

# Casimir 力和静电力驱动下同轴圆柱管模型的 GHz 振动<sup>1)</sup>

李海军 郭万林<sup>2)</sup>

(南京航空航天大学纳米科学研究所, 南京 210016)

**摘要** 提出了一种双层同轴圆柱管振动的力学模型, 并用连续介质力学的方法分析了该模型分别在 Casimir 力和静电力驱动下的振动特性. 计算结果表明, 在理想情况下, 如果模型管间距达到 1 纳米量级, Casimir 力和静电力有可能驱动该模型达到 GHz 甚至更高量级频率的振动, 这说明 Casimir 力和静电力驱动 GHz 的振动具有理论上的可行性.

**关键词** GHz 振动, Casimir 力, 静电力, 同轴圆柱管, 纳机电系统

**中图分类号:** O325 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)04-0533-05

## 引 言

结构的微型化是当代科技发展的大趋势. 微机电系统 (MEMS) 已经成熟地应用于广阔领域, 纳机电系统 (NEMS) 的研究和应用也日益提上日程<sup>[1~3]</sup>. 高频 NEMS 在高敏感电荷检测、高频信号处理、生物学成像以及量子测量等领域有望得到重要应用<sup>[3,4]</sup>. 然而, GHz (gigahertz,  $10^9$  Hz) 频率的振动在目前的技术条件下仍然很难达到, Huang 等在实验条件下实现了 3C-SiC 纳米尺度梁的约 1GHz 频率的振动<sup>[4]</sup>, 该工作被认为是通向超高频 NEMS 的重大进展.

近年来, 随着碳纳米管研究热潮的兴起, 碳纳米管作为 GHz 高频振荡器的潜在可能性引起了很多学者的关注, 其中尤其引起兴趣的是多壁碳纳米管在范德华力驱动下的同轴振动<sup>[5~9]</sup>. Cumings 和 Zettl 实验揭示了多壁碳纳米管层间的低摩擦、低磨损特性, 并且发现将多壁碳纳米管一端的帽子打开并将内管抽出一段位移, 释放后内管将在范德华力的驱动下以实验观测不到的速度恢复到原位, 其估计恢复时间为 ns 量级<sup>[5]</sup>. Forró 在评论该工作时提出了在一端打开的多壁碳纳米管内外管施加静电作用从而实现内外管同轴高频振动的设想<sup>[6]</sup>. 在上述工作启示下, Zheng 等<sup>[7]</sup>认为将多壁碳纳米管两端的

帽子均打开并将内管抽出一段位移后, 即可在范德华力的驱动下振动起来, 他们用连续介质力学的方法计算出振动的频率在 GHz 量级. Guo 等<sup>[8]</sup>和 Legoas 等<sup>[9]</sup>用分子动力学的方法证实了 Zheng 等的结果. 因此, 范德华力驱动的 GHz 振荡器在理论和实验上都是有可能实现的.

然而, 在微纳米尺度受到广泛关注的, 除了范德华力还有被称为延迟的范德华力 (retarded van der Waals force) 的 Casimir 力<sup>[10]</sup>和静电力等. Casimir 力和静电力能否驱动 GHz 的振动并未得到揭示, 这将会是一个很有意义的课题. 本文将对此课题进行一些探讨. 我们从多壁碳纳米管的振动得到启发, 抽象出双层同轴圆柱管模型, 借鉴 Zheng 等<sup>[7]</sup>的连续介质力学方法, 分别对该模型在 Casimir 力和静电力作用下的振动进行了分析. 在分析过程中, 我们忽略了阻尼、热扰动、重力等环境的影响, 只考虑理想状态下的振动.

## 1 几何模型

同轴圆柱管模型如图 1 所示, 内外管的长度分别为  $l, L$  (不失一般性, 图 1 中只画出了  $l > L$  的情况, 但本文的分析对  $l = L$  和  $l < L$  的情况同样有效), 内管的外径和外管的内径分别为  $d, D$ , 内管厚

2006-08-07 收到第 1 稿, 2007-03-09 收到修改稿.

1) 973 计划国家自然科学基金 (10372044), 江苏省自然科学基金及教育部创新团队和科技创新工程重大项目培育资金 (705021) 资助项目.

2) E-mail: wlguo@nuaa.edu.cn

度为  $t$ , 两管间距为  $\delta$ , 内管材料密度为  $\rho$ , 管间介质的介电常数为  $\epsilon$ . 我们考虑该模型在外管固定的条件下将内管抽出一个初始位移  $\Delta$  后, 内管分别在 Casimir 力和静电力驱动下的振动. 以  $x(0 \leq x < (l+L)/2)$  表示内管偏离外管的轴向距离, 则两管重叠部分的长度为

$$L_d = \begin{cases} (l+L)/2 - x, & x > \Delta_0 \\ (l+L)/2 - \Delta_0, & 0 \leq x \leq \Delta_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\Delta_0 = |l - L|/2 \quad (2)$$

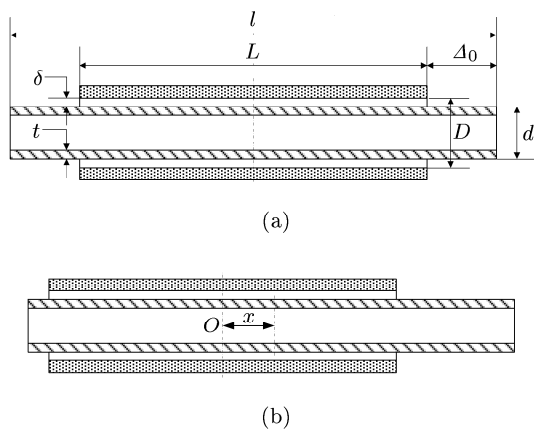


图 1 双层同轴圆柱管模型示意图

Fig.1 Schematic illustration of the double-walled coaxial cylindrical tubes model

由于 Casimir 力和静电力均随两管间距  $\delta$  的减小急剧增大, 只要两管间距相对于起始直径足够小 ( $\delta \ll d$ ), 两管重叠部分  $L_d$  内的 Casimir 能或静电能将占整个系统能量的主导地位, 可以忽略其它部分能量的影响, 从而可以通过分析两管重叠部分  $L_d$  内的能量来计算模型的振动特性.

## 2 Casimir 力驱动下的振动

Casimir 曾预言理想中性导体平板之间存在吸引力<sup>[10]</sup>, 这种吸引力后来被命名为 Casimir 力. 它是一种宏观量子效应, 在微纳米尺度广泛存在. 经过近几十年的发展, Casimir 力的理论和实验研究都取得了大量进展<sup>[11]</sup>. 本质上, Casimir 力和范德华力一样, 都是由真空零点电磁涨落引起的. 范德华力主要作用在原子间距范围, 而 Casimir 力作用在更长程的范围, 因而 Casimir 力又被称为延迟的范德华力 (retarded van der Waals force)<sup>[11]</sup>. Casimir

力和范德华力的作用半径与材料本身特性有关, 相关文献已经有所研究, 例如 Klimchitskaya 等<sup>[12]</sup> 的研究表明构成的平板间距在 2 nm 以下时主要由范德华力主导, 超过 2 nm 后逐步过渡到由 Casimir 力主导, 这表明 Casimir 力在低至 1 nm 量级的作用半径均可能占主导地位. 范德华力和 Casimir 力在微纳机电系统中的驱动作用已经引起了一些学者的关注<sup>[13~15]</sup>, 范德华力驱动 GHz 振动也为相关理论模拟所预测<sup>[7~9]</sup>, 这里将揭示 Casimir 力驱动 GHz 振动的可能性.

对图 1 所示的双层同轴圆柱管模型, 两管重叠部分的 Casimir 能有着较为复杂的表达式<sup>[16]</sup>. 本文主要进行定性的探讨, 并不打算纠缠于精确的数值求解, 因此我们进行一些简化处理. 当  $\delta \ll d$  (例如  $\delta/d \leq 6\%$ ), 即管间距与管径的比值为小值时双层同轴圆柱管可以看成两平行平板来近似计算 Casimir 能<sup>[16,17]</sup>. 理想导体构成的两平行平板的 Casimir 能密度为<sup>[11,16]</sup>

$$w_c = -\frac{c\hbar\pi^2}{720\delta^3} \quad (3)$$

式中  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$  为约化普朗克常数,  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  为光速,  $\delta$  为平板间距 (对应于同轴圆柱管模型的管间距), 负号表示为引力势能. 将式 (3) 对两管重叠部分面积积分得到模型的 Casimir 能为

$$U_c(x) = \int w_c dS \doteq -\frac{c\hbar\pi^3 d L_d}{720\delta^3} \quad (4)$$

显然模型的 Casimir 能随内管抽出的长度  $x$  而变化. 该模型是一个保守系统, 根据虚功原理, 内管所受恢复力可表示为

$$F_c = -\frac{\partial U_c(x)}{\partial x} \quad (5)$$

将式 (4) 代入上式, 联系式 (1), 可得

$$F'_c = \begin{cases} -\frac{c\hbar\pi^3 d}{720\delta^3}, & x > \Delta_0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \Delta_0 \end{cases} \quad (6)$$

负号表示恢复力的方向始终指向平衡位置 ( $x = 0$ ). 因此, 当用外力将内管抽出一初始位移  $x = \Delta > \Delta_0$  并释放后, 内管运动过程如下: (1) 首先内管将在大小恒为  $|F_c|$  的恢复力作用下向平衡位置方向匀加速运动 (设加速度大小为  $a$ ), 直到  $x = \Delta_0$  停止加速 (此时速度为  $V_0$ ), 行程为  $\Delta - \Delta_0$ ; (2) 接着内管以匀速  $V_0$  经过平衡位置运动到另一侧的  $x = \Delta_0$  位置, 行程为  $2\Delta_0$ ; (3) 之后内管将在恢复力作用下做匀减

速运动(加速度大小仍为  $a$ ), 直到另一侧  $x = \Delta$  时减速至 0, 行程为  $\Delta - \Delta_0$ ; (4) 然后, 类似 (1)~(3) 内管又将向相反方向匀加速—匀速—匀减速运动直到回到初始位置. 以上过程即构成一个完整的振动周期. 在不考虑阻尼的情况下, 该模型将一直做等幅振动.

当内管厚度  $t \ll d$  时, 如材料的密度为  $\rho$ , 则内管的质量可以近似表示为

$$M = \rho\pi dlt \quad (7)$$

根据牛顿第二定律, 内管加速和减速运动时的加速度  $a$  为

$$a = \frac{|F_c|}{M} = \frac{c\hbar\pi^2}{720\rho\delta^3lt} \quad (8)$$

因而加速或减速时间(1/4 周期内)均为

$$T_0 = \sqrt{2(\Delta - \Delta_0)/a} \quad (9)$$

内管匀速运动的速度  $V_0$  为

$$V_0 = \sqrt{2a(\Delta - \Delta_0)} \quad (10)$$

因此模型的振动频率为

$$f_{\text{Casimir}} = \frac{1}{4}(T_0 + \Delta_0/V_0)^{-1} \quad (11)$$

将式 (8)~(10) 代入式 (11) 可得

$$f_{\text{Casimir}} = \frac{1}{4}(T_0 + \Delta_0/V_0)^{-1} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\Delta - \Delta_0}}{2\Delta - \Delta_0} \sqrt{\frac{c\hbar\pi^2}{360\rho\delta^3lt}} \quad (12)$$

### 3 静电力驱动下的振动

静电力也是微纳米结构中广泛作用的长程力, 我们对其驱动的振动也将进行前文类似的探讨. 对图 1 所示的同轴圆柱管模型, 若在内外管分别施加恒定电势  $V_i$  和  $V_o$ , 则两管间将存在静电力作用. 将内管抽出一初始位移  $\Delta$ , 理想情况下内管将在静电力驱动下振动起来, 下文将对其振动特性进行分析.

内外管分别施加恒定电势后, 图 1 所示模型构成一个圆柱形电容器, 当内管偏离外管的轴向距离为  $x(0 \leq x < (l+L)/2)$  时, 该电容器的电容为<sup>[18]</sup>

$$C(x) = \frac{2\pi\epsilon L_d}{\ln(D/d)} \quad (13)$$

其中  $\epsilon$  为介电系数, 假定管间介质为真空, 则真空中介电系数为  $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ ,  $L_d$  为两

管重叠部分的长度, 由式 (1) 确定. 于是, 该电容器的静电势能为

$$U_{\text{elec}}(x) = -\frac{1}{2}C(x)V^2 \quad (14)$$

其中  $V = |V_o - V_i|$  为内外管之间的电压, 负号表示该势能为引力势能. 根据虚功原理, 内管所受轴向静电力为

$$F_{\text{elec}}(x) = -\frac{\partial U_{\text{elec}}(x)}{\partial x} \quad (15)$$

将式 (14) 代入式 (15), 联系式 (13) 和式 (1), 可得

$$F_{\text{elec}}(x) = \begin{cases} -\frac{\pi\epsilon V^2}{\ln(D/d)}, & x > \Delta_0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \Delta_0 \end{cases} \quad (16)$$

因此, 将图 1 模型内管抽出一初始位移  $x = \Delta > \Delta_0$  并释放后, 内管将在式 (16) 所确定的静电力驱动下振动起来, 其运动过程与前文所述 Casimir 力驱动的运动过程相似, 在不计阻尼的情况下, 内管将经历匀加速—匀速—匀减速—反向匀加速—反向匀速—反向匀减速的周期往复运动过程. 通过与第 2 节类似的推导过程, 可以求得模型的振动频率为

$$f_{\text{elec}} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\Delta - \Delta_0}}{2\Delta - \Delta_0} \sqrt{\frac{2\epsilon V^2}{\rho dlt \ln(D/d)}} \quad (17)$$

### 4 结果与讨论

为方便讨论, 我们可以将 Casimir 力驱动下模型的振动频率式 (12) 改写成如下形式

$$f_{\text{Casimir}} = \alpha \sqrt{c\hbar\pi^2/\rho/\delta^3} \quad (18)$$

其中

$$\alpha = \frac{\sqrt{10}}{240} \frac{\sqrt{1 - \Delta_0/\Delta}}{2 - \Delta_0/\Delta} \sqrt{\frac{\delta}{l} \frac{\delta}{t} \frac{\delta}{\Delta}} \quad (19)$$

显然  $\alpha$  是一个由模型的相对尺寸决定的参数, 与模型的绝对尺寸无关. 式 (19) 中  $\sqrt{1 - \Delta_0/\Delta}/(2 - \Delta_0/\Delta)$  在  $\Delta > \Delta_0$  的条件下取值范围为 0~0.5, 本文中我们主要关心模型的高频特性, 取该值为 0.5, 对应于  $\Delta_0 = 0$ , 即内外管长度相同的情况. 由式 (18) 可知模型振动的频率正比于  $\rho^{-1/2}$ , 对材料的密度并不敏感. 取铝的密度  $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  进行计算. 图 2 为 5 种相对尺寸的模型在 Casimir 力驱动下振动频率的计算结果, 其中各算例的选取均满足式 (3) 的简化条件, 即其管间距远小于管径. 从图 2 可以看出, 随着模型尺度的减小, 其振动频率显著增加, 当同轴

圆柱管模型管间距达到 10 nm 量级时, 模型的振动频率可达到 MHz 量级; 当管间距达到 1 nm 量级时, 振动频率可达到 GHz 量级. 这说明实现以 Casimir 力驱动的 GHz 振动器件在理论上是可能的. 当然, 我们的研究是基于非常理想的情况, 在实际系统中可以通过改变系统的各种条件使其达到或者接近理想系统的振动频率.

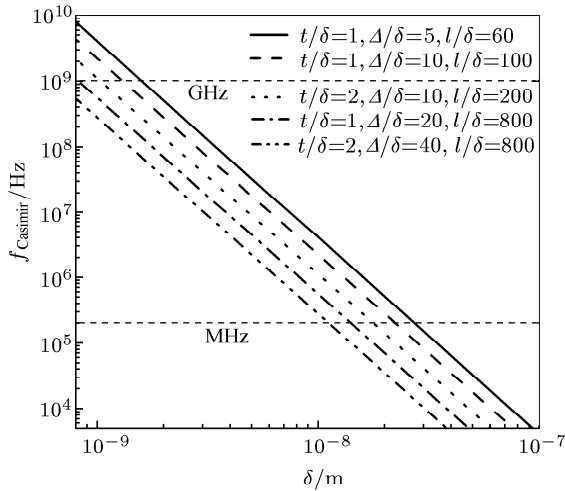


图 2 Casimir 力驱动下双层同轴圆柱管模型振动频率随管间距的变化关系

Fig.2 Frequency of the Casimir force driven oscillation of the double-walled coaxial cylindrical tubes versus the tube gap

类似地, 静电力驱动下模型的振动频率式 (17) 可以表示为

$$f_{elec} = \beta \sqrt{\epsilon/\rho} V/\delta^2 \quad (20)$$

其中

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{1 - \Delta_0/\Delta}}{2 - \Delta_0/\Delta} \left( \sqrt{\frac{d}{\delta} \frac{l}{\delta} \frac{t}{\delta} \frac{\Delta}{\delta}} \ln \left( 1 + 2 \frac{\delta}{d} \right) \right)^{-1} \quad (21)$$

$\beta$  也是一个仅由模型的相对尺寸决定的参数. 同样的理由, 取  $\Delta_0 = 0$ ,  $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . 图 3 为电压  $V = 10 \text{ V}$  时 5 种相对尺寸的模型在静电力驱动下振动频率的计算结果. 从图中可以看出, 随着模型尺度的减小, 其振动频率显著增加, 当模型的尺度达到 1 nm 量级时, 模型的振动频率也可以达到 GHz 甚至更高量级. 由于模型的振动频率与电压成正比 (见式 (20)), 我们可以通过增加电压来提高模型的振动频率. 当然, 这只是理想情况, 实际中过高的电压可能导致管间介质的电击穿.

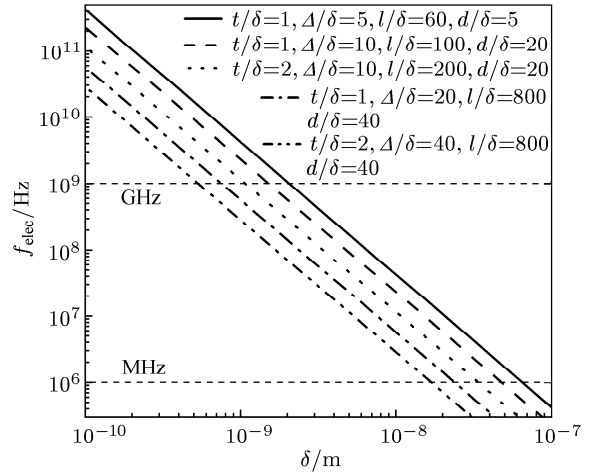


图 3 静电力驱动下同轴双层圆柱管模型振动频率随管间距的变化关系

Fig.3 Frequency of the electrostatic force driven oscillation of the double-walled coaxial cylindrical tubes versus the tube gap

### 5 结 论

GHz 的高频振动是结构微型化的迫切需求, 引起了很多学者的广泛兴趣. 本文提出了一种 Casimir 力和静电力驱动下的双层同轴圆柱管振动模型, 推导出了该模型的振动频率公式. 计算结果表明, 随着模型尺度的减小, 其振动频率显著增加, 当管间距达到 1nm 量级时, Casimir 力和静电力都有可能驱动该模型达到 GHz 甚至更高频率的振动. 这揭示了实现 Casimir 力和静电力驱动的 GHz 振动的潜在可能性, 结合范德华力驱动 GHz 的振动的理论研究 [7~9], 表明在纳米尺度 GHz 振动的广泛存在. 本文的结论是基于理想条件下的计算, 没有考虑摩擦、重力、介质的电击穿等因素的影响, 要实现本文提出的 GHz 的高频振动器件还需要更深入的理论和实验探讨.

### 参 考 文 献

- 1 Craighead HG. Nanoelectromechanical systems. *Science*, 2000, 290: 1532~1535
- 2 Roukes ML. Nanoelectromechanical systems face the future. *Phys World*, 2001, 14: 25~31
- 3 Ekinci KL, Roukes ML. Nanoelectromechanical systems. *Rev Sci Instrum*, 2005, 76: 061101
- 4 Huang XMH, Zorman CA, Mehregany M, et al. Nanoelectromechanical systems: Nanodevice motion at microwave frequencies. *Nature*, 2003, 421: 496
- 5 Cumings J, Zettl A. Low-friction nanoscale linear bearing realized from multiwall carbon nanotubes. *Science*, 2000, 289: 602~605

- 6 Forró L. Nanotechnology: Beyond gedanken experiments. *Science*, 2000, 289: 560~561
- 7 Zheng Q, Jiang Q. Multiwalled carbon nanotubes as gigahertz oscillators. *Physical Review Letters*, 2002, 88(4): 045503
- 8 Guo W, Guo Y, Gao H, et al. Energy dissipation in oscillators from multiwalled carbon nanotubes. *Physical Review Letters*, 2003, 91: 125501
- 9 Legoas SB, Coluci VR, Braga SF, et al. Molecular-dynamics simulations of carbon nanotubes as gigahertz oscillators. *Physical Review Letters*, 2003, 90: 055504
- 10 Casimir HBG. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proc Kon Ned Akad Wet*, 1948, 51: 793~796
- 11 Bordag M, Mohideen U, Mostepanenko VM. New developments in the Casimir effect. *Physics Reports*, 2001, 353: 1~205
- 12 Klimchitskaya GL, Mohideen U, Mostepanenko VM. Casimir and van der Waals force between two plates or a sphere (lens) above a plate made of real metals. *Phys Rev A*, 2000, 61: 062107
- 13 Zhu J, Ru CQ, Mioduchowski A. Surface-forces-driven instability of comb-drive microcantilevers in MEMS. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2006, 20: 1125~1146
- 14 Guo JG, Zhao YP. Influence of van der Waals and Casimir forces on electrostatic torsional actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, 13: 1027~1035
- 15 Lin WH, Zhao YP. Casimir effect on the pull-in parameters of nanometer switches. *Microsystem Technologies*, 2005, 11: 80~85
- 16 Mazzitelli FD, Sánchez MJ, Scoccola NN. Casimir interaction between two concentric cylinders: Exact versus semiclassical results. *Physical Review A*, 2003, 67: 013807
- 17 Jiang WZ, Wang ZX, Fu DJ, et al. Casimir energy of concentric and infinite cylindrical shells of perfect conductor. *Physics Letters A*, 2003, 315: 273~279
- 18 Smythe WR. *Static and Dynamic Electricity*. New York: McGraw-Hill, 1968

## GIGAHERTZ OSCILLATION OF COAXIAL CYLINDRICAL TUBES DRIVEN BY CASIMIR AND ELECTROSTATIC FORCES<sup>1)</sup>

Li Haijun Guo Wanlin<sup>2)</sup>

(*Institute of Nanoscience, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

**Abstract** With the development of nano electromechanical systems, ultrahigh frequency mechanical oscillators are in great demand. To meet this demand, a mechanical oscillator model of double-walled coaxial cylindrical tubes is proposed. The oscillation frequencies of the model driven by Casimir and electrostatic forces are evaluated, respectively, by continuum mechanics. It is found that when the tube gap of the model reaches 1 nanometer scale, the frequencies of the model can reach or even exceed the order of GHz under ideal situations, whether driven by Casimir force or by electrostatic force. The present work proves that it is feasible in theory to achieve GHz oscillators driven by Casimir force or electrostatic force.

**Key words** gigahertz oscillation, Casimir force, electrostatic force, coaxial cylindrical tubes, nano electromechanical systems

---

Received 7 August 2006, revised 9 March 2007.

1) The project supported by 973 program, the National Natural Science Foundation of China (10372044), Jiangsu Province NSF, the PCSIRT and the Cultivation Fund of the Key Scientific and Technical Innovation Project of the Ministry of Education of China (705021).

2) E-mail: wlguo@nuaa.edu.cn