

不确定分数阶时滞系统的鲁棒稳定性判定准则

卫一恒, 朱敏, 彭程, 王永

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027)

摘要: 基于退化分析方法提出一种判定准则, 用于分析不确定分数阶时滞系统的稳定性. 介绍一种分数阶积分算子的有理逼近方法, 在此基础上采用整数阶系统逼近分数阶系统, 从而将难以判定的分数阶系统稳定性问题转化为由逼近偏差作为不确定项的整数阶系统稳定性问题进行处理. 利用积分不等式法研究逼近系统稳定性, 得到LMI形式的稳定性判据. 仿真结果表明, 所提出方法能够有效分析这类系统的稳定性.

关键词: 分数阶系统; 模型逼近; 时变时滞; 鲁棒稳定性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Robust stability criteria for uncertain fractional order systems with time delay

WEI Yi-heng, ZHU Min, PENG Cheng, WANG Yong

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China. Correspondent: WANG Yong, E-mail: yongwang@ustc.edu.cn)

Abstract: Based on model approximation, the problem of stability analysis for uncertain fractional order systems with time-varying delay is proposed. Firstly, a rational approximation method is introduced for fractional order systems. Based on the above method, the fractional order systems are transformed into the integer order systems whose uncertainties are approximation error. Afterwards, integral inequality approach is used to analyze the stability of the approximation system, obtaining a robust stability criteria denoted by LMI. Theoretic proof and numerical examples are provided to illustrate the effectiveness and the availability of the proposed method.

Key words: fractional order system; model approximation; time-varying delay; robust stability

0 引言

近年来, 随着分数阶模型被证明能够更精确地描述一些复杂系统(如粘弹性材料、电子电路和热传导等), 分数阶微积分理论便逐渐渗透到了更多的研究领域^[1-3]. 目前, 它与控制理论的结合引起了人们对分数阶系统的研究热情, 相关研究加速发展, 如系统建模^[4-5]、稳定性分析^[6-7]和控制器设计^[8]等. 然而, 在实际的自然和工程系统中, 时滞现象普遍存在, 往往会影响系统的性能, 甚至导致系统不稳定^[9], 因此对于分数阶时滞系统的研究得到了控制界的广泛关注.

Zhang^[10]证明了线性分数阶时滞系统解的存在惟一性, 并给出了一类特殊系统有限时间稳定的充分性条件. Shi等^[11]研究了一类具有有理阶次的分数阶时滞系统BIBO稳定的条件, 并给出了稳定性判据. 文

献[12-13]指出解析算法变换公式复杂, 计算量大, 且都针对特殊形式的系统, 进一步介绍了线性分数阶时滞微分方程稳定性分析的数值方法, 并讨论了渐近稳定条件. 作为分数阶微积分算子的数值逼近方法, Oustaloup滤波器具有较好的逼近性能^[14], 但在逼近频带端点处的逼近效果不理想. 文献[15-16]对滤波器进行了改进和优化, Trigeassou等^[17]首次研究了利用Oustaloup滤波器逼近分数阶系统. Wei等^[18]提出了一种分段逼近算法, 并证明了该算法能实现整数阶系统对分数阶系统的任意精度逼近, 且两系统具有相同的能控能观性. 在数值逼近的基础上, 分数阶时滞系统稳定性的判定可以退化为整数阶时滞系统进行处理.

目前, 针对分数阶时滞系统的研究还不深入, 主

收稿日期: 2012-11-07; 修回日期: 2013-01-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974103, 61004017); 国家863计划项目(2011AA7034056).

作者简介: 卫一恒(1987-), 男, 博士生, 从事分数阶系统分析与控制的研究; 王永(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事分数阶系统、导航制导与控制等研究.

要集中在同元次时不变领域,判定方法复杂,难以直接推广.本文综合考虑上述研究成果,基于文献[18-19]的思想提出了基于模型逼近的不确定分数阶时滞系统鲁棒稳定性判定方法,所得判据为LMI形式,判定简单有效.

1 基础知识与问题描述

1.1 分数阶微积分^[1]

函数 $f(t)$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 积分定义为

$$\mathcal{I}_\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中 gamma 函数 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$.

容易看出, $\mathcal{I}_\alpha(f(t))$ 实际上是函数 $f(t)$ 与脉冲函数 $h_\alpha(t) = t^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)$ 的卷积,因此分数阶积分算子 $\mathcal{I}_\alpha(s)$ 即为 $h_\alpha(t)$ 的 Laplace 变换,有

$$\mathcal{I}_\alpha(s) = s^{-\alpha}. \quad (2)$$

分数阶微分是分数阶积分的对偶运算,假设 $y(t)$ 是 $v(t)$ 的 α 阶积分,则有

$$y(t) = \mathcal{I}_\alpha(v(t)), v(t) = \mathcal{D}^\alpha(y(t)). \quad (3)$$

1.2 有理逼近方法^[18]

已经证明^[18],当零极点和静态增益选择如式(4)~(7)时,正则有理传递函数 $\hat{\mathcal{I}}_\alpha(s)$ 能够较好地逼近 $\mathcal{I}_\alpha(s)$,即

$$\bar{\omega}_i = \lambda^{i-1} \gamma^{-0.5} \omega_i, i \in K. \quad (4)$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \lambda^{-\alpha} \gamma^{-0.5} \omega_i, & 0 < \alpha \leq 0.6; \\ 0, & 0.6 < \alpha < 1. \end{cases} \quad (5)$$

$$\omega_i = \lambda^{i-\alpha} \gamma^{-0.5} \omega_i, i \in K. \quad (6)$$

$$G_\alpha = \arg \min_{G_\alpha} |\mathcal{I}_\alpha(j\sqrt{\omega_l \omega_h}) - \hat{\mathcal{I}}_\alpha(j\sqrt{\omega_l \omega_h})|. \quad (7)$$

其中

$$\hat{\mathcal{I}}_\alpha(s) = \frac{G_\alpha}{s+\omega_0} \prod_{i=1}^k \frac{s+\bar{\omega}_i}{s+\omega_i},$$

$$K \triangleq \{1, 2, \dots, k\}, \lambda = (\gamma \omega_h / \omega_l)^{\frac{1}{k-\alpha}}.$$

根据叙述需要,令 $\hat{\mathcal{I}}_\alpha(s) = \sum_{i=0}^k \frac{c_i}{s+\omega_i}$,由 $\hat{\mathcal{I}}_\alpha(s)$ 的两种形式等价可得

$$\begin{cases} c_0 = G_\alpha \prod_{j=1}^k \frac{\omega_0 - \bar{\omega}_j}{\omega_0 - \omega_j}, \\ c_i = G_\alpha \frac{(\omega_i - \bar{\omega}_i)}{(\omega_i - \omega_0)} \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{\omega_i - \bar{\omega}_j}{\omega_i - \omega_j}, i \in K. \end{cases} \quad (8)$$

1.3 问题描述

考虑如下具有时变时滞的不确定分数阶系统:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha x(t) &= (A_\alpha + \Delta A_\alpha)x(t) + \\ & (B_\alpha + \Delta B_\alpha)x(t - \tau(t)), t \geq 0, \end{aligned}$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0). \quad (9)$$

其中: $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$ 为系统阶次; $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量; 常数矩阵 $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbf{R}^{n \times n}$; 滞后时间 $\tau(t)$ 满足 $0 \leq \tau(t) \leq h, \dot{\tau}(t) \leq \mu$; 不确定项 $\Delta A_\alpha, \Delta B_\alpha$ 满足 $[\Delta A_\alpha \ \Delta B_\alpha] = HF(t)[E_A \ E_B]$, H, E_A 和 E_B 为已知的适当维数矩阵, $F(t)$ 为未知函数矩阵,且 $F^T(t)F(t) \leq I$.

为了研究系统(9)的鲁棒稳定性,首先介绍以下几个引理.

引理 1^[19] 对于任意正定矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 标量 $c_{\alpha_j, i}$, 向量函数 $\omega: [0, \gamma] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 总有下式成立:

$$\int_0^\gamma \omega^T(s) ds M \int_0^\gamma \omega(s) ds \leq \gamma \int_0^\gamma \omega^T(s) M \omega(s) ds.$$

引理 2^[20] 对于任意函数 $W_1(t), W_2(t) \in \mathbf{R}$, 若 $W_1(t) \geq 0, W_2(t) \geq 0, 0 \leq d_m \leq d(t) \leq d_M$, 则有

$$\frac{W_1(t)}{d(t) - d_m} + \frac{W_2(t)}{d_M - d(t)} \geq \frac{\min(A, B)}{d_M - d_m}.$$

其中: $A = 3W_1(t) + W_2(t), B = W_1(t) + 3W_2(t)$.

引理 3^[21] 对于合适维数的对称矩阵 Ω 和矩阵 H, E, F , 满足

$$\Omega + HFE + (HFE)^T < 0$$

成立的充分必要条件是存在一个常量 $\lambda > 0$, 使得

$$\Omega + \lambda HH^T + \lambda^{-1} E^T E < 0.$$

2 主要结论

2.1 模型逼近

由文献[17]可知,分数阶系统(9)的等价频率分布模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + (A_\alpha + \Delta A_\alpha)x(t) + \\ (B_\alpha + \Delta B_\alpha)x(t - \tau(t)), \\ x(t) = \int_0^\infty \eta_\alpha(\omega) z(\omega, t) d\omega. \end{cases} \quad (10)$$

其中: $z(\omega, t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统(14)的状态; $\eta_\alpha(\omega)$ 为相应系数, $\eta_\alpha(\omega) = \text{diag}(\eta_{\alpha_1}(\omega), \eta_{\alpha_2}(\omega), \dots, \eta_{\alpha_n}(\omega)), i \in N, \eta_{\alpha_i}(\omega) = \omega^{-\alpha_i} \sin(\alpha_i \pi) / \pi$.

模型(10)是原系统的等价精确模型,通过离散化连续频带,可以得到有限维逼近模型

$$\begin{aligned} \frac{dz(\omega_i, t)}{dt} &= -\omega_i z(\omega_i, t) + (A_\alpha + \Delta A_\alpha)x(t) + \\ & (B_\alpha + \Delta B_\alpha)x(t - \tau(t)), i \in K \cup \{0\}, \\ \hat{x}(t) &= \sum_{i=0}^k C_i z(\omega_i, t). \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}(t); C_i = \text{diag}(c_{\alpha_1, i}, c_{\alpha_2, i}, \dots, c_{\alpha_n, i}), c_{\alpha_j, i}$ 为 $\mathcal{I}_{\alpha_j}(s)$ 的离散频率分布模型在 ω_i 处的系数 $c_i, i \in K, j \in N \triangleq \{1, 2, \dots, n\}$.

令 $z(t) = [z^T(\omega_0, t) \ z^T(\omega_1, t) \ \dots \ z^T(\omega_k, t)]^T$ 为新的状态变量,系统矩阵 $A = M_A + M_B A_\alpha M_C, B =$

$M_B B_\alpha M_C$. 其中: $M_A = \text{diag}(A_0, A_1, \dots, A_k)$, $A_i = \text{diag}(-\omega_{\alpha_1, i}, -\omega_{\alpha_2, i}, \dots, -\omega_{\alpha_n, i})$, $\omega_{\alpha_j, i}$ 为 $\mathcal{I}_{\alpha_j}(s)$ 的离散频率分布模型第 i 个极点 ($i \in K \cup \{0\}$, $j \in N$); $M_B = [B_0 \ B_1 \ \dots \ B_k]^T$, $B_i (i \in K \cup \{0\})$ 为 n 阶单位矩阵; $M_C = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_k]$, $C_i (i \in K \cup \{0\})$ 与式(11)中定义一致. 从而有

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A + M_B \Delta A_\alpha M_C)z(t) + \\ \quad (B + M_B \Delta B_\alpha M_C)z(t - \tau(t)), \\ \hat{x}(t) = M_C z(t). \end{cases} \quad (12)$$

文献[18]已证明, 若加入 ΔM_A 和 ΔM_B 补偿逼近偏差, 则所加入的补偿项范数有界, 即存在正常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 使得

$$\Delta M_A^T \Delta M_A \leq \varepsilon_1 I, \Delta M_B^T \Delta M_B \leq \varepsilon_2 I. \quad (13)$$

定义 $\Delta A = \Delta M_A + M_B \Delta A_\alpha M_C$, $\Delta B = \Delta M_B + M_B \Delta B_\alpha M_C$, 则式(13)可以改写为

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \\ (A + \Delta A)z(t) + (B + \Delta B)z(t - \tau(t)), \\ x(t) = M_C z(t). \end{cases} \quad (14)$$

注1 在一定条件下, 整数阶系统(12)能以任意精度逼近分数阶系统(9), 且两个系统具有相同的能控性和能观性. 如果加入偏差补偿项之后得到的系统(14)对于所有允许的不确定鲁棒稳定, 则原分数阶时滞系统(9)鲁棒稳定, 这也为分数阶系统稳定性判定提供了一个充分条件.

注2 模型逼近的优点在于利用整数阶系统代替分数阶系统, 这样便避免了对分数阶系统设计控制器时难以判断闭环系统稳定性的问题. 同样条件下, 逼近系统维数越大, 逼近精度越高, 补偿项上界越小, 稳定性判据保守性越小, 可以根据可解性和计算复杂性要求选择合适的维数.

2.2 稳定性分析

定理1 若存在正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n(k+1) \times n(k+1)}$, 正数 λ 使得

$$\begin{bmatrix} \text{sym}(PM_A + PM_B A_\alpha M_C) + \lambda \varepsilon I & P \\ * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

则系统 $\mathcal{D}^\alpha x(t) = A_\alpha x(t)$ 渐近稳定, 其中 ε 为逼近偏差项上界, $\Delta M_A^T \Delta M_A \leq \varepsilon I$.

注3 为了书写方便, 令 $\text{sym}(M)$ 表示矩阵 M 的函数, $*$ 表示所在矩阵为对称矩阵, 即

$$\text{sym}(M) = M + M^T, \begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}.$$

证明 系统 $\mathcal{D}^\alpha x(t) = A_\alpha x(t)$ 的有限维整数阶逼近模型为

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (M_A + \Delta M_A + M_B A_\alpha M_C)z(t), \\ x(t) = M_C z(t). \end{cases} \quad (16)$$

其中: M_A, M_B 和 M_C 定义与前文一致; ΔM_A 为逼近偏差补偿项, 满足 $\Delta M_A^T \Delta M_A \leq \varepsilon I$.

定义 Lyapunov 函数 $V(t) = z^T(t)Pz(t)$ (P 正定), 由 Schur 补引理和引理3可知, 对于任意 $z(t) \neq 0$ 满足 $\dot{V}(t) < 0$ 的充分必要条件是式(15)成立. 而系统(16)鲁棒稳定蕴含系统 $\mathcal{D}^\alpha x(t) = A_\alpha x(t)$ 渐近稳定, 从而定理得证. \square

注4 该定理为分数阶线性自治系统的稳定性判断提供了一个充分条件, 由于判定准则为 LMI 形式, 计算简便, 扩展了以往有理阶次分数阶系统稳定性判定方法, 同时也为分数阶系统控制器设计提供了一个有效的方法.

定理2 对于给定的标量 $h > 0$ 和 μ , 若存在正定矩阵 $P, Q, R, S, T \in \mathbf{R}^{n(k+1) \times n(k+1)}$, 常数 $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, 满足 $\Sigma < 0$ 和 $\Xi < 0$, 其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & S/h & \Sigma_{14} & \Sigma_{15} & P & P & \Sigma_{18} & \Sigma_{19} \\ & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & \Sigma_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \Sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -S/h & 0 & S & S & \Sigma_{48} & \Sigma_{49} \\ & & & & -T/h & T & T & \Sigma_{58} & \Sigma_{59} \\ & & & & & \Sigma_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \Sigma_{77} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \Sigma_{88} & 0 \\ * & & & & & & & & \Sigma_{99} \end{bmatrix},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & S/h & \Xi_{14} & \Xi_{15} & P & P & \Xi_{18} & \Xi_{19} \\ & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -S/h & 0 & S & S & \Xi_{48} & \Xi_{49} \\ & & & & -T/h & T & T & \Xi_{58} & \Xi_{59} \\ & & & & & \Xi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \Xi_{77} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \Xi_{88} & 0 \\ * & & & & & & & & \Xi_{99} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \text{sym}(PM_A + PM_B A_\alpha M_C) + Q + R - S/h - \\ &\quad T/h + \lambda_1 \varepsilon_1 I + \lambda_3 M_C^T E_A^T E_A M_C, \\ \Xi_{11} &= \text{sym}(PM_A + PM_B A_\alpha M_C) + Q + R - \\ &\quad S/h - 3T/h + \lambda_1 \varepsilon_1 I + \lambda_3 M_C^T E_A^T E_A M_C, \\ \Sigma_{12} &= PM_B B_\alpha M_C + T/h, \quad \Xi_{12} = PM_B B_\alpha M_C + 3T/h, \\ \Sigma_{14} &= \Xi_{14} = M_A^T S + M_C^T A_\alpha^T M_B^T S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{15} &= \Xi_{15} = M_A^T T + M_C^T A_\alpha^T M_B^T T, \\ \Sigma_{18} &= \Xi_{18} = \Sigma_{19} = \Xi_{19} = P M_B H, \\ \Sigma_{22} &= \Xi_{22} = -(1 - \mu)Q - \frac{4}{h}T + \lambda_2 \varepsilon_2 I + \\ &\quad \lambda_4 M_C^T E_B^T E_B M_C, \\ \Sigma_{23} &= \frac{3}{h}T, \Xi_{23} = \frac{1}{h}T, \Sigma_{24} = \Xi_{24} = M_C^T B_\alpha^T M_B^T S, \\ \Sigma_{25} &= \Xi_{25} = M_C^T B_\alpha^T M_B^T T, \\ \Sigma_{33} &= -R - \frac{1}{h}S - \frac{3}{h}T, \Xi_{33} = -R - \frac{1}{h}S - \frac{1}{h}T, \\ \Sigma_{48} &= \Xi_{48} = \Sigma_{49} = \Xi_{49} = S M_B H, \\ \Sigma_{58} &= \Xi_{58} = \Sigma_{59} = \Xi_{59} = T M_B H, \\ \Sigma_{66} &= \Xi_{66} = -\lambda_1 I, \Sigma_{77} = \Xi_{77} = -\lambda_2 I, \\ \Sigma_{88} &= \Xi_{88} = -\lambda_3 I, \Sigma_{99} = \Xi_{99} = -\lambda_4 I. \end{aligned}$$

则对于所有允许的不确定性, 系统(9)鲁棒稳定.

证明 构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下:

$$\begin{aligned} V(t) &= z^T(t)Pz(t) + \int_{t-\tau(t)}^t z^T(s)Qz(s)ds + \\ &\quad \int_{t-h}^t z^T(s)Rz(s)ds + \\ &\quad \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{z}^T(s)(S+T)\dot{z}(s)dsd\theta, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 P, Q, R, S, T 为适当维数的待定正定矩阵.

计算 $V(t)$ 沿着系统(13)状态轨迹的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2z^T(t)P\dot{z}(t) + z^T(t)Qz(t) - \\ &\quad [1 - \dot{\tau}(t)]z^T(t - \tau(t))Qz(t - \tau(t)) + \\ &\quad z^T(t)Rz(t) - z^T(t - h)Rz(t - h) + \\ &\quad h\dot{z}^T(t)(S+T)\dot{z}(t) - \\ &\quad \int_{t-h}^t \dot{z}^T(s)(S+T)\dot{z}(s)ds. \end{aligned} \quad (18)$$

为了充分利用时滞信息, 降低保守性, 将积分区间 $[t - h, t]$ 拆分为 $[t - h, t - \tau(t)]$ 和 $[t - \tau(t), t]$ 两段, 定义

$$\xi(t) \triangleq [z^T(t) \quad z^T(t - \tau(t)) \quad z^T(t - h)]^T,$$

并应用引理 1 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq 2z^T(t)P\dot{z}(t) + z^T(t)Qz(t) - \\ &\quad (1 - \mu)z^T(t - \tau(t))Qz(t - \tau(t)) + \\ &\quad z^T(t)Rz(t) - z^T(t - h)Rz(t - h) + \\ &\quad h\dot{z}^T(t)(S+T)\dot{z}(t) - \int_{t-h}^t \dot{z}^T(s)S\dot{z}(s)ds - \\ &\quad \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{z}^T(s)T\dot{z}(s)ds - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{z}^T(s)T\dot{z}(s)ds \leq \\ &\quad 2z^T(t)P\dot{z}(t) + z^T(t)Qz(t) - \\ &\quad (1 - \mu)z^T(t - \tau(t))Qz(t - \tau(t)) + \\ &\quad z^T(t)Rz(t) - z^T(t - h)Rz(t - h) + \\ &\quad h\dot{z}^T(t)(S+T)\dot{z}(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_{t-h}^t \dot{z}^T(s)dsS \int_{t-h}^t \dot{z}(s)ds - \\ &\frac{1}{h - \tau(t)} \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{z}^T(s)dsT \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{z}(s)ds - \\ &\frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{z}^T(s)dsT \int_{t-\tau(t)}^t \dot{z}(s)ds = \\ &\xi^T(t)[\Phi + h\Omega^T(S+T)\Omega - W]\xi(t). \end{aligned}$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & P(B + \Delta B) & S/h \\ & -(1 - \mu)Q & 0 \\ * & & -R - S/h \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{11} = \text{sym}(PA + P\Delta A) + Q + R - S/h,$$

$$\Omega = [A + \Delta A \quad B + \Delta B \quad 0],$$

$$W = \frac{1}{h - \tau(t)}W_1 + \frac{1}{\tau(t)}W_2,$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & T & -T \\ * & & T \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} T & -T & 0 \\ & T & 0 \\ * & & 0 \end{bmatrix}.$$

要保证对于任意 $\xi(t) \neq 0$, 总有 $\dot{V}(t) < 0$, 则需要

$$\Phi + h\Omega^T(S+T)\Omega - W < 0. \quad (19)$$

由引理 2 可得, W 满足

$$W \geq \min(3W_1 + W_2, W_1 + 3W_2)/h. \quad (20)$$

从而需要以下 LMI 成立:

$$\begin{cases} \Phi + h\Omega^T(S+T)\Omega - (3W_1 + W_2)/h < 0, \\ \Phi + h\Omega^T(S+T)\Omega - (W_1 + 3W_2)/h < 0. \end{cases} \quad (21)$$

根据 Schur 补引理和引理 3, 分离不确定项, 可得到式(21)对于所有允许的不确定均成立的充要条件是存在常数 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 使得

$$\begin{aligned} &\Psi_1 + \lambda_1^{-1}a_1^T a_1 + \lambda_1 b_1^T b_1 + \lambda_2^{-1}a_1^T a_1 + \lambda_2 b_2^T b_2 + \\ &\lambda_3^{-1}a_2^T a_2 + \lambda_3 b_3^T b_3 + \lambda_4^{-1}a_2^T a_2 + \lambda_4 b_4^T b_4 < 0, \\ &\Psi_2 + \lambda_1^{-1}a_1^T a_1 + \lambda_1 b_1^T b_1 + \lambda_2^{-1}a_1^T a_1 + \lambda_2 b_2^T b_2 + \\ &\lambda_3^{-1}a_2^T a_2 + \lambda_3 b_3^T b_3 + \lambda_4^{-1}a_2^T a_2 + \lambda_4 b_4^T b_4 < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \begin{bmatrix} \Psi_{111} & \Psi_{112} & S/h & A^T S & A^T T \\ & \Psi_{122} & 0 & B^T S & B^T T \\ & & -R - \frac{1}{h}S - \frac{3}{h}T & 0 & 0 \\ * & & & -S/h & 0 \\ & & & & -T/h \end{bmatrix}, \\ \Psi_2 &= \begin{bmatrix} \Psi_{211} & \Psi_{212} & S/h & A^T S & A^T T \\ & \Psi_{222} & 0 & B^T S & B^T T \\ & & -R - \frac{1}{h}S - \frac{1}{h}T & 0 & 0 \\ * & & & -S/h & 0 \\ & & & & -T/h \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{111} &= \text{sym}(PA) + Q + R - S/h - T/h, \\ \Psi_{112} &= PB + T/h, \Psi_{122} = -(1 - \mu)Q - 4T/h, \\ \Psi_{211} &= \text{sym}(PA) + Q + R - S/h - 3T/h, \\ \Psi_{212} &= PB + 3T/h, \Psi_{222} = -(1 - \mu)Q - 4T/h, \\ a_1 &= [P \ 0 \ 0 \ S \ T], a_2 = H^T M_B^T [P \ 0 \ 0 \ S \ T], \\ b_1 &= [\sqrt{\varepsilon_1} I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], b_2 = [0 \ \sqrt{\varepsilon_2} I \ 0 \ 0 \ 0], \\ b_3 &= [E_A M_C \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], b_4 = [0 \ E_B M_C \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

带入原分数阶系统参数, 由 Schur 补引理可以得到定理 2 中的条件 $\Sigma < 0$ 和 $\varepsilon < 0$, 从而对于给定的 h, μ 和所有允许的不确定, 均有 $\dot{V}(t) < 0$, 即系统 (14) 鲁棒稳定, 从而系统 (9) 鲁棒稳定. \square

注 5 范数有界的不确定项的引入解决了逼近模型与原分数阶模型有偏差的问题, 使得对于逼近模型稳定性的判断蕴含原分数阶模型的稳定性. 由于不确定项的形式难以确定, 根据算子逼近偏差给出其范数上界, 这样处理牺牲了保守性得到了充分条件. 以往方法多为判断超越方程根的范围, 本文所得判据为 LMI 形式, 用凸优化的方法求解, 简单方便, 大大提高了实用性.

3 数值仿真

3.1 线性定常系统稳定性研究

例 1 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\sqrt{0.6}} x_1(t) = -x_2(t), \\ \mathcal{D}^{\sqrt{0.4}} x_2(t) = \rho x_1(t) + 2x_2(t). \end{cases} \quad (23)$$

取模型变换参数 $\gamma = 10, \omega_l = 10^{-3} \text{ Hz}, \omega_h = 10^3 \text{ Hz}, k=6$, 后文仿真也采用此参数, 不再赘述. 补偿项上界 $\varepsilon = 9.2 \times 10^{-8}$, 系统初值 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1.6$. 系统的稳定性相对 ρ 是连续变化的, 随着 ρ 从 0 逐渐增大时系统由不稳定变得稳定. 根据系统特点, ρ 的选取从 0 开始每次增加 0.1, 对于每个 ρ 对应的系统, 用定理 1 中的条件判断其是否渐近稳定, 并求解系统的零输入响应以验证所求结果. 图 1 和图 2 分别为 $\rho = 4.8$ 和 $\rho = 4.9$ 时系统的响应曲线. 由计算和仿真结果可知, 当 $\rho \leq 4.8$ 时, 利用定理 1 得不到可行的 P 和 λ , 仿真

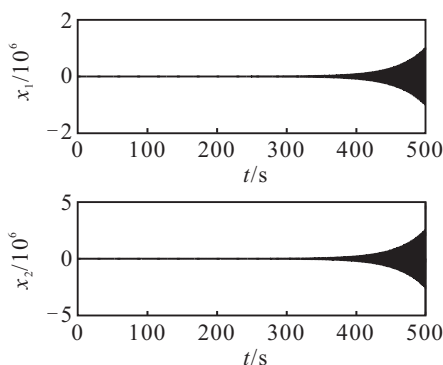


图 1 $\rho = 4.8$ 时系统响应曲线

得到的系统响应曲线是发散的, 且当 $\rho = 4.8$ 时, 系统响应初始阶段幅值很小, 350s 之后才明显看到发散; 当 $\rho \geq 4.9$ 时, 可以求得满足条件的 P 和 λ , 系统响应曲线收敛, 且当 $\rho = 4.9$ 时, 系统响应初始阶段不断振荡, 振荡幅值慢慢减小, 400s 之后才近似收敛至 0.

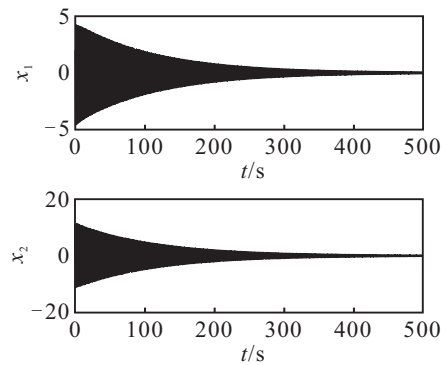


图 2 $\rho = 4.9$ 时系统响应曲线

3.2 不确定时滞系统稳定性研究

例 2 考虑式 (9) 所示的系统, 选择系统参数为

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B_\alpha = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, D = I,$$

$$E_A = E_B = \text{diag}(0.2, 0.2), \phi(t) = 0, t \in [-h, 0),$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}, \alpha = [\sqrt{0.6} \ \sqrt{0.7}]^T.$$

按照例 1 中的模型变换参数, 利用定理 2 在给定 μ 值时判断给定系统的稳定性, 并求出能使系统稳定的最大的 h , 所得结果如表 1 所示.

表 1 稳定的时滞上界

μ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
h	0.330	0.328	0.326	0.324	0.322	0.320	0.317

例 3 同样考虑式 (9) 所示的系统, 选择系统参数如下所示:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0.12 \\ 1 & -0.465 \end{bmatrix}, B_\alpha = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.35 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 12\rho \\ 0 & -\rho \end{bmatrix}, \Delta B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, |\rho| \leq 0.035,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}, \alpha = [\sqrt{0.3} \ \sqrt{0.5}]^T.$$

与例 2 类似, 按照例 1 中的模型变换参数, 在给定 μ 值时, 利用定理 2 判断给定系统的稳定性, 并求出能使系统稳定的最大的 h , 所得结果如表 2 所示. 由于具有时变时滞的不确定分数阶系统阶跃响应不具有解析解, 本文通过 Oustaloup 的数值逼近方法验证判据的有效性, 两种分析结果一致.

表 2 稳定的时滞上界

μ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
h	0.181	0.179	0.176	0.173	0.168	0.161	0.150

4 结 论

本文介绍了线性不确定分数阶变时滞系统的鲁棒稳定性问题. 基于模型逼近将所求问题转为整数阶近似模型的鲁棒稳定性分析问题, 得到了 LMI 形式的判定准则. 所得结论能够简单有效地判断出不确定分数阶时滞系统的稳定性, 同时为分数阶系统的系统分析和控制器设计提供了新的思路. 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Monje C A, Chen Y Q, Vinagre B M, et al. Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications[M]. London: Springer Verlag, 2010: 273-390.
- [2] 李旺. 分数阶系统辨识与控制器设计研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学信息科学技术学院, 2010.
(Li W. Research of fractional order system identification and controller design[D]. Hefei: School of Information Science and Technology, University of Science and Technology of China, 2010.)
- [3] 陈炳文, 王文伟, 秦前清. 基于分数阶积分算子的红外弱小目标检测[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 147-151.
(Chen B W, Wang W W, Qin Q Q. Infrared dim target detection based on fractional integral operator[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 147-151.)
- [4] Caponetto R, Dongola G, Fortuna L. et al. Fractional order systems: Modeling and control applications[M]. Singapore: World Scientific, 2010: 53-166.
- [5] Liao Z, Zhu Z T, Liang S, et al. Subspace identification for fractional order hammerstein systems based on instrumental variables[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2012, 10(5): 947-953.
- [6] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性系统的内部和外部稳定性研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(10): 1171-1174.
(Wang Z B, Cao G Y, Zhu X J. Research on the internal and external stability of fractional order linear systems[J]. Control and Decision, 2004, 19(10): 1171-1174.)
- [7] Liao Z, Peng C, Li W, et al. Robust stability analysis for a class of fractional order systems with uncertain parameters[J]. J of the Franklin Institute, 2011, 348(6): 1101-1113.
- [8] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.
(Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 161-169.)
- [9] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Bostn: Birkhauser, 2003: 10-14.
- [10] Zhang X Y. Some results of linear fractional order time-delay system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(1): 407-411.
- [11] Shi M, Wang Z H. An effective analytical criterion for stability testing of fractional-delay systems[J]. Automatica, 2001, 47(9): 2001-2005.
- [12] Kaslik E, Sivasundaram S. Analytical and numerical methods for the stability analysis of linear fractional delay differential equations[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(16): 4027-4041.
- [13] Fioravanti A R, Bonnet C, Özbay H, et al. A numerical method for stability windows and unstable root-locus calculation for linear fractional time-delay systems[J]. Automatica, 2012, 48(11): 2824-2830.
- [14] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis[J]. IEEE Trans on circuits and systems I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(1): 25-40.
- [15] Xue D Y, Zhao C N, Chen Y Q. A modified approximation method of fractional order system[C]. Proc of IEEE Conf on Mechatronics and Automation. Luoyang, 2006: 1043-1048.
- [16] 齐乃明, 秦昌茂, 王威. 分数阶系统的最优 Oustaloup 数字实现算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1598-1600.
(Qi N M, Qin C M, Wang W. Optimal oustaloup digital realization of fractional order systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1598-1600.)
- [17] Trigeassou J C, Maamri N, Sabatier J, et al. State variables and transients of fractional order differential systems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(10): 3117-3140.
- [18] Wang Y, Wei Y H, Zhu M, et al. A novel LMI approach for robust stabilization of uncertain fractional order systems[C]. Proc of Chinese Control Conf. Xi'an, 2013: 1475-1479.
- [19] 张冬梅, 俞立. 线性时滞系统稳定性分析综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 841-849.
(Zhang D M, Yu L. Survey on the stability analysis of linear time-delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 841-849.)
- [20] Peterson I R. A stabilization algorithm for a class uncertain linear systems[J]. System Control Letters, 1987, 8(4): 351-357.
- [21] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. Proc of 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney, 2000: 2805-2810.
- [22] Yu J. Further results on delay-distribution-dependent robust stability criteria for delayed systems[J]. Int J of Automation and Computing, 2011, 8(1): 23-28.

(责任编辑: 郑晓蕾)