文章编号: 1001-0920 (2014) 03-0567-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2012.1489

灰色 Verhulst 拓展模型的病态性问题

崔 杰[1,2], 刘思峰[1]
(1. 南京航空航天大学 灰色系统研究所，南京 210016；2. 淮阴工学院 经济管理学院，江苏 淮安 223001)

摘 要: 有效判定灰色模型的病态性是进行灰预测建模的关键. 为了揭示灰色 Verhulst 拓展模型建模参数在原始序列存在微小扰动下的变化规律, 以矩阵谱条件数为工具对该模型灰导数的背景值进行分类证明. 结果表明, 灰色 Verhulst 拓展模型不存在严重病态性. 采用灰色 Verhulst 拓展模型进行预测建模, 模型的解不会因系统原始数据在收集过程中存在微小误差而产生显著漂移现象.

关键词: 灰色预测理论；灰色 Verhulst 拓展模型；病态；条件数
中图分类号: N941 **文献标志码:** A

Morbid property of grey extended Verhulst model

CUI Jie[1,2], *LIU Si-feng*[1]
(1. Institution for Grey Systems Research，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016, China；2. Faculty of Economics and Management，Huaiyin Institute of Technology，Huaian 223001，China. Correspondent：CUI Jie，E-mail：nuaacui2008@163.com)

Abstract: It is essential to effectively judge the morbidity of grey model in constructing grey predictive models. Aiming to reveal the change law of modeling parameters of grey Verhulst extended model resulted from a small perturbation of primitive sequence, the spectrum condition number of matrix is taken as a tool of measuring the morbidity of this model, and the values of condition of coefficient matrix with the background value of this model in different case are analyzed. Research result shows that grey Verhulst extended model has no unusually severe morbidity. The research conclusion suggests that, in the grey prediction modeling process, while using the grey extended Verhulst model, the solution of this model will not occur significant drift for the original data series of systems exist minor errors in collecting process.

Key words: grey forecasting theory；grey derived Verhulst model；morbidity；condition number

0 引 言

病态性问题在工程控制、统计分析等数据处理中较为常见. 病态方程微小的观测误差或计算中的舍入误差均会导致计算结果产生明显误差, 危害十分严重. 寻求削弱和克服模型病态性的有效方法, 是众多数据处理领域面临的重要问题之一[1-4]. 在灰色预测控制中, 灰色模型的病态性会严重影响实际控制效果的准确性和可靠性. 对灰色模型的病态性进行正确诊断, 是削弱和克服其对模型参数估计不良影响的数理基础. 近年来, 灰色系统研究领域部分学者对多种灰色模型的病态性问题进行深入探讨, 取得了一系列丰硕成果[5-9], 对探寻有效克服灰色模型病态性的途径具有重要意义. 在众多灰色预测模型中, 灰色 Verhulst 模型是一种针对原始数据序列具有近似单峰特性的一类系统进行小样本建模的特殊灰色预测模型. 该模型已受到灰色理论研究者们的广泛关注, 众多学者对其进行了深入研究[10-14], 在一定程度上完善了该模型的理论缺陷, 增强了其建模绩效. 然而, 已有研究表明, 在一些具有非线性特征的系统 (如环境系统) 预测中, 灰色 Verhulst 模型的建模效果并不令人满

收稿日期: 2012-10-09；**修回日期:** 2012-12-18.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71301060, 71271226, 71171113, 71171116)；国家统计局科研计划项目(2011LY008)；教育部人文社会科学青年基金项目(11YJC630032, 13YJC630109)；中国博士后科学基金项目(20100481137)；江苏省高校社会科学基金项目(2013SJB6300009)；江苏省博士后科研计划项目(1101094C)；江苏省青蓝工程人才基金项目(2010)；江苏省教育科学十二五规划重点项目(B-a/2011/01/008)；淮阴工学院科研基金项目(HGB1209)；教育部人文社会科学规划基金项目(12YJA630122).
作者简介: 崔杰(1978−), 男, 副教授, 博士后, 从事灰色系统理论、预测与决策方法的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

意. 针对这一问题, 文献 [15] 在灰色 Verhulst 模型的基础上, 构建了一种灰色 Verhulst 拓展模型, 在环境系统建模预测中取得了较好的应用效果.

目前关于拓展模型的病态性研究较为少见, 而研究其病态特性是提高该模型建模精度的重要手段之一, 对发展和完善灰预测理论具有重要意义. 本文首先介绍矩阵条件数的定义; 然后对灰色 Verhulst 拓展模型的灰导数背景值大小进行分类讨论, 利用矩阵谱条件数法对该模型的病态性进行度量; 最后得到灰色 Verhulst 拓展模型出现严重病态性的一致性条件. 研究结论认为, 通常条件下灰色 Verhulst 拓展模型并不存在严重病态性.

1 病态方程组和矩阵条件数

设方程组 $Ax=b$, A 为非奇异矩阵 (下同), b 为常向量, x 为方程组的解.

定义 1[16] 若 A 或 b 的微变会引起 $Ax=b$ 的解产生显著变化, 则称其为病态方程组, A 称为病态矩阵.

定义 2[16] 设 $A\in R^{n\times m}$, $\|\cdot\|$ 为定义在 $R^{n\times m}$ 上的矩阵, 称

$$\mathrm{cond}(A)_v=\|A^{-1}\|_v\|A\|_v, v=1,2,\cdots,\infty \tag{1}$$

为 A 关于范数 $\|\cdot\|$ 的条件数.

通常情况下, 若 A 的条件数大, 则称 A 对于求解的 $Ax=b$ 是病态的, 反之是良态. 为了便于论证, 利用谱条件数 $\mathrm{cond}(A)_2$ 作为 A 的条件数, 即

$$\mathrm{cond}(A)_2=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^{\mathrm T}A)}{\lambda_{\min}(A^{\mathrm T}A)}}. \tag{2}$$

当 A 为实对称阵时, 有

$$\mathrm{cond}(A)_2=|\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|, \tag{3}$$

其中 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 依次为 A 的按最大模和最小模时的特征根.

2 灰色 Verhulst 拓展模型的病态性度量

最小二乘法是灰建模过程中常用的参数识别法, 下面采用其进行灰色 Verhulst 拓展模型的参数识别. 设 $D\in R^{m\times n}$, $y\in R^m$, D 为该灰模型的系数矩阵, 若存在向量 $x_0\in R^n$, 使得 $\|Dx-y\|_2$ 最小, 即

$$\|Dx_0-y\|_2=\min_{x\in R^n}\|Dx-y\|_2,$$

则 x_0 为 $Dx=y$ 的最小二乘解, 也为灰模型的参数估计结果. 令

$$f(x)=\|Dx-y\|^2=$$
$$(Dx-y)^{\mathrm T}(Dx-y)=$$
$$x^{\mathrm T}D^{\mathrm T}Dx-x^{\mathrm T}D^{\mathrm T}y-y^{\mathrm T}Dx+y^{\mathrm T}y,$$

由极值存在的前提条件

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=2D^{\mathrm T}Dx-2D^{\mathrm T}y=0$$

可知, $D^{\mathrm T}Dx=D^{\mathrm T}y$ 的解即为 $Dx=y$ 的最小二乘解.

通常情况下, D 为长方阵, 难以求解其条件数, $D^{\mathrm T}D$ 为实对称阵, $D^{\mathrm T}D$ 的条件数可求解. 采用 $D^{\mathrm T}D$ 的条件数测量灰模型的病态性.

定义 3[15] 设系统原始特征非负序列为

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\},$$
$$x^{(0)}(k)\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,n.$$

$X^{(0)}$ 的一次累加序列为

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\},$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\cdots,n.$$

$X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列为

$$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)\},$$
$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k+1)),$$
$$k=2,3,\cdots,n.$$

称 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)/k=b(z^{(1)}(k))^2$ 为灰色 Verhulst 拓展模型.

定理 1[9] 若 $\hat a=[a,b]^{\mathrm T}$ 为灰色 Verhulst 拓展模型的参数向量, 且

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2)/2 & (z^{(1)}(2))^2\\-z^{(1)}(3)/3 & (z^{(1)}(3))^2\\\vdots & \vdots\\-z^{(1)}(n)/n & (z^{(1)}(n))^2\end{bmatrix},$$

则 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)/k=b(z^{(1)}(k))^2$ 的最小二乘估计参数向量为 $\hat a=(B^{\mathrm T}B)^{-1}B^{\mathrm T}Y$, 即 $(B^{\mathrm T}B)\hat a=B^{\mathrm T}Y$, 系数矩阵为

$$B^{\mathrm T}B=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2 & \displaystyle-\sum_{k=2}^{n}\frac{(z^{(1)}(k))^3}{k}\\ \displaystyle-\sum_{k=2}^{n}\frac{(z^{(1)}(k))^3}{k} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^4\end{bmatrix}.$$

$B^{\mathrm T}B$ 的伴随矩阵为

$$(B^{\mathrm T}B)^*=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^4 & \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(z^{(1)}(k))^3}{k}\\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(z^{(1)}(k))^3}{k} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2\end{bmatrix}.$$

下面论证 $B^{\mathrm T}B$ 的谱条件数. 根据定义 2, 有

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2 = \|(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}\|_2\|(B^{\mathrm{T}}B)\|_2 \to$$
$$\to= \|(B^{\mathrm{T}}B)\|_2\left\|\frac{(B^{\mathrm{T}}B)^*}{|B^{\mathrm{T}}B|}\right\|_2 \to$$
$$\to= \frac{1}{|B^{\mathrm{T}}B|}\|(B^{\mathrm{T}}B)\|_2\|(B^{\mathrm{T}}B)^*\|_2 = \frac{|\lambda_1||\lambda_1^*|}{|B^{\mathrm{T}}B|}.$$

定理 2[17]　设 $A \in R_{m\times n}$, 则 A 的任一特征根 λ 满足 $\lambda \leqslant n\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$. 根据定理 2 有

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2 = \frac{|\lambda_1||\lambda_1^*|}{|B^{\mathrm{T}}B|} \leqslant \frac{4\max|a_{ij}|\max|a_{ij}^*|}{|B^{\mathrm{T}}B|}.$$

定理 3[17]　若 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 为实序列, 则

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^2 \times \Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)^2,$$

仅当 a 和 b 线性相关时取等号.

定理 4　设

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\},$$
$$x^{(0)}(k) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \cdots, n,$$

$x^{(1)}(k)$ 和 $z^{(1)}(k)$ 如定义 3 所示, 只要 $z^{(1)}(k) \neq m/k$ $(k = 2, 3, \cdots, n$, m 为常数且 $m > 0$, 下同) 成立, 则灰色 Verhulst 拓展模型不会呈现严重病态性.

证明　下面分类进行论证:

1) 若对于任意 k 均有 $z^{(1)}(k) > 1$, 则 $\sum\limits_{k=2}^n(z^{(1)}(k))^4$ 为 $B^{\mathrm{T}}B$ 与 $(B^{\mathrm{T}}B)^*$ 中模最大的元素, 即

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2 \leqslant \frac{4\max|a_{ij}|\max|a_{ij}^*|}{|B^{\mathrm{T}}B|} = \frac{4\Big(\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4\sum\limits_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2 - \Big(\sum\limits_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2} =$$
$$\frac{4\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4}{\sum\limits_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2 - \frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4}}.$$

由定理 3 可知

$$\Big[\sum_{k=2}^n(z^{(1)}(k))^2\Big(\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)\Big]^2 \leqslant \sum_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4\sum_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2.$$

仅当

$$\Big(\frac{z^{(1)}(2)}{2}, \frac{z^{(1)}(3)}{3}, \cdots, \frac{z^{(1)}(k)}{k}, \cdots, \frac{z^{(1)}(n)}{n}\Big)$$

与 $([z^{(1)}(2)]^2, \cdots, [z^{(1)}(n)]^2)$ 线性相关时, 等式成立. 若等式成立, 则有 $z^{(1)}(k) = m/k$, 即 $z^{(1)}(k) < z^{(1)}(k-1)$, 这与 $z^{(1)}(k)$ 的单调递增性相矛盾. 因此有 $z^{(1)}(k) \neq m/k$. 通常而言, 存在

$$\Big[\sum_{k=2}^n(z^{(1)}(k))^2\Big(\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)\Big]^2 < \sum_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4\sum_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2,$$

即

$$\sum_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2 > \frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4}.$$

当

$$\sum_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2 - \frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4} \geqslant 1$$

时, $\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2$ 最大取值为 $4\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4$, 由于灰色系统理论研究的系统具有少数据、贫信息特性, $4\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4$ 应为一个较小的常数, 灰色 Verhulst 拓展模型不存在严重病态性. 当

$$0 < \sum_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2 - \frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4} < 1$$

时, $\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2$ 的值取决于

$$\Big(\sum_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2\Big/\sum_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4,$$

接近 $\sum\limits_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2$ 的程度. 当

$$\frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^n\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^n[z^{(1)}(k)]^4} \to \sum_{k=2}^n\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2$$

时, 同理可得 $z^{(1)}(k) < z^{(1)}(k-1)$, 这与 $z^{(1)}(k)$ 的单调递增性相矛盾. 因此有 $z^{(1)}(k) \neq m/k$, 灰色 Verhulst 拓展模型不会呈现严重病态性.

2) 若 $z^{(1)}(k) = 1(k = 2, 3, \cdots, n)$, 则 $X^{(0)}$ 的第 1 项为 1, 其他所有项均为 0. 显然, 序列 $X^{(0)}$ 已呈现规律性, 采用灰色 Verhulst 拓展模型进行建模毫无意义.

3) 当 $1/k < z^{(1)}(k) < 1$ 时, $B^{\mathrm{T}}B$ 与 $(B^{\mathrm{T}}B)^*$ 中模最大的元素也为 $\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4$, 如分类 1) 所证, 灰色 Verhulst 拓展模型无病态性.

4) 若 $0 < z^{(1)}(k) < 1/k$, 则 $\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2$ 为矩阵 $B^{\mathrm{T}}B$ 与 $(B^{\mathrm{T}}B)^*$ 中模最大的元素, 即

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2 \leqslant \frac{4\max|a_{ij}|\max|a^*_{ij}|}{|B^{\mathrm{T}}B|} = \frac{4\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4\sum\limits_{k=2}^{n}\Big[\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2-\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2} = \frac{4\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4-\dfrac{\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2}}.$$

当

$$\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4-\frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2} \geqslant 1$$

时, $\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2$ 的最大值为 $4\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2$. 同理, 灰色 Verhulst 拓展模型不存在病态性. 当

$$0 < \sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4-\frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2} < 1$$

时, $\mathrm{cond}(B^{\mathrm{T}}B)_2$ 的值取决于

$$\Big(\sum_{k=2}^{n}\frac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2,$$

接近于 $\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4$ 的程度. 当

$$\frac{\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{[z^{(1)}(k)]^3}{k}\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)^2} \to \sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4$$

时, 需有 $z^{(1)}(k)=m/k$, 即 $z^{(1)}(k) < z^{(1)}(k-1)$. 这与 $z^{(1)}(k)$ 的单调递增性相矛盾, 故 $z^{(1)}(k)\neq m/k$, 因此灰色 Verhulst 拓展模型无严重病态性.

由上述结果可知, 灰色 Verhulst 拓展模型出现病态性的条件为

$$\Big[\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2\Big(\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big)\Big]^2 \to \sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^4\sum_{k=2}^{n}\Big[\frac{z^{(1)}(k)}{k}\Big]^2.$$

即存在 $z^{(1)}(k)=m/k$, 也即 $z^{(1)}(k)<z^{(1)}(k-1)$, 这与 $z^{(1)}(k)$ 的单调递增性相矛盾, 故 $z^{(1)}(k)\neq m/k$, 该模型出现严重病态性的条件不成立. 因此, 利用灰色 Verhulst 拓展模型进行建模预测不会产生严重病态性问题. □

3 结 论

以矩阵谱条件数为研究工具, 深入分析了灰色 Verhulst 拓展模型的灰导数背景值在不同取值时的病态性问题. 研究结果表明, 通常情况下利用灰色 Verhulst 模拓展模型建模不存在严重病态性. 因此, 采用灰色 Verhulst 拓展模型进行预测建模, 其解不会因原始数据在收集过程中存在微小误差而产生显著漂移现象.

参考文献(References)

[1] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 30-36.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. Grey technology basis and its applications[M]. Beijing: Chinese Science Press, 2005: 30-36.)

[2] 张岐山. 提高灰色 GM(1,1) 模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学, 2007, 15(5): 126-129.
(Zhang Q S. Improving the precision of GM(1,1) model by using particle swarm optimization[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(5): 126-129.)

[3] 崔杰. 灰色不确定系统建模的理论与方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2010: 8-10.
(Cui J. Study on the theories and methods of modeling for grey uncertain systems[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010: 8-10.)

[4] 王正新. 含可变参数的缓冲算子与 GM(1,1) 幂模型研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2010: 5-6.
(Wang Z X. Research on the buffer operators with parameters and GM(1,1) power model[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010: 5-6.)

[5] 曾祥艳, 肖新平. 累积法 GM(2,1) 模型及其病态性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(4): 542-544.
(Zeng X Y, Xiao X P. Research on morbidity problem of accumulating method GM(2,1) model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(4): 542-544.)

[6] 党耀国, 王正新, 刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(1): 156-160.
(Dang Y G, Wang Z X, Liu S F. Study on morbidity problem in grey model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2008, 28(1): 141-144.)

[7] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 基于矩阵条件数的 NGM(1,1,k) 模型病态性研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 1050-1054.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Study on morbidity of NGM(1,1,k) model based on conditions of matrix[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 1050-1054.)

[8] 吴正鹏, 李波, 张友萍, 等. GM(1,1) 模型的病态问题研究[J]. 中国传媒大学学报: 自然科学版, 2011, 18(4): 31-34.
(Wu Z P, Li B, Zhang Y P, et al. Study on the morbidity problem in grey model[J]. J of Communication University of China: Science and Technology, 2011, 18(4): 31-34.)

[9] 郑照宁, 武玉英. GM 模型的病态性问题[J]. 中国管理科学, 2001, 9(5): 38-44.
(Zheng Z N, Wu Y Y. The morbidity problem in grey models[J]. The Chinese Management Science, 2001, 9(5): 38-44.)

[10] Liu S F, Lin Y. Grey iinformation theory and practical applications[M]. London: Springer-Verlag, 2006: 7-12.

[11] 何文章, 吴爱弟. 估计 Verhulst 模型中参数的线性规划方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 20(8): 141-144.
(He W Z, Wu A D. Estimation of Verhulst model parameter based on linear programming[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2008, 20(8): 141-144.)

[12] 刘威, 徐伟. 灰色 Verhulst 模型参数估计的一种新算法[J]. 计算机仿真, 2008, 22(11): 119-123.
(Liu W, Xu W. A new algorithm for estimating parameters of grey Verhulst model[J]. Computer Simulation, 2008, 22(11): 119-123.)

[13] 戴文战, 熊伟, 杨爱萍. 灰色 Verhulst 模型的改进及其应用[J]. 化工学报, 2010, 61(8): 2097-2100.
(Dai W Z, Xiong W, Yang A P. Improved grey Verhulst model and its application[J]. CIESC J, 2010, 61(8): 2097-2100.)

[14] 崔立志, 刘思峰. 灰色离散 Verhulst 模型[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(3): 590-593.
(Cui L Z, Liu S F. Grey discrete Verhulst model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(3): 590-593.)

[15] 向跃霖. Verhulst 灰色派生模型在万元产值废水量预测中的应用[J]. 江苏环境科技, 1997, 35(1): 15-17.
(Xiang Y L. Application of grey Verhulst derived model to prediction of o wastewater quantity which output value in ten thousand yuan[J]. Science and Technology of Jiangsu Environment, 1997, 35(1): 15-17.)

[16] 任玉杰. 数值分析及其 Matlab 实现[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 102-108.
(Ren Y J. Numerical analysis and its implement in Matlab[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007: 102-108.)

[17] Mitrinovic D S. The solution to inequation[M]. Beijing: Science Press, 1987: 23-27.)

(责任编辑: 郑晓蕾)