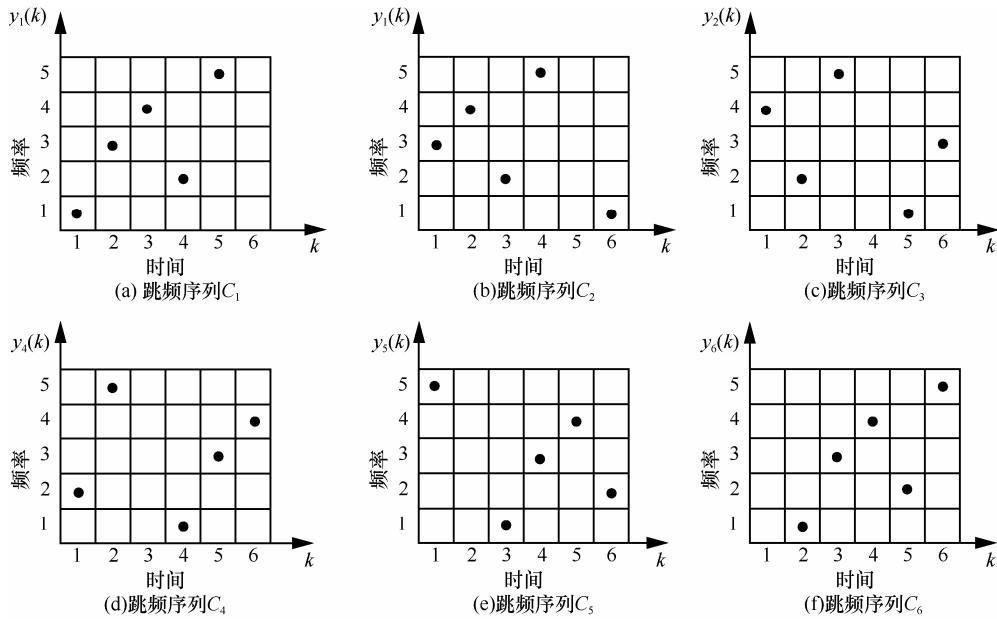


图 2 Golomb Costas 序列在水平方向上含有一个间隙列的循环移位

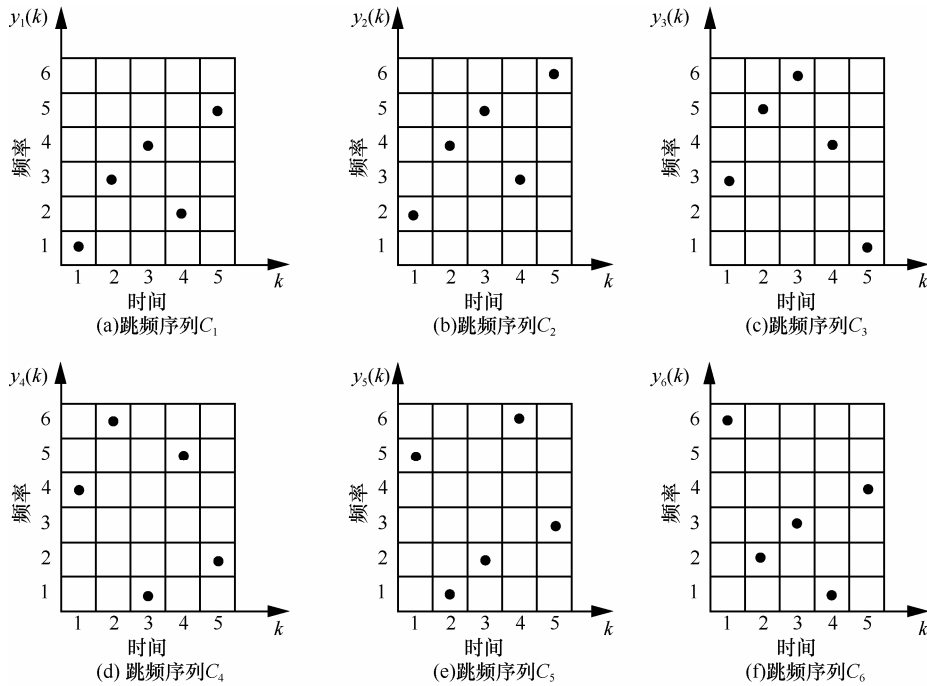


图 3 Golomb Costas 序列在垂直方向上含有一个间隙行的循环移位

有一个间隙行的循环移位得到的。当  $\lambda > 0$  时，为向上循环移位；当  $\lambda < 0$  时，为向下循环移位。

Golomb Costas 序列在垂直方向作含有一个间隙行的循环移位如图 3 所示。序列  $C_1$  的放置函数为  $y_1(k) \equiv \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ；序列  $C_2$  的放置函数为  $y_2(k) \equiv 1 + \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ；序列  $C_3$  的放置函数为  $y_3(k) \equiv 2 + \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ；序列  $C_4$  的放置函数为  $y_4(k) \equiv 3 + \log_5(1-3^k)$

$\pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ；序列  $C_5$  的放置函数为  $y_5(k) \equiv 4 + \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ；序列  $C_6$  的放置函数为  $y_6(k) \equiv 5 + \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ 。

### 2.2.3 Golomb Costas 序列在水平方向和在垂直方向的循环移位

设  $\alpha, \beta$  为  $GF(q)$  的本原元， $\eta$  为  $GF(q)$  的非零元， $\lambda$  为整数， $|\lambda| \leq q-2$ ， $C$  是带有一个“空”行和一个“空”列的  $q-1$  阶序列，序列  $C$  的放置函数为

$$y(k) = \lambda + \log_{\beta}(1 - \eta\alpha^k), 1 \leq k \leq q-1 \quad (5)$$

若设序列  $C$  的单元格的坐标为  $(i, j)$ , 则当  $\eta\alpha^i + \beta^{j-\lambda} = 1$  时, 在该单元格放置“1”。注意: 若  $\eta\alpha^i = 1$ , 则序列  $C$  的第  $i$  列为“空”; 若  $\beta^{j-\lambda} = 1$ , 则序列  $C$  的第  $j$  行为“空”。

式(5)表示的  $q-1$  阶序列可以看作由式(1)表示的  $(q-2)$  阶 Golomb Costas 序列先在水平方向做含有一个间隙列的循环移位得到式(3)表示的  $(q-2) \times (q-1)$  序列, 再由该序列在垂直方向做含有一个间隙行的循环移位得到的。

图 4 中 Golomb Costas 序列  $C_1$  的放置函数为:  $y_1(k) \equiv \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ,  $C_1$  先在水平方向向左循环移 3 列得到序列  $C_2$ ,  $C_2$  再在垂直方向向上移 2 行得到序列  $C_3$ 。

式(5)表示的  $q-1$  阶序列也可以看作由式(1)表示的  $(q-2)$  阶 Golomb Costas 序列先在垂直方向做含有一个间隙行的循环移位得到式(4)表示的  $(q-1) \times (q-2)$  序列, 再由该序列在水平方向做含有一个间隙列的循环移位得到的。

图 5 中 Golomb Costas 序列  $C_1$  的放置函数为  $y_1(k) \equiv \log_5(1-3^k) \pmod{7}, 1 \leq k \leq 5$ ,  $C_1$  先在垂直方向向上移 2 行得到序列  $C_2$ ,  $C_2$  再在水平方向向左循环

环移 3 列得到序列  $C_3$ 。

比较图 4 和图 5 可以发现, 图 4 中的序列  $C_3$  和图 5 中的序列  $C_3$  是相同的, 由此可知, Golomb Costas 序列先在水平方向循环移位、然后再在垂直方向循环移位所得到的序列与先在垂直方向循环移位、然后再在水平方向循环移位所得到的序列是相同的, 也就是说 Golomb Costas 序列在水平方向和在垂直方向的循环移位是相互独立的。

### 3 Golomb Costas 序列的相关函数

Golomb Costas 序列的相关函数包括自相关函数和互相关函数<sup>[14,17,18]</sup>, 利用 2 个序列的差值函数<sup>[20]</sup>, 可以研究序列的互相关特性。

#### 3.1 Golomb Costas 序列循环移位后的互相关函数

设有限域  $GF(q)$  ( $q=p^n, p$  为素数,  $n \in Z^+$ ),  $\lambda, \gamma$  为整数,  $|\lambda| \leq q-2, |\gamma| \leq q-2$ , 不失一般性, 在后面的讨论中假设  $\lambda, \gamma$  为大于或等于零的整数。设  $\alpha, \beta, \sigma, \rho$  为  $GF(q)$  的本原元,  $\eta, \mu$  为  $GF(q)$  的非零元, 且

$$\alpha = \sigma^l, 1 \leq l \leq q-2 \quad (6)$$

$$\beta = \rho^m, 1 \leq m \leq q-2 \quad (7)$$

设  $C_1$  和  $C_2$  是 2 个都带有一个“空”行和一个“空”列的  $q-1$  阶序列, 它们对应的放置函数分别为

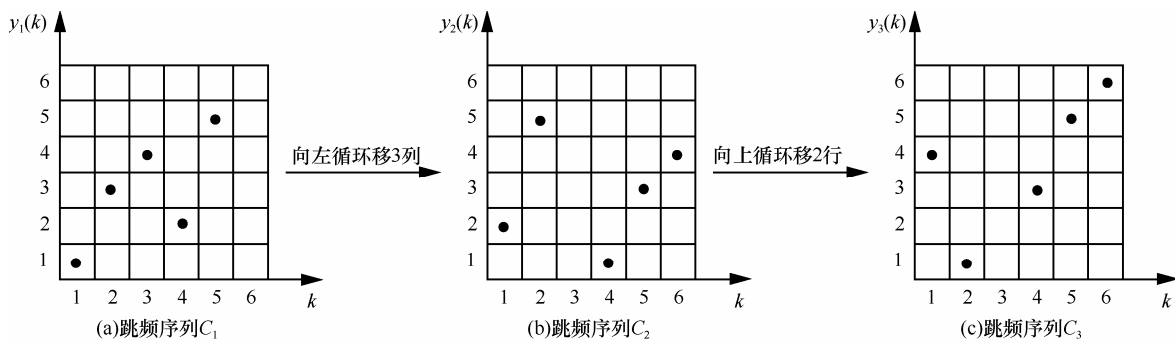


图 4 Golomb Costas 序列先在水平方向, 后在垂直方向的循环移位

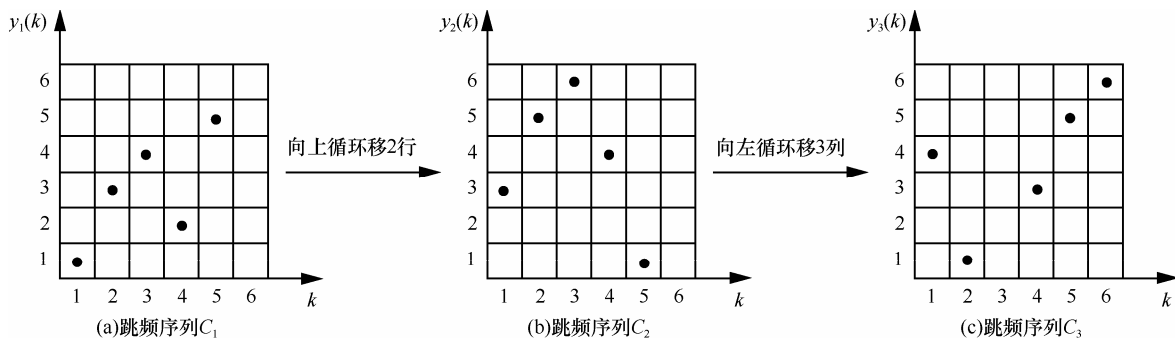


图 5 Golomb Costas 序列先在垂直方向, 后在水平方向的循环移位

$$y_1(k) = \lambda + \log_{\beta}(1 - \eta\alpha^k), 1 \leq k \leq q-1 \quad (8)$$

$$y_2(k) = \gamma + \log_{\rho}(1 - \mu\sigma^k), 1 \leq k \leq q-1 \quad (9)$$

$y_1(k)$ 和  $y_2(k)$ 的差值函数为

$$y_1\Delta y_2(k; \tau, d) = y_1(k + \tau) - d - y_2(k) \\ = \log_{\beta}(1 - \eta\alpha^{k+\tau}) - d - \log_{\rho}(1 - \mu\sigma^k) + \lambda - \gamma \quad (10)$$

式(10)中,  $|\tau| \leq q-2, |d| \leq q-2$ . 令  $y_1\Delta y_2(k; \tau, d) = 0$ , 并设  $h = d + \gamma - \lambda$ , 得

$$\log_{\beta}(1 - \eta\alpha^{k+\tau}) = \log_{\rho}(1 - \mu\sigma^k) + h \quad (11)$$

注意到  $\beta = \rho^m$ , 由式(11)可知: 当  $h = \log_{\beta}[(1 - \eta\alpha^{k+\tau})(1 - \mu\sigma^k)^{-m}]$  时, 对应于该  $k$  值, 序列  $C_1$  和  $C_2$  产生一个“1”单元格重合<sup>[20]</sup>. 由此可得

$$\beta^h = (1 - \eta\alpha^{k+\tau})(1 - \mu\sigma^k)^{-m} \quad (12)$$

即

$$\beta^h(1 - \mu\sigma^k)^m = 1 - \eta\alpha^{k+\tau} \quad (13)$$

将  $\alpha = \sigma^l$  代入式(13), 得

$$\beta^h(1 - \mu\sigma^k)^m = 1 - \eta\sigma^{l\tau}(\sigma^k)^l \quad (14)$$

令  $\sigma^k = X$ , 式(14)变为

$$\beta^h(1 - \mu X)^m = 1 - \eta\sigma^{l\tau} X^l \quad (15)$$

即

$$\eta\sigma^{l\tau} X^l + \beta^h(1 - \mu X)^m - 1 = 0 \quad (16)$$

令  $u(X) = \eta\sigma^{l\tau} X^l + \beta^h(1 - \mu X)^m - 1$ , 则  $u(X)$  表示系数和变量均为  $\text{GF}(q)$  中元素的多项式。

根据费马定理(Fermat theorem)<sup>[17, 21]</sup>, 即

$$x^q = x, x \in \text{GF}(q) \quad (17)$$

可以得到

$$x^{q-1} = 1, x \in \text{GF}(q), x \neq 0 \quad (18)$$

设  $1 \leq l \leq (q-1)/2, 1 \leq m \leq (q-1)/2$ , 且  $l \neq m$ , 则  $\deg u(x) = \max(l, m)$ . 此时, 方程(16)在  $\text{GF}(q)$  内最多只有  $\max(l, m)$  个解, 因此序列  $C_1$  和  $C_2$  序列的互相关函数  $R_{C_1 C_2}(\tau, d) \leq \max(l, m)$ .

对于  $l$  和  $m$  的其他取值, 考虑到式(18), 方程(16)左边多项式  $u(x)$  的实际次数会有所变化, 需要针对具体情况进行分析。

### 3.1.1 由互逆元生成的 Golomb Costas 序列

因为当  $\rho$  是本原元时,  $\rho^{-1}$  也是本原元<sup>[18]</sup>. 所以取  $l=1, m=q-2$ , 即:  $\alpha = \sigma^l = \sigma, \beta = \rho^m = \rho^{q-2} = \rho^{-1}$ , 此时方程(16)变为

$$\eta\alpha^{\tau} X + \beta^h(1 - \mu X)^{q-2} - 1 = 0 \quad (19)$$

式(19)两边同时乘以  $(1 - \mu X)^2$ , 得

$$(\eta\alpha^{\tau} X - 1)(1 - \mu X)^2 + \beta^h(1 - \mu X)^q = 0 \quad (20)$$

由式(17), 得  $(1 - \mu X)^q = 1 - \mu X$ , 代入式(20), 得

$$(\eta\alpha^{\tau} X - 1)(1 - \mu X)^2 + \beta^h(1 - \mu X) = 0 \quad (21)$$

经整理后, 得

$$(\mu X - 1)[\eta\mu\alpha^{\tau} X^2 - (\eta\sigma^{\tau} + \mu)X + 1 - \beta^h] = 0 \quad (22)$$

如果  $\mu X = 1$ , 式(22)变为

$$\beta^h(\mu X - 1) = 0 \quad (23)$$

方程(23)在  $\text{GF}(q)$  中只有 1 个解。

如果  $\mu X \neq 1$ , 式(22)变为

$$\eta\mu\alpha^{\tau} X^2 - (\eta\sigma^{\tau} + \mu)X + 1 - \beta^h = 0 \quad (24)$$

方程(24)在  $\text{GF}(q)$  中最多只有 2 个解。

综上所述, 这 2 个 Golomb Costas 序列互相关函数的最大值不大于 2, 所以有如下的结论。

**定理 1** 设  $\alpha = \sigma, \beta = \rho^{-1}$  为  $\text{GF}(q)$  的本原元,  $\eta, \mu$  为  $\text{GF}(q)$  的非零元,  $\lambda, \gamma$  为整数,  $|\lambda| \leq q-2, |\gamma| \leq q-2$ , 则含有一个间隙行和一个间隙列的  $(q-1) \times (q-1)$  序列:  $y_1(k) = \lambda + \log_{\beta}(1 - \eta\alpha^k)$  和  $y_2(k) = \gamma + \log_{\rho}(1 - \mu\sigma^k)$  的互相关函数的最大值不大于 2。

**推论 1** 设  $\alpha = \sigma, \beta = \rho^{-1}$  为  $\text{GF}(q)$  的本原元, 则不含有间隙行和间隙列的  $q-2$  阶 Golomb Costas 序列:  $y_1(k) = \log_{\beta}(1 - \alpha^k)$  和  $y_2(k) = \log_{\rho}(1 - \sigma^k)$  的互相关函数的最大值不大于 2。

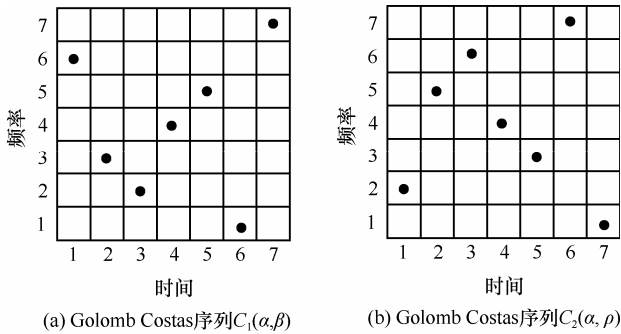
文献[22]指出, 当  $n > 3$  时, 任何 2 个  $n$  阶 Costas 序列 (不含有间隙行和间隙列) 的自模糊函数至少有一个公共的副瓣, 即至少有一个副瓣 1 的位置是相同的。这个结论的等效含义是: 当  $n > 3$  时, 任何 2 个  $n$  阶 Costas 序列的互相关函数的最大值不小于  $2^{[14, 23]}$ , 因此, 由推论 1 可知这 2 个同阶的 Golomb Costas 序列互相关函数的最大值为 2。

对于有限域  $\text{GF}(3^2) = \{b_0 + b_1x | b_i \in Z_3\} = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$ ,  $q=9, p=3, n=2$ , 取  $f(x) = x^2 + 1$  为  $Z_3 = \text{GF}(3)$  上的 2 次不可约多项式,  $\phi(q-1) = \phi(8) = 4$ , 所以有限域  $\text{GF}(3^2)$  共有 4 个本原元, 它们是:  $x+1, x+2, 2x+1, 2x+2$ , 其中,  $x+1$  和  $x+2, 2x+1$  和  $2x+2$  分别是 2 对互逆的本原元。设  $\alpha = \sigma = x+1, \beta = \rho^7 = \rho^{-1} = 2x+1$ , 本原元的各次幂和本原元之间的关系如表 2 所示。

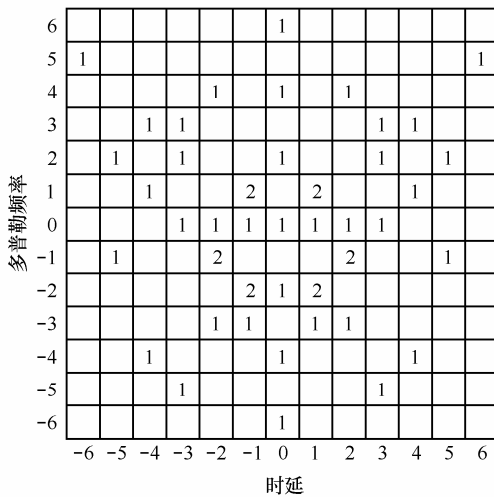
表 2 GF(3<sup>2</sup>)上本原元的各次幂和本原元之间的关系

$\alpha=\sigma=x+1$	$\beta=2x+1=\rho^7=\rho^{-1}$	$\rho=2x+2$
$\alpha^2=2x$	$\beta^2=x$	$\rho^2=2x$
$\alpha^3=2x+1$	$\beta^3=x+1$	$\rho^3=x+2$
$\alpha^4=2$	$\beta^4=2$	$\rho^4=2$
$\alpha^5=2x+2$	$\beta^5=x+2$	$\rho^5=x+1$
$\alpha^6=x$	$\beta^6=2x$	$\rho^6=x$
$\alpha^7=x+2$	$\beta^7=2x+2$	$\rho^7=2x+1$
$\alpha^8=1$	$\beta^8=1$	$\rho^8=1$

图 6(a)中的  $C_1$  为 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_1(k) \equiv \log_\beta(1-\alpha^k) \pmod{f(x)}$ ,  $1 \leq k \leq 7$ ; 图 6(b)中的  $C_2$  为 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_2(k) \equiv \log_\rho(1-\alpha^k) \pmod{f(x)}$ ,  $1 \leq k \leq 7$ ; 图 6(c)为序列  $C_1$  和  $C_2$  的互相关函数。由图 6 可知, 这 2 个 Golomb Costas 序列互相关函数的最大值为 2。



(a) Golomb Costas 序列  $C_1(\alpha, \beta)$  (b) Golomb Costas 序列  $C_2(\alpha, \rho)$



(c) 序列  $C_1$  和  $C_2$  的互相关函数

图 6 由互逆元生成的 Golomb Costas 序列的互相关函数

### 3.1.2 时延受限

设  $l=m=1$ , 即:  $\alpha=\sigma, \beta=\rho$ , 此时式(16)变为

$$(\eta\alpha^\tau - \mu\beta^h)X + \beta^h - 1 = 0 \quad (25)$$

式(25)在  $GF(q)$  中可能存在多解的条件是

$$\begin{cases} \eta\alpha^\tau - \mu\beta^h = 0 \\ \beta^h - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta\alpha^\tau - \mu = 0 \\ h = d + \gamma - \lambda = 0 \end{cases} \quad (26)$$

设  $\mu=\eta\alpha^{k_1w}$ ,  $k_1, w$  为正整数,  $ws \leq q-1$ ,  $s$  为正整数,  $k_1 < s$ 。则由式(26)中的方程  $\eta\alpha^\tau - \mu = 0$ , 可得

$$\eta\alpha^\tau - \eta\alpha^{k_1w} = 0 \quad (27)$$

因为  $\eta \neq 0$ , 所以方程(27)的解为

$$\tau = k_1w + k_2(q-1) \quad (28)$$

式(28)中  $k_2$  为整数。当  $\tau \neq k_1w + k_2(q-1)$  时, 在  $GF(q)$  中方程(25)最多只有 1 个解。因为  $|\tau| \leq q-2$ 、 $0 < k_1w < q-1$ , 所以式(28)中  $\tau$  的取值为:  $\tau_1 = k_1w \geq w$  和  $\tau_2 = k_1w - (q-1) < 0$ ,  $|\tau_2| = (q-1) - k_1w \geq (q-1) - (s-1)w = w + (q-1) - ws \geq w$ 。因此, 有如下结论。

**定理 2** 当时延  $\tau$  满足  $|\tau| \leq w-1$  时,  $s$  个含有一个间隙行和一个间隙列的  $(q-1) \times (q-1)$  序列族  $y_1(k) = \lambda_1 + \log_\beta(1-\eta\alpha^k)$ 、 $y_2(k) = \lambda_2 + \log_\beta(1-\eta\alpha^w \cdot \alpha^k)$ 、 $\dots$ 、 $y_s(k) = \lambda_s + \log_\beta(1-\eta\alpha^{(s-1)w} \cdot \alpha^k)$ , ( $\lambda_i \in Z, |\lambda_i| \leq q-2, i=1, \dots, s$ ) 中任意 2 个序列族的互相关函数的值不超过 1。

如果将这些序列同时逆时针(或顺时针)旋转  $90^\circ$ , 水平方向仍然表示时间, 垂直方向仍然表示频率, 则当多普勒频移  $d$  满足  $|d| \leq w-1$  时, 任意 2 个序列的互相关函数最大值为 1。

**推论 2** 当时延  $\tau$  满足  $|\tau| \leq w-1$  时,  $s$  个含有一个间隙列的  $(q-2) \times (q-1)$  序列  $y_1(k) = \log_\beta(1-\eta\alpha^k)$ 、 $y_2(k) = \log_\beta(1-\eta\alpha^w \cdot \alpha^k)$ 、 $\dots$ 、 $y_s(k) = \log_\beta(1-\eta\alpha^{(s-1)w} \cdot \alpha^k)$  中任意 2 个序列的互相关函数的值不大于 1。

图 7(a)  $C_1$  的放置函数为  $y_1(k) \equiv 2 + \log_\beta(1-\alpha \cdot \alpha^k) \pmod{f(x)}$ ,  $1 \leq k \leq 8$ ; 图 7(b)  $C_2$  的放置函数为  $y_2(k) \equiv 3 + \log_\beta(1-\alpha^5 \cdot \alpha^k) \pmod{f(x)}$ ,  $1 \leq k \leq 8$ ; 图 7(c)  $C_3$  的放置函数为  $y_3(k) \equiv \log_\beta(1-\alpha \cdot \alpha^k) \pmod{f(x)}$ ,  $1 \leq k \leq 8$ ; 图 7(d)  $C_4$  的放置函数为  $y_4(k) \equiv \log_\beta(1-\alpha^5 \cdot \alpha^k) \pmod{f(x)}$ ,  $1 \leq k \leq 8$ 。 $\alpha, \beta$  为有限域  $GF(3^2)$  的本原元(见表 2),  $f(x) = x^2 + 1$  为  $Z_3 = GF(3)$  上的 2 次不可约多项式。图 7(e)、图 7(f)分别为序列  $C_1$  和  $C_2$ 、序列  $C_3$  和  $C_4$  的互相关函数。由图 7(e)可知, 当时延  $|\tau| \leq w-1=3$  时, 2 个含有一个间隙行和一个间隙列的序列  $C_1$  和  $C_2$  互相关函数的值不大于 1。由图 7(f)可知, 当时延  $|\tau| \leq w-1=3$  时, 2 个含有一个间隙列的序列  $C_3$  和  $C_4$  互相关函数的值不大于 1。

### 3.1.3 多普勒频移受限

设  $\gamma = \lambda + n_1w$ ,  $n_1, w_1$  为正整数,  $w_1s_1 \leq q-1$ ,  $s_1$  为正整数,  $n_1 < s_1$ 。则式(26)中的方程  $d + \gamma - \lambda = 0$  的解为

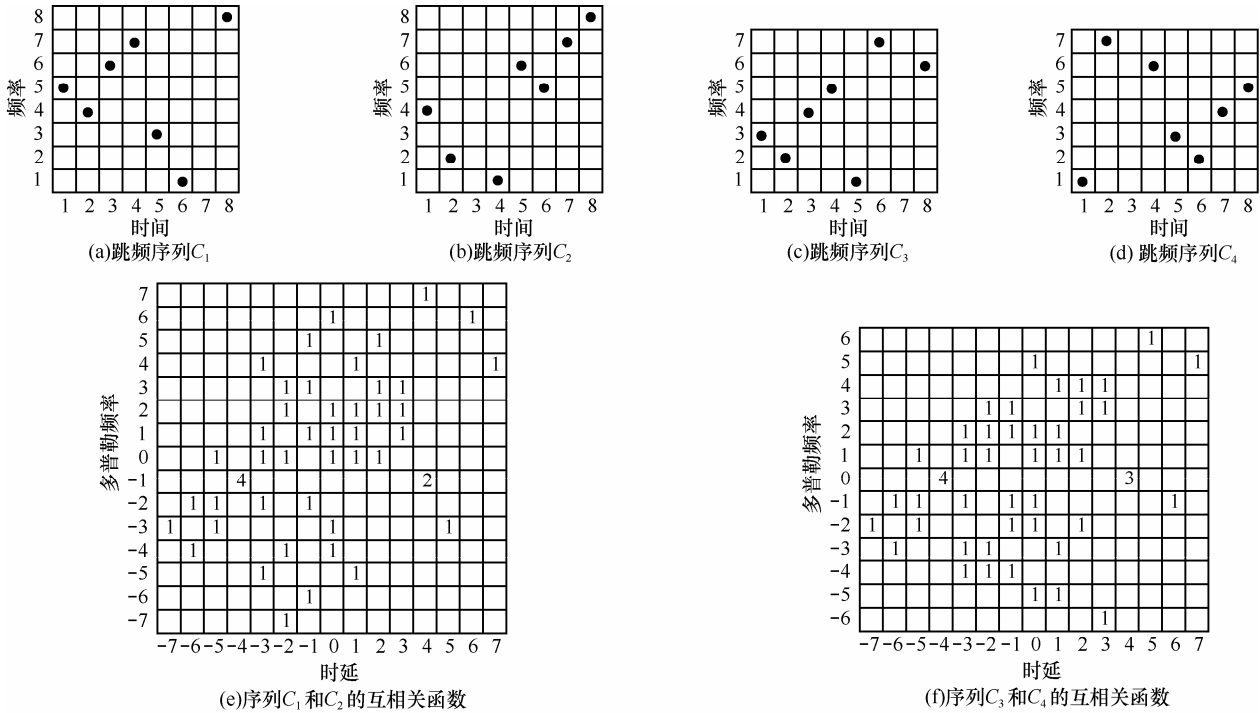


图 7 Golomb Costas 序列循环移位后序列族的互相关函数

$$d = -n_1 w_1 + n_2 (q - 1) \tag{29}$$

式(29)中  $n_2$  为整数。当  $d \neq -n_1 w_1 + n_2 (q - 1)$  时，在  $GF(q)$  中方程(25)最多只有 1 个解。因为  $|d| \leq q - 2, 0 < n_1 w_1 < q - 1$ ，所以式(29)中  $d$  的取值为  $d_1 = -n_1 w_1 < 0 (|d_1| \geq w_1)$  和  $d_2 = -n_1 w_1 + (q - 1) > 0, d_2 \geq (q - 1) - (s_1 - 1)w_1 = w_1 + (q - 1) - w_1 s_1 \geq w_1$ 。因此，有如下结论。

**定理 3** 当多普勒频率  $d$  满足  $|d| \leq w_1 - 1$  时， $s_1$  个含有一个间隙行和一个间隙列的  $(q - 1) \times (q - 1)$  序列族  $y_1(k) = \lambda + \log_\beta(1 - \eta_1 \alpha^k), y_2(k) = \lambda + w_1 + \log_\beta(1 - \eta_2 \alpha^k), \dots, y_{s_1}(k) = \lambda + (s_1 - 1)w_1 + \log_\beta(1 - \eta_{s_1} \alpha^k)$ , ( $\eta_i = \alpha^{m_i}, m_i \in Z, |m_i| \leq q - 2, i = 1, \dots, s_1$ ) 中任意 2 个序列族的互相关函数的值不超过 1。

由定理 3 可得到如下的推论。

**推论 3** 当多普勒频率  $d = 0$  时， $q - 1$  个含有一个间隙行和一个间隙列的  $(q - 1) \times (q - 1)$  序列  $y_i(k) = (i - 1) + \log_\beta(1 - \eta \alpha^k), i = 1, 2, \dots, q - 1; k = 1, 2, \dots, q - 1$  中任意 2 个序列的互相关函数的值不超过 1。

如果将这些序列同时逆时针（或顺时针）旋转  $90^\circ$ ，水平方向仍然表示时延，垂直方向仍然表示多普勒频率，则当时延  $\tau = 0$  时，任意 2 个序列的互相关函数的值不超过 1。

**推论 4** 当多普勒频率  $d = 0$  时， $q - 1$  个含有一个间隙行的  $(q - 1) \times (q - 2)$  序列  $y_i(k) = (i - 1) + \log_\beta(1 - \alpha^k), i = 1, 2, \dots, q - 1; k = 1, 2, \dots, q - 2$  中任意 2 个序列的互相关

函数的值不超过 1。

图 8(a)  $C_1$  的放置函数为  $y_1(k) \equiv 2 + \log_\beta(1 - \alpha \cdot \alpha^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 8$ ；图 8(b)  $C_2$  的放置函数为  $y_2(k) \equiv 3 + \log_\beta(1 - \alpha \cdot \alpha^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 8$ ；图 8(c)  $C_3$  的放置函数为  $y_3(k) \equiv 2 + \log_\beta(1 - \alpha^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 7$ ；图 8(d)  $C_4$  的放置函数为  $y_4(k) \equiv 3 + \log_\beta(1 - \alpha^k) \pmod{f(x)}, 1 \leq k \leq 7$ 。 $\alpha, \beta$  为有限域  $GF(3^2)$  的本原元(见表 2)， $f(x) = x^2 + 1$  为  $Z_3 = GF(3)$  上的 2 次不可约多项式。图 8(e)、图 8(f) 分别为序列  $C_1$  和  $C_2$ 、序列  $C_3$  和  $C_4$  的互相关函数。由图 8(e) 可知，当多普勒频率  $d = 0$  时，2 个含有一个间隙行和一个间隙列的序列  $C_1$  和  $C_2$  互相关函数的值不大于 1。由图 8(f) 可知，当多普勒频率  $d = 0$  时，2 个含有一个间隙行的序列  $C_3$  和  $C_4$  互相关函数的值不大于 1。

**3.2 Golomb Costas 序列循环移位后的自相关函数**

若  $\eta = \mu, l = m = 1, \lambda = \gamma$ ，则  $h = d + \gamma - \lambda = d$ ，此时  $C_1 = C_2$ ， $C_1$  和  $C_2$  的互相关函数即为  $C_1$ （或  $C_2$ ）的自相关函数。式(16)变为

$$\eta(\alpha^\tau - \beta^d)X + \beta^d - 1 = 0 \tag{30}$$

方程(30)在  $GF(q)$  中可能存在多解的条件是

$$\begin{cases} \eta(\alpha^\tau - \beta^d) = 0 \\ \beta^d - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 0 \\ d = 0 \end{cases} \tag{31}$$

所以当  $\tau, d$  不同时为 0 时，方程(30)在  $GF(q)$



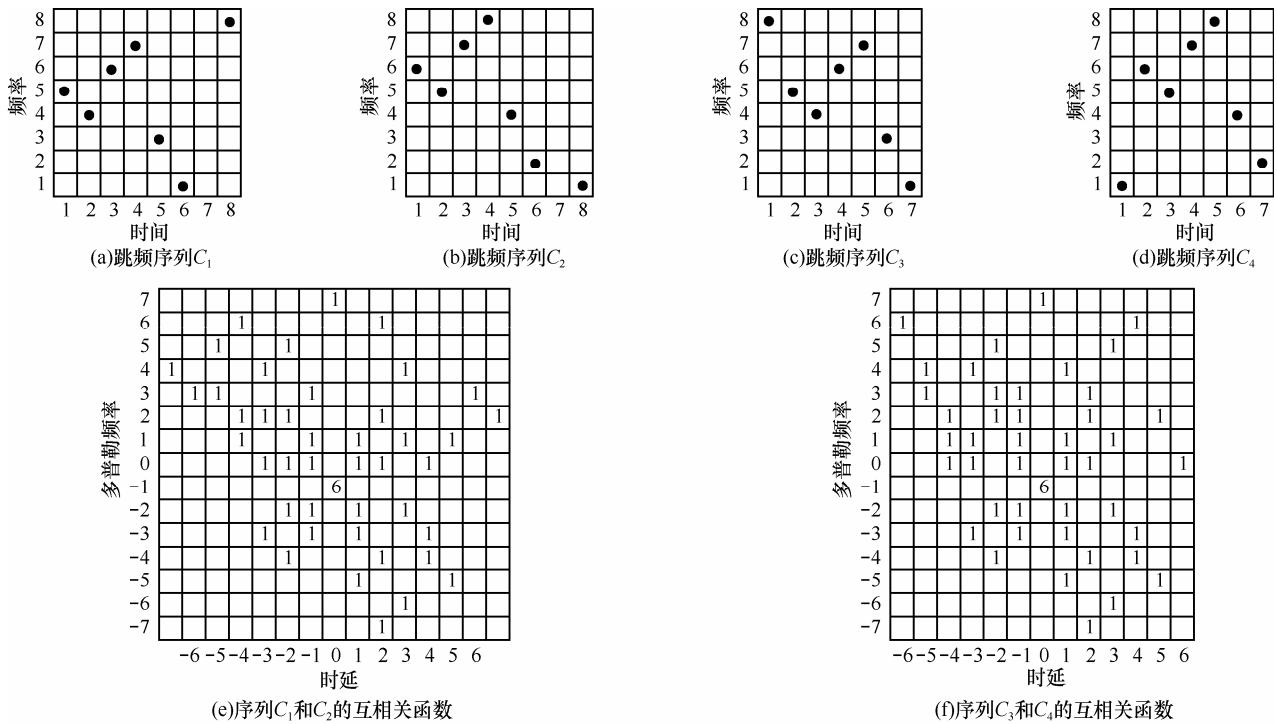


图 8 Golomb Costas 序列循环移位后的互相关函数

中最多只有 1 个解, 因此有下面的结论。

**定理 4**  $q-1$  个含有一个间隙行和一个间隙列的  $(q-1) \times (q-1)$  序列  $y_i(k) = (i-1) + \log_\beta(1 - \eta\alpha^k)$ ,  $i=1, 2, \dots, q-1$ ;  $k=1, 2, \dots, q-1$  中每个序列自相关函数副瓣的最大值为 1。

由定理 4 可得到如下的推论。

**推论 5** 不含有间隙行和间隙列的  $q-2$  阶 Golomb Costas 序列  $y(k) = \log_\beta(1 - \alpha^k)$ ,  $k=1, 2, \dots, q-2$  自相关函数副瓣的最大值为 1。

**推论 6**  $q-1$  个含有一个间隙行的  $(q-1) \times (q-2)$  序列  $y_i(k) = (i-1) + \log_\beta(1 - \alpha^k)$ ,  $i=1, 2, \dots, q-1$ ;  $k=1, 2, \dots, q-2$  中每个序列自相关函数副瓣的最大值为 1。

**推论 7**  $q-1$  个含有一个间隙列的  $(q-2) \times (q-1)$  序列  $y_i(k) = \log_\beta(1 - \alpha^i \cdot \alpha^k)$ ,  $i=0, 1, \dots, q-2$ ;  $k=1, 2, \dots, q-1$  中每个序列自相关函数副瓣的最大值为 1。

图 9(a)  $C_1$  为 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_1(k) \equiv \log_5(1 - 3^k) \pmod{7}$ ,  $1 \leq k \leq 5$ ; 图 9(b)  $C_2$  为含有一个间隙列的 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_2(k) \equiv \log_5(1 - 3^3 \cdot 3^k) \pmod{7}$ ,  $1 \leq k \leq 6$ ; 图 9(c)  $C_3$  为含有一个间隙行的 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_3(k) \equiv 2 + \log_5(1 - 3^k) \pmod{7}$ ,  $1 \leq k \leq 5$ ; 图 9(d)  $C_4$  为含有一个间隙行和一个间隙列的 Golomb Costas 序列, 其放置函数为  $y_4(k) \equiv 2 + \log_5(1 - 3^3 \cdot 3^k) \pmod{7}$ ,  $1 \leq k \leq 6$ 。图 9(e)、图 9(f)、图 9(g)和图 9(h)分别

为序列  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  和  $C_4$  的自相关函数。由图可知, 各个序列自相关函数副瓣的最大值为 1。

#### 4 OFDM 系统跳频图样设计

小区制移动通信系统的概念在 OFDM 移动通信系统中仍然有效, 只不过在频分复用系统中给用户分配的是频率, 而在 OFDM 系统中给用户分配的是跳频图样, 根据用户数据速率的大小, 一个用户可以使用多个跳频图样。

原来同频复用的概念在 OFDM 系统中变为同“跳频图样”复用, 2 个用户距离超过同频保护距离, 可以使用同一个跳频图样。

Costas 序列具有理想的自相关特性, 可以通过合理设计 Costas 序列的码组图样获得良好的互相关函数特性, 减小用户之间的干扰。理想的互相关函数特性可表示为

$$R_{C_1 C_2}(\tau, d) \leq 1 \quad |\tau| \leq n-1, |d| \leq n-1 \quad (32)$$

式(32)中  $R_{C_1 C_2}(\tau, d)$  表示 2 个  $n$  阶 Costas 序列  $C_1$  和  $C_2$  的互相关函数。能不能设计出互相关函数符合式(32)条件的 Costas 码呢? 文献[14、22~24]指出: 当  $n > 3$  时, 任何 2 个  $n$  阶 Costas 序列的互相关函数的最大值不小于 2。那么, 能不能设计出 2 个  $n$  阶 Costas 序列  $C_1$  和  $C_2$ , 使其互相关函数符合式(33)

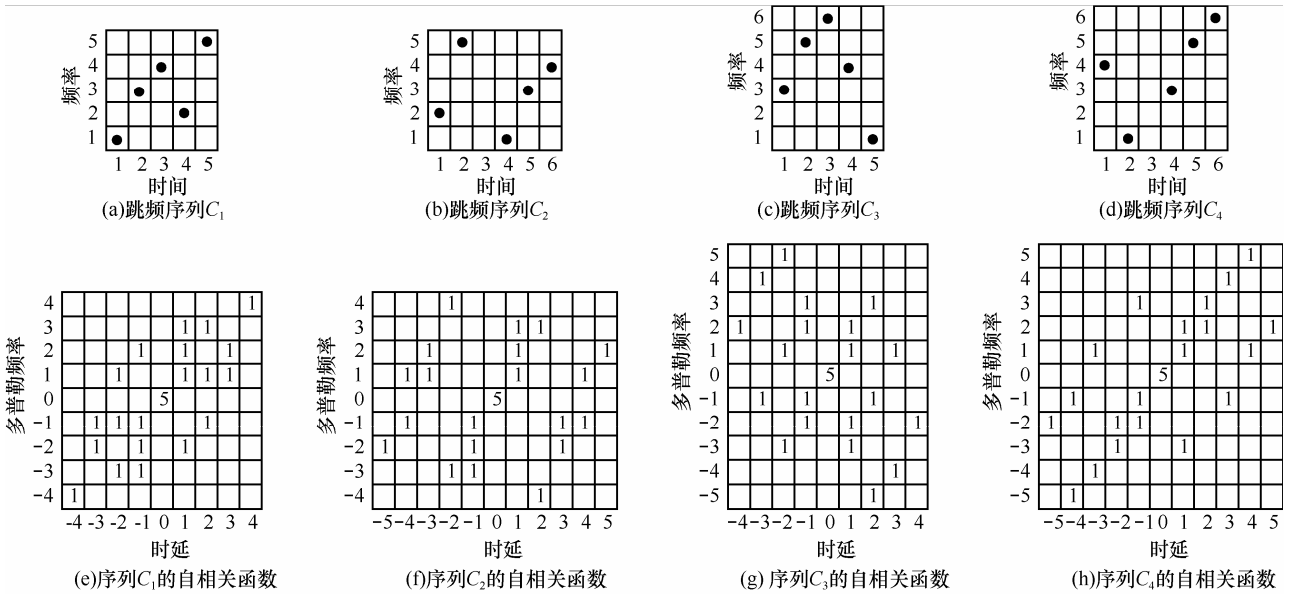


图 9 Golomb Costas 序列循环移位后的自相关函数

或式(34)的条件?

$$R_{C_1}(\tau, d) \leq 1 \quad |\tau| \leq t, \quad |d| \leq n-1 \quad (33)$$

$$R_{C_2}(\tau, d) \leq 1 \quad |\tau| \leq n-1, \quad |d| \leq r \quad (34)$$

式(33)中  $0 \leq t < n/2$ , 式(34)中  $0 \leq r < n/2$ 。由定理 2 和文献[24]可知, 这样的序列是可以设计出来的。在移动通信中用户的运动速度是有限的, 可以根据 OFDM 系统的最大多普勒频移, 利用对 Golomb Costas 序列循环移位获得含有一个间隙行和一个间隙列的序列族设计跳频码, 使跳频码的互相关性能满足式(34)要求。例如: 设信号波长为  $\lambda = 10 \text{ cm}$  (频率为 3 GHz), 接收机向发射机靠近, 相对的径向速度为  $v = 100 \text{ m/s}$  (360 km/h), 则多普勒频移  $f_d = v/\lambda = 1 \text{ 000 Hz}$ , 针对实际系统中可能出现的最大多普勒频移  $f_d$ , 可以根据  $|f_d| \leq (w-1)F_b$ , 确定  $w$  ( $w$  为正整数)和频隙  $F_b$ [20]。

#### 4.1 不同小区的跳频图样设计

设一个区群包含  $s$  个小区, 可以找一个正整数  $w$  和一个正整数  $q = p^n$ ,  $p$  为素数,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , 使下式成立

$$ws \leq q-1 \quad (35)$$

式(35)中  $q-1$  对应 OFDM 系统中每个小区内中的最大用户数,  $w$  对应每个时间帧的时隙数。设  $\alpha, \beta$  为  $\text{GF}(q)$  的本原元, 作 Golomb Costas 序列  $C_1: y_1(k) = \log_\beta(1-\alpha^k)$ ,  $C_2: y_2(k) = \log_\beta(1-\alpha^w \cdot \alpha^k)$ ,  $\dots$ ,  $C_s: y_s(k) = \log_\beta(1-\alpha^{(s-1)w} \cdot \alpha^k)$ 。序列  $C_2, C_3, \dots, C_s$  是序列  $C_1$  在水平方向分别向左循环移位  $w$  列、 $2w$  列、 $\dots$ 、

$(s-1)w$  列后所得到的含有一个间隙列的序列。因为实际系统中是多普勒频移受限的, 因此, 需要将这些序列逆时针旋转  $90^\circ$ , 旋转后的序列即为小区 1、2、 $\dots$ 、 $s$  的跳频图样。由定理 2 可知, 当多普勒频移满足  $|d| \leq w-1$  时, 任意 2 个小区间用户的互相关函数的值不超过 1。

#### 4.2 小区内的跳频图样设计

序列  $C_j (j=1, 2, \dots, s)$  在垂直方向做含有一个间隙行的循环移位后的放置函数可表示为

$$y_{j\lambda_j}(k) = \lambda_j + \log_\beta(1 - \alpha^{(j-1)w} \cdot \alpha^k),$$

$$j = 1, 2, \dots, s; \quad \lambda_j = 0, 1, \dots, q-2 \quad (36)$$

在式(36)中, 对一个给定的  $j$ , 当  $\lambda_j$  取  $0, 1, 2, \dots, q-2$  时, 可得到  $q-1$  个序列, 将这些序列逆时针旋转  $90^\circ$ , 就是第  $j$  个小区内的  $q-1$  个用户的跳频序列。由推论 3 可知, 当时延  $\tau=0$  (注意: 对逆时针旋转  $90^\circ$  后序列的互相关函数的时延变量  $\tau$  的限制对应于对旋转前序列的互相关函数的多普勒频移变量  $d$  的限制) 时, 同一个小区内的任意 2 个序列的互相关函数的值不超过 1。在小区制跳频系统中, 设计小区的大小, 使同一小区内用户的最大时延 ( $1 \mu\text{s}$  时延对应 300 m 距离) 小于 1 个时隙, 即  $\tau=0$ , 由推论 3 可知同一个小区内用户不会产生干扰, 此处不考虑用户发射信号除直达径以外的多径传播对本小区内其他用户产生的干扰。

每个小区中各个用户的跳频图样为 Golomb Costas 序列在水平方向和垂直方向循环移位后得到



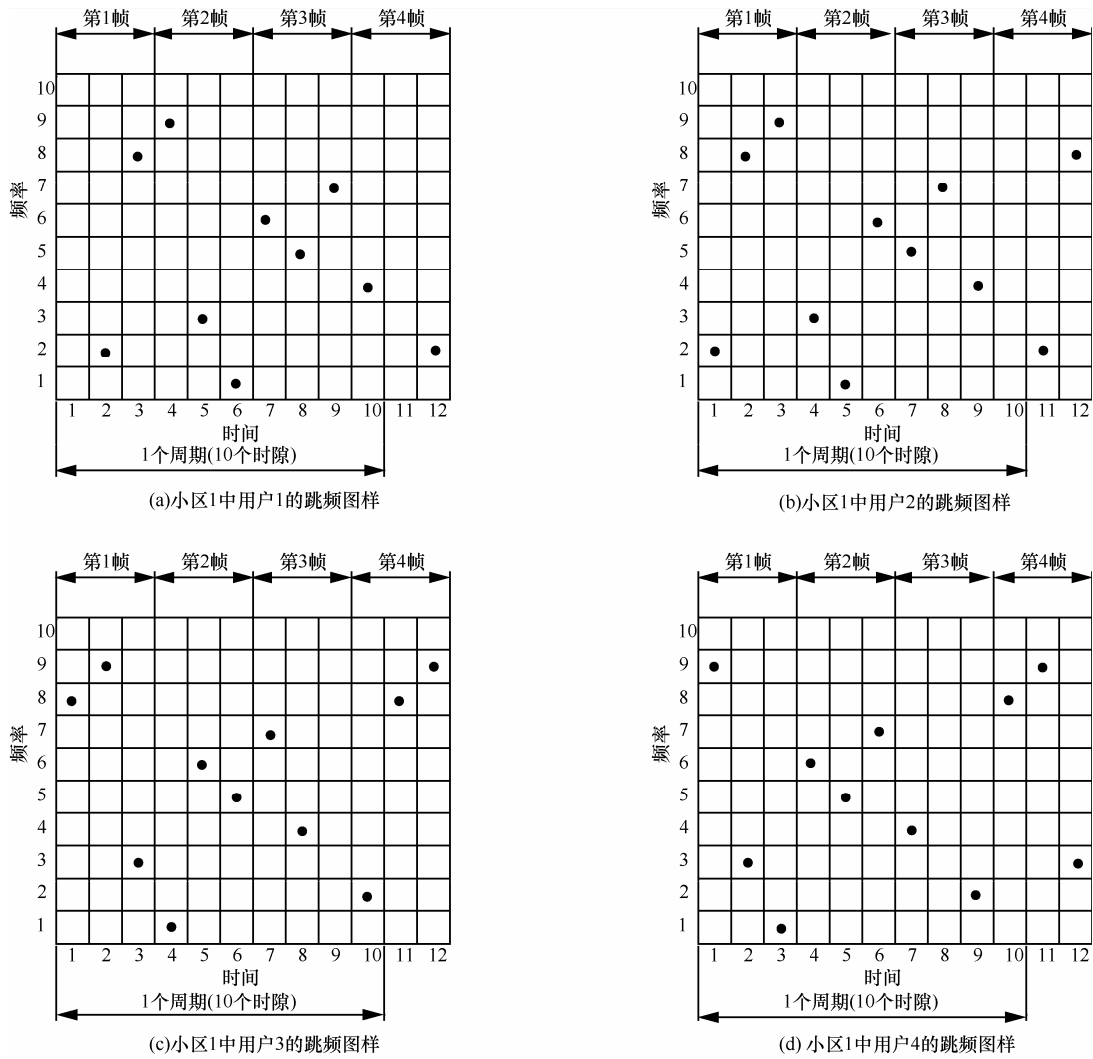


图 11 小区 1 内 4 个用户的跳频图样

表 4 小区 2 内所有用户子载波的分配

频率	小区 2 中子载波的分配											
	第 1 帧			第 2 帧			第 3 帧			第 4 帧		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9
2	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7
3	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6
4	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8
5	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2
6	4	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4	3
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
8	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6	5
9	2	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4

表 5 小区 3 内所有用户子载波的分配

频率	小区 3 中子载波的分配											
	第 1 帧			第 2 帧			第 3 帧			第 4 帧		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10
1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8
2	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2
3	4	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4	3
4	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
5	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6	5
6	2	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
7	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6	5	4
8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7
10	7	6	5	4	3	2	1	10	9	8	7	6

频率闲置。注意:表中的数字(用户编号)的排列有很强的规律性,由表可知,跳频码中含有一个空闲时隙和一个空闲频率(同一小区用户的跳频码的空闲频率相同),正是由于空闲时隙和空闲频率的引入使得跳频码同时具有理想的自相关和最佳的互相关性能。

## 5 结束语

本文研究了 Golomb Costas 序列的代数结构和几何特性及其构造方法,利用 Golomb Costas 序列的双周期特性,在水平方向和垂直方向对 Golomb Costas 序列进行循环移位,可获得含有一个间隙列和一个间隙行的序列族。建立了利用循环移位法获得 Golomb Costas 序列族的数学模型,详细讨论了利用 Golomb Costas 序列族设计 OFDM 系统跳频码的方法。根据实际系统可能出现的最大多普勒频移,利用循环移位法获得含有一个间隙列和一个间隙行的序列族设计 OFDM 系统的跳频码,跳频码具有理想的自相关特性和最低的互相关性能。

## 参考文献:

- [1] ZHU D L, NATARAJAN B. Residue number system arithmetic-inspired hopping-pilot pattern design[J]. *IEEE Trans Veh Tech*, 2010, 59(7): 3679-3683.
- [2] OSSEIRAN A, GUEY J C. Hopping pilot pattern for interference mitigation in OFDM[A]. *Proc Internat Symp Pers, Indoor, Mobile Radio Commun*[C]. Cannes, French Riviera, France, 2008. 1-5.
- [3] MARIC S V, MORENO O. Using Costas arrays to construct frequency hop patterns for OFDM wireless systems[A]. *Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*[C]. Princeton, NJ, USA, 2006. 505-507.
- [4] GUEY J C. Synchronization signal design for OFDM based on time-frequency hopping patterns[A]. *Proc IEEE Internet Conf Commun*[C]. Glasgow, Scotland, UK, 2007. 4329-4334.
- [5] WANG C W, ZHANG X, YANG D C. Evaluation of Welch-Costas frequency hopping pattern for OFDM cellular system[A]. *Proc IEEE Internat Symp Pers, Indoor, Mobile Radio Commun*[C]. Athens, Greece, 2007. 1-5.
- [6] COSTAS J P. A study of a class of detection waveforms having nearly ideal range-doppler ambiguity properties[J]. *Proc IEEE*, 1984, 72(8): 996-1009.
- [7] FAM A T. Good code sets by spreading orthogonal vectors via Golomb rulers and Costas arrays[A]. *Proceedings of the IEEE International Radar Conference*[C]. Washington, DC, USA, 2010. 1060-1063.
- [8] ORTIZ-UBARRI J, MORENO O, TIRKEL A Z, *et al*. Algebraic symmetries of generic  $(m+1)$ -dimensional periodic Costas arrays[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2013, 59(2): 1076-1081.
- [9] BLACKBURN S R, ETZION T, MARTIN K M, *et al*. Two-dimensional patterns with distinct differences—constructions, bounds, and maximal anticode[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2010, 56(3): 1216-1229.
- [10] MORENO O, GOLOMB S. A new optimal double periodical construction of one target two-dimensional arrays[A]. *Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*[C]. Princeton, NJ, USA, 2006. 518-521.
- [11] MORENO O, OMRANI R, MARIC S V. A new construction of multiple target sonar and extended Costas arrays with perfect correlation[A]. *Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*[C]. Princeton, NJ, USA, 2006. 512-517.
- [12] DRAKAKIS K. Some results on the degrees of freedom of Costas arrays[A]. *Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems*[C]. Princeton, NJ, USA, 2010. 1-5.
- [13] GOLOMB S W, TAYLOR H. Constructions and properties of costas arrays[J]. *Proc IEEE*, 1984, 72(9): 1143-1163.
- [14] DRAKAKIS K, GOW R, RICHARD S, *et al*. On the maximal cross-correlation of algebraically constructed Costas arrays[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2011, 57(7): 4612-4621.
- [15] GOLOMB S W, GUANG G. The status of Costas arrays[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2007, 53(11): 4260-4265.
- [16] DRAKAKIS K. On the hops present in Costas permutations[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2010, 56(3): 1271-1277.
- [17] GOLOMB S W, GONG G. *Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography, and Radar*[M]. New York: Cambridge University Press, 2005.22-80.
- [18] DRUMHELLER D M, TITLEBAUM E L. Cross-correlation properties of algebraically constructed Costas arrays[J]. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 1991, 27(1): 2-10.
- [19] DRAKAKIS K, GOW R, RICHARD S. The triple autocorrelation of an  $m$ -sequence is a Lempel Costas array[J]. *IEEE Trans Inform Theory*, 2012, 58(9): 6047-6053.
- [20] 姚建国, 黄清. Costas 序列在多用户雷达系统中的应用研究[J]. *通信学报*, 2010, 31(5): 60-72.  
YAO J G, HUANG Q. Application study of Costas arrays in multiuser radar systems[J]. *Journal on Communications*, 2010, 31(5): 60-72.
- [21] BIRKHOFF G, MAC L S. *A Survey of Modern Algebra* [M]. Beijing: Posts and Telecom Press, 2007.25-28.
- [22] FREEDMAN A, LEVANON N. Any two  $N \times N$  Costas signals must have at least one common ambiguity sidelobe if  $N > 3$ —a proof[J]. *Proc IEEE*, 1985, 73(10): 1530-1531.
- [23] MORENO O, MARIC S V. A new family of frequency-hop codes[J]. *IEEE Trans Commun*, 2000, 48(8): 1241-1244.
- [24] CHANG W, SCARBROUGH K. Costas arrays with small number of cross-coincidences[J]. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 1989, 25(1): 109-112.

## 作者简介:



姚建国(1965-),男,江苏镇江人,南京邮电大学研究员,主要研究方向为移动通信理论与关键技术。

王玉峰(1974-),男,安徽阜阳人,南京邮电大学副教授,主要研究方向为通信网络理论与技术。

衡伟(1965-),男,江苏南京人,东南大学教授、博士生导师,主要研究方向为移动通信的理论与技术。