

# 双面约束多点摩擦多体系统的建模和数值方法<sup>1)</sup>

彭慧莲<sup>2)</sup> 王士敏 王 琪 郭易圆

(北京航空航天大学动力学与控制研究室, 北京 100191)

**摘要** 提出了一种建立具有固定双面约束多点摩擦的多体系统动力学方程的方法. 用笛卡尔坐标阵描述系统的位形, 根据局部方法的递推关系建立系统的约束方程, 应用第一类 Lagrange 方程建立该系统的动力学方程, 使得具有摩擦的约束面的法向力与 Lagrange 乘子一一对应, 便于摩擦力的分析与计算, 并用矩阵形式给出了摩擦力的广义力的一般表达式. 应用增广法将微分-代数方程组转化为常微分方程组, 并用分块矩阵的形式给出, 以便于方程的编程与计算. 给出了一种改进的试算法, 可提高计算效率. 最后给出了一个算例, 应用试算法和 RK 法对算例进行了数值仿真.

**关键词** 多体系统, 双面约束, 建模方法, 干摩擦, Lagrange 乘子

中图分类号: O313.7 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2009)01-0105-08

## 引 言

目前关于光滑(不含摩擦与碰撞)多刚体系统动力学的建模和计算方法的研究已比较成熟, 但在航空航天、机械系统等实际工程问题中, 往往存在干摩擦或碰撞等非光滑因素. 当考虑干摩擦非光滑因素对多体系统的影响时, 可能会出现粘滞、滑动以及摩擦自锁等现象, 其动力学行为比较复杂<sup>[1~3]</sup>; 此外, 由于非光滑多体系统动力学方程的不连续或分段连续, 给方程的建立和数值计算带来了困难, 已有的光滑多体系统动力学的建模方法与数值方法不能直接应用到非光滑多体系统.

近年来, 有很多学者研究了考虑干摩擦的多刚体系统动力学的建模方法和数值算法<sup>[4,5]</sup>. 文献 [6,7] 应用线性互补方法给出了考虑干摩擦的单面约束多体系统的动力学方程和数值算法; 文献 [8] 应用第一类 Lagrange 方程建立了考虑摩擦的单面约束多体系统动力学方程, 并给出了相应的算法. 上述方法主要针对考虑摩擦的单面约束多体系统(其法向约束力始终是非负的), 对考虑摩擦的双面约束多体系统(其法向约束力可正可负)的研究较少, 而在实际机械工程中需要考虑双面约束的情况较多, 因此有必要对这类系统进行研究, 给出一种通用的建模方法. 文献 [9,10] 运用矢量方法建立了考虑摩擦的双

面约束多体系统的动力学方程, 并针对摩擦力表达式中含有法向约束力绝对值项的特点, 给出了一种试算法(trial-and-error); 文献 [11] 基于上述方法对动力学方程解的存在性和唯一性进行了讨论, 给出了无解、有唯一解和有多解所对应的物理解释. 但使用这种方法建立动力学方程相当繁琐, 程式化程度不高, 不利于数值计算. 目前 Lagrange 方程是研究多体系统动力学的普遍方法之一. 若系统中考虑摩擦的约束是双面的, 由于干摩擦的存在, 当约束面的法向力与系统的运动耦合时, 无法仅用第二类 Lagrange 方程建立系统的动力学方程; 如果采用第一类 Lagrange 方程, 系统的广义力可分为主动力的广义力和摩擦力的广义力, 且摩擦力的表达式中包含法向约束力的绝对值项(非光滑因素之一)<sup>[9,12]</sup>, 为了避免在动力学方程中出现绝对值项, 文献 [13,14] 将双面约束视为两个单面约束. 如在文献 [14] 中, 把双面刚性约束视为弹性模量充分大的两个单边约束, 但是由于弹性模量充分大, 在求解动力学方程的过程中会出现“刚性”问题. 在文献 [13,14] 中均未给出 Lagrange 乘子与摩擦面法向约束力的关系.

本文研究了具有固定双面约束多点摩擦的多体系统. 采用笛卡尔坐标<sup>[15]</sup>描述系统的位形, 分别利用局部方法<sup>[16]</sup>和第一类 Lagrange 方程建立了系统的约束方程和动力学方程. 本文从滑道的约束方

2008-05-12 收到第 1 稿, 2008-10-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(10672007).

2) E-mail: huilian.peng@gmail.com

程出发, 利用库仑摩擦模型和虚功原理, 用矩阵形式给出了摩擦力的广义力的一般表达式, 并且将方程中的绝对值项用符号函数表示, 因此该表达式中含 Lagrange 乘子、滑块速度和切向加速度的符号函数, 用符号函数反映其动力学方程的非光滑性. 另外, 本文利用系统动力学方程非光滑的特点(分段光滑), 给出了一种改进试算法, 提高了计算效率.

### 1 系统的描述和动力学方程的建立

设平面多刚体系统由  $n$  个刚体和  $n^*$  个滑块(视为质点)组成. 连接各物体(刚体和滑块)的柱铰链是光滑的, 滑块受到固定双面滑道的约束且两者间有摩擦. 为便于描述和计算, 本文采用笛卡尔坐标描述系统的位形, 即用  $(x_{cj}, y_{cj}, \theta_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 表示刚体  $j$  的质心坐标和转角, 用  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n^*$ ) 表示滑块  $i$  的坐标, 则系统的广义坐标为  $\mathbf{q} = [x_{c1}, y_{c1}, \theta_1, \dots, x_{cn}, y_{cn}, \theta_n, x_1, y_1, \dots, x_{n^*}, y_{n^*}]^T$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^N$  ( $N = 3n + 2n^*$ ). 设系统受到双面完整定常约束, 其中滑块  $i$  在固定双面约束的滑道内运动, 设滑块与滑道间有微小间隙, 滑块只可能与滑道的一侧接触, 忽略约束面切换带来的冲击和碰撞. 滑道的约束方程为  $g_i(x_i, y_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, n^*$ ); 物体间铰链的约束方程为  $f_k(\mathbf{q}) = 0$  ( $k = 1, \dots, p$ ), 则系统的约束方程可写成  $\Phi(\mathbf{q}) = [f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_{n^*}]^T = \mathbf{0}$ ,  $\Phi \in \mathbf{R}^L$  ( $L = p + n^*$  为独立的约束方程个数). 应用第一类 Lagrange 方程可得系统的动力学方程

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^f + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中:  $M$  为系统的广义质量矩阵,  $\Phi_q$  为约束方程的雅可比矩阵;  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{n^*}^*]^T \in \mathbf{R}^L$  为 Lagrange 乘子列向量, 其中  $[\lambda_1, \dots, \lambda_p]$  是与铰链约束方程对应的 Lagrange 乘子,  $[\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n^*}^*]$  是与双面滑道约束方程对应的 Lagrange 乘子;  $\mathbf{Q}$  为系统主动力的广义力(包含非摩擦力的阻尼力);  $\mathbf{Q}^f$  为系统摩擦力的广义力.

根据库仑摩擦模型, 摩擦力的大小与约束面的法向约束力的大小  $|F_N|$  成正比, 方向与相对运动(或相对运动趋势)的方向相反, 滑道作用在滑块  $i$  上的摩擦力  $F_i$  可表示为

$$F_i = \begin{cases} -\mu_i |F_{Ni}| \operatorname{sgn}(\dot{s}_i), & \dot{s}_i \neq 0 \\ -\mu'_i |F_{Ni}| \operatorname{sgn}(\ddot{s}_i), & \dot{s}_i = 0 \text{ and } \ddot{s}_i \neq 0 \\ [-\mu'_i |F_{Ni}|, \mu'_i |F_{Ni}|], & \dot{s}_i = 0 \text{ and } \ddot{s}_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

( $i = 1, 2, \dots, n^*$ )

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

其中:  $F_{Ni}$ ,  $\mu_i$  和  $\mu'_i$  分别为滑道作用在滑块  $i$  上的法向约束力、滑块与滑道间的动滑动摩擦系数和静滑动摩擦系数;  $\dot{s}_i$ ,  $\ddot{s}_i$  分别为滑块  $i$  的速度和加速度在滑道切向上的投影.

为便于计算摩擦力的广义力, 本文采用局部方法<sup>[16]</sup>建立系统的约束方程, 则可以证明: 由此得到的 Lagrange 乘子与约束面的法向力一一对应.

由于滑块  $i$  被约束在  $g_i(x_i, y_i) = 0$  的滑道内运动, 与该约束方程对应的 Lagrange 乘子为  $\lambda_i^*$ , 则滑道法向约束力的大小为

$$|F_{Ni}| = \sqrt{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\right)^2} |\lambda_i^*|$$

将该式表示成  $|F_{Ni}| = c_i |\lambda_i^*| = c_i \lambda_i^* \operatorname{sgn}(\lambda_i^*)$ , 其中

$$c_i = \sqrt{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\right)^2}$$

则滑道作用在滑块  $i$  上的摩擦力(静滑动摩擦力和动滑动摩擦力)可统一表示成

$$F_i = \begin{cases} -\mu_i c_i \lambda_i^* \operatorname{sgn}(\lambda_i^*) \operatorname{sgn}(\dot{s}_i), & \dot{s}_i \neq 0 \\ -\mu'_i c_i \lambda_i^* \operatorname{sgn}(\lambda_i^*) \operatorname{sgn}(\ddot{s}_i), & \dot{s}_i = 0 \text{ and } \ddot{s}_i \neq 0 \\ [-F_{\max}^{(i)}, F_{\max}^{(i)}], & \dot{s}_i = 0 \text{ and } \ddot{s}_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

( $i = 1, 2, \dots, n^*$ )

其中  $F_{\max}^{(i)} = \mu'_i c_i \lambda_i^* \operatorname{sgn}(\lambda_i^*)$  为最大静滑动摩擦力.  $c_i \lambda_i^*$  的物理含义是滑块  $i$  受到双面约束滑道的法向约束力. 当  $\lambda_i^* > 0$  时, 表示该双面约束的一个约束面起作用; 当  $\lambda_i^* < 0$  时, 表示该双面约束的另一个约束面起作用; 当  $\lambda_i^* = 0$  时, 表示该双面约束的两个面均不起作用. 当滑块的速度和加速度均为零时, 滑块受到的摩擦力  $F_i$  为静滑动摩擦力, 其取值范围为  $F_i \in [-F_{\max}^{(i)}, F_{\max}^{(i)}]$ .

为给出摩擦力的广义力  $\mathbf{Q}^f$  的一般表达式, 需先给出  $\dot{s}_i$ ,  $\ddot{s}_i$  和  $\delta s_i$  的解析式. 设  $g_i(x_i, y_i) = 0$  的法向量为  $\mathbf{n}$ , 切向量为  $\boldsymbol{\tau}$ , 根据该约束方程可得

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \mathbf{j}\right) / \sqrt{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \mathbf{i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \mathbf{j} \right) / \sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}$$

其中  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  分别为惯性系中两个正交坐标轴的单位向量。滑块  $i$  的速度  $\mathbf{v}_i$  和加速度  $\mathbf{a}_i$  可表示为

$$\mathbf{v}_i = \dot{x}_i \mathbf{i} + \dot{y}_i \mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_i = \ddot{x}_i \mathbf{i} + \ddot{y}_i \mathbf{j}$$

则  $\dot{s}_i$  和  $\ddot{s}_i$  可分别表示为滑块  $i$  的速度  $\mathbf{v}_i$  和加速度  $\mathbf{a}_i$  沿滑道切向方向的投影，即

$$\dot{s}_i = \mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \dot{x}_i - \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \dot{y}_i \right) / \sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2} \quad (4)$$

$$\ddot{s}_i = \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \ddot{x}_i - \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \ddot{y}_i \right) / \sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2} \quad (5)$$

由于滑块  $i$  在  $(x_i, y_i)$  处的虚位移是沿滑道的切向方向，其虚位移可以表示为

$$\delta s_i = \frac{\left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \mathbf{i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \mathbf{j} \right) \cdot (\delta x_i \mathbf{i} + \delta y_i \mathbf{j})}{\sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}} = \frac{\left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \delta x_i - \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \delta y_i \right) / \sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}}$$

则滑块  $i$  受到滑道的摩擦力  $F_i$  在虚位移  $\delta s_i$  上所作的虚功为

$$\delta W_i = F_i \delta s_i = \frac{F_i \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \delta x_i}{\sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}} + \frac{-F_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \delta y_i}{\sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}}$$

由此得到摩擦力对应于滑块  $i$  的广义坐标  $(x_i, y_i)$  的广义力为

$$Q_{x_i}^f = \frac{F_i \frac{\partial g_i}{\partial y_i}}{\sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}}, \quad Q_{y_i}^f = \frac{-F_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}}{\sqrt{\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right)^2}}$$

其中  $F_i$  由式 (3) 确定。为便于计算，将其表示成下列矩阵形式

$$\begin{bmatrix} Q_{x_i}^f \\ Q_{y_i}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{x_i} \\ b_{y_i} \end{bmatrix} \lambda_i^* \quad (i = 1, \dots, n^*) \quad (6)$$

其中

$$b_{x_i} = d_i \frac{\partial g_i}{\partial y_i}, \quad b_{y_i} = -d_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$$

$$d_i = \begin{cases} -\mu_i \text{sgn}(\lambda_i^*) \text{sgn}(\dot{s}_i), & \dot{s}_i \neq 0 \\ -\mu'_i \text{sgn}(\lambda_i^*) \text{sgn}(\ddot{s}_i), & \dot{s}_i = 0 \text{ and } \ddot{s}_i \neq 0 \\ [-\mu'_i \text{sgn}(\lambda_i^*), \mu'_i \text{sgn}(\lambda_i^*)], & \dot{s}_i = 0 \text{ and } \ddot{s}_i = 0 \end{cases}$$

由式 (6) 可知，滑块  $i$  的摩擦力的广义力是滑块的坐标  $(x_i, y_i)$ ，速度  $\dot{s}_i$ ，切向加速度  $\ddot{s}_i$  和 Lagrange 乘子  $\lambda_i^*$  的函数。为便于计算，式 (6) 可用下列矩阵形式表示

$$\mathbf{Q}_f^* = \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}^* \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{Q}_f^* = \begin{bmatrix} Q_{x_1}^f \\ Q_{y_1}^f \\ \vdots \\ Q_{x_{n^*}}^f \\ Q_{y_{n^*}}^f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{y_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{x_2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{y_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{x_{n^*}} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{y_{n^*}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \vdots \\ \lambda_{n^*}^* \end{bmatrix}$$

由于只考虑滑块与滑道间的摩擦，而铰链认为是光滑的，因此方程 (1) 可表示成

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

其中  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ ，且  $\mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{(3n \times p)}$ ， $\mathbf{A}_2 \in \mathbf{R}^{(3n \times n^*)}$ ， $\mathbf{A}_3 \in \mathbf{R}^{(2n^* \times p)}$  均为零矩阵。

利用增广法和 Baumgarte 稳定化方法<sup>[17]</sup>，系统的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\boldsymbol{\Phi}_q^T - \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\boldsymbol{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} - \alpha \dot{\boldsymbol{\Phi}} - \beta \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $\dot{\Phi}_q = \frac{d}{dt}(\Phi_q)$ ,  $\dot{\Phi} = \frac{d}{dt}(\Phi)$ ,  $\alpha, \beta$  为大于零的常数. 该方程适用于具有固定双面约束多点摩擦的平面多体系统.

## 2 动力学方程的算法与算例

### 2.1 动力学方程的算法

若  $\Phi_q^T$  和  $\Phi_q^T + A$  列满秩, 则方程 (8) 可表示成

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -\Phi_q^T - A \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q \\ -\dot{\Phi}_q \dot{q} - \alpha \dot{\Phi} - \beta \Phi \end{bmatrix} \quad (9)$$

该方程是分段光滑的方程组. 其特点是: 由于方程 (9) 的矩阵  $A$  中含  $\text{sgn}(\lambda_i^*)$ ,  $\text{sgn}(\dot{s}_i)$  和  $\text{sgn}(\ddot{s}_i)$  项, 系统在运动过程中, 这些项的符号会发生变化. 若确定了这些项的符号, 方程 (9) 就是关于系统广义加速度  $\ddot{q}$  和 Lagrange 乘子  $\lambda$  的线性方程组, 应用线性方程组和常微分方程的数值计算方法就可以求解. 因此要数值求解该方程组, 首先要确定符号函数  $\text{sgn}(\lambda_i^*)$ ,  $\text{sgn}(\dot{s}_i)$  和  $\text{sgn}(\ddot{s}_i)$  值.

本文根据系统的运动状态 (滑块的速度) 确定符号函数  $\text{sgn}(\dot{s}_i)$  值; 应用摩擦趋势确定法<sup>[5]</sup> 确定  $\text{sgn}(\ddot{s}_i)$  值; 应用试算法确定  $\text{sgn}(\lambda_i^*)$  值. 虽然式 (3) 中的每个  $\text{sgn}(\lambda_i^*) (i = 1, \dots, n^*)$  的值有  $\pm 1$  或  $0$  等 3 种选择, 但是, 对于  $\lambda_i^* = 0$  的特殊情况, 无论  $\text{sgn}(\lambda_i^*)$  取何值, 都不会影响  $\lambda_i^* \text{sgn}(\lambda_i^*)$  的值 (该值仍然为  $0$ ), 所以  $\text{sgn}(\lambda_i^*)$  只选择  $+1$  或  $-1$  两种即可. 原有的试算法 (trial-and-error) 在数值计算时每积分一步都按一定的顺序, 从  $\text{sgn}(\lambda_i^*) (i = 1, \dots, n^*)$  组成的集合中选取满足条件的解. 本文根据系统的动力学方程分段连续的特性, 滑块法向约束力的正负不会频繁发生变化, 给出一种改进的试算法, 即每积分一步应用试算法时, 选取前一步的试算结果作为初选, 可减少试算的次数, 提高计算效率.

### 2.2 算例

设固定双面约束多点摩擦的平面多刚体系统如图 1 所示. 均质圆盘的质量为  $m_1$ , 半径为  $R$ , 可绕中心  $O$  轴作定轴转动, 其上作用有力偶, 其力偶矩大小为  $M^{(e)} = M_{\max}^{(e)} \sin \omega t$ , 其中  $M_{\max}^{(e)}$  为所施加力偶矩的最大值; 滑块  $B, D$  的质量分别为  $m_1^*$  和  $m_2^*$ , 且分别用质量为  $m_2$ , 长为  $l_2$ , 和质量为  $m_3$ , 长为  $l_3$  的均质杆  $AB$  和  $CD$  将其与圆盘铰接. 铰链  $A, C$  位于圆盘边缘, 系统在铅垂平面内运动, 其惯性坐标系如图 1 所示,  $y$  轴铅垂向上. 滑块  $B, D$  可分

别在与水平的  $x$  轴成  $45^\circ$  和  $135^\circ$  的固定滑道内滑动, 两者间的动滑动摩擦系数和静滑动摩擦系数分别为  $\mu, \mu'$ . 滑块  $B, D$  连接有弹簧 (刚度系数为  $k$ ) 和阻尼器 (阻尼系数为  $c$ ). 阻尼力的大小与滑块速度大小成正比, 方向沿滑道并与滑块的速度方向相反. 滑块  $B, D$  分别在距圆盘中心等距  $l_2, l_3$  时弹簧未变形. 设  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  为滑块  $B, D$  的坐标,  $(x_{c1}, y_{c1}), (x_{c2}, y_{c2})$  和  $(x_{c3}, y_{c3})$  分别为圆盘、杆  $AB$  和杆  $CD$  的质心坐标, 则系统位形坐标可表示为  $(x_{c1}, y_{c1}, \theta_1, x_{c2}, y_{c2}, \theta_2, x_{c3}, y_{c3}, \theta_3, x_1, y_1, x_2, y_2)$ .

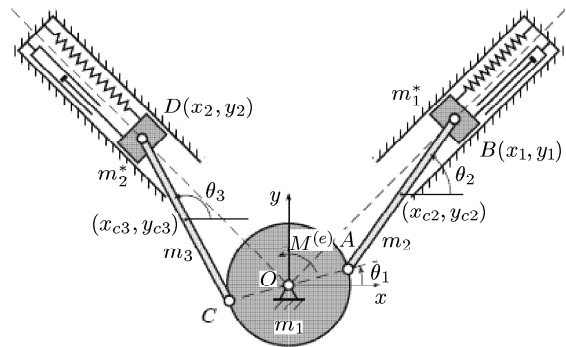


图 1 具有多个双面约束的圆盘滑块机构图

Fig.1 Disk-sliders system with multi-bilateral constraints

滑块  $B, D$  所在滑道的单位切向量为

$$\tau_1 = \cos 45^\circ i + \sin 45^\circ j$$

$$\tau_2 = \cos 135^\circ i + \sin 135^\circ j$$

滑块  $B, D$  的速度和加速度在滑道切向的投影及系统摩擦力的广义力可由式 (4)~(7) 求出.

本算例有关参数为:  $m_1 = 3 \text{ kg}, R = 0.1 \text{ m}, m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}, l_2 = l_3 = 0.2 \text{ m}, m_1^* = m_2^* = 3 \text{ kg}, \omega = (\pi/6) \text{ rad/s}, k = 750 \text{ N/m}, c = 0.01 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , 根据文献 [17], 本文算例中取  $\alpha = 10, \beta = 25$ . 初始时  $\theta_1 = 0.4 \text{ rad}, \dot{\theta}_1 = 0.0 \text{ rad/s}$ . 对以下几组参数进行了数值仿真.

**情形 1** 机构受耗散力 (摩擦力和阻尼力) 作用, 且  $M_{\max}^{(e)} = 0.0 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 设  $\mu = 0.2, \mu' = 0.3$ , 其运动的幅值应逐步减小. 图 2, 图 3 和图 4 分别为圆盘  $\theta_1, \dot{\theta}_1$  和  $\ddot{\theta}_1$ ; 滑块  $B$  的速度  $\dot{s}_1$ , 加速度  $\ddot{s}_1$  和 Lagrange 乘子  $\lambda_1^*$  (即  $F_{N1}$ ) 的时间历程. 数值仿真结果表明: 机构运动的幅值逐步减小, 并且由于摩擦力与滑块速度方向相反, 当滑块的速度变向时, 摩擦力发生突变,  $F_{N1}$  也发生突变.

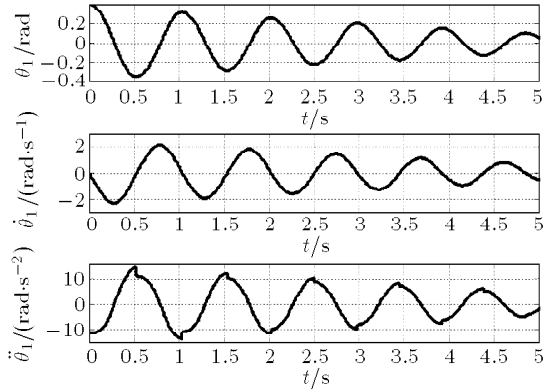


图 2  $\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1$  的时间历程

Fig.2 The time history of  $\theta_1, \dot{\theta}_1$  and  $\ddot{\theta}_1$

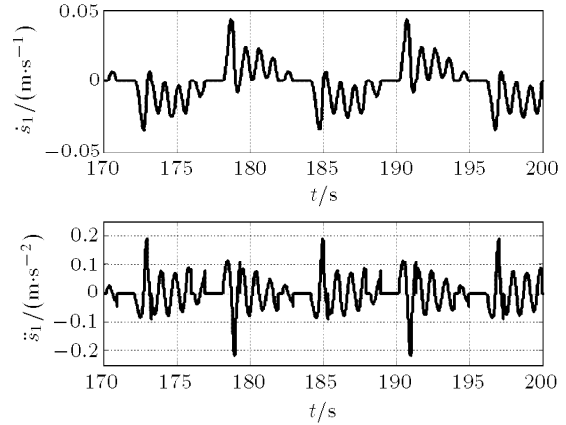


图 5 滑块 B 的速度和加速度的时间历程

Fig.5 The time history of velocity and acceleration of slider B

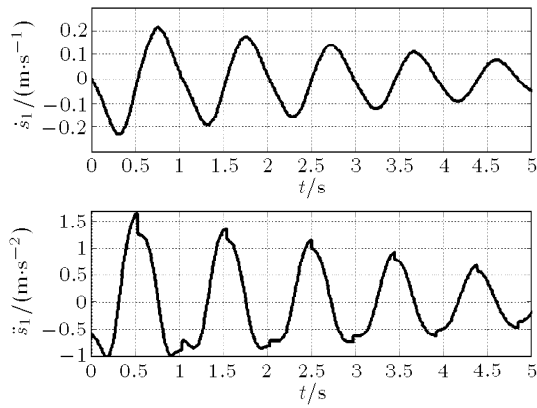


图 3 滑块 B 的速度和加速度的时间历程

Fig.3 The time history of velocity and acceleration of slider B

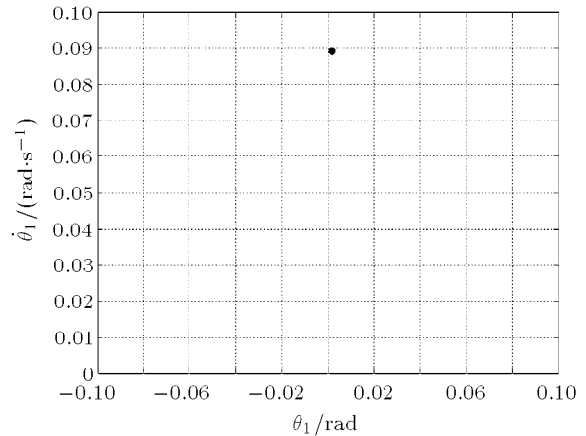


图 6 圆盘转角和角速度的 Poincare 映射

Fig.6 The Poincare mapping of angle and angular velocity of disk

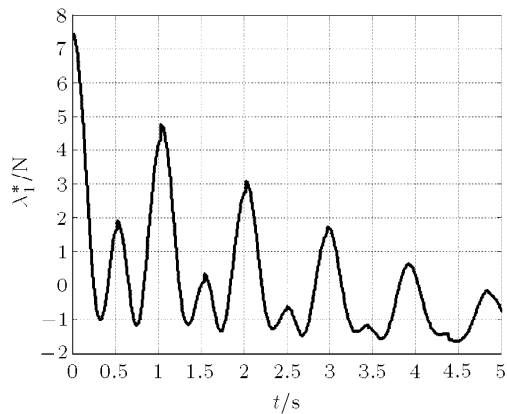


图 4  $\lambda_1^*$  的时间历程

Fig.4 The time history of Lagrange multiplier  $\lambda_1^*$

**情形 2** 圆盘受外力矩作用, 且  $M_{\max}^{(e)} = 1.0 \text{ N}\cdot\text{m}$ . 该机构在某些参数下其稳态运动为周期运动. 设  $\mu = 0.2, \mu' = 0.3$ , 图 5 为滑块 B 的  $\dot{s}_1, \ddot{s}_1$  消除暂态后的时间历程; 图 6 为圆盘  $\theta_1$  和  $\dot{\theta}_1$  的 Poincare 映射. 数值仿真结果表明机构作周期运动.

**情形 3** 圆盘仍受外力矩作用, 且  $M_{\max}^{(e)} = 1.0 \text{ N}\cdot\text{m}$ . 但在某些参数下系统的运动却是混沌的, 并且因摩擦系数选取的不同, 可使得系统的粘滞 - 滑动转换可能出现, 也可能不出现. 图 7 为  $\mu = 0.0112, \mu' = 0.014$  时圆盘  $\theta_1$  和  $\dot{\theta}_1$  的相图, 机构在该组参数下的运动是混沌的, 但未出现粘滞 - 滑动转换. 图 8 为  $\mu = 0.3056, \mu' = 0.382$  时圆盘  $\theta_1$  和  $\dot{\theta}_1$  的相图, 机构在该组参数下的运动也是混沌的, 并出现了粘滞 - 滑动转换.

图 9 为系统随摩擦系数变化的分岔图. 由数值结果可以看出: 摩擦系数较小时系统运动是混沌的, 但不会出现的粘滞 - 滑动转换; 摩擦系数较大时, 系统会出现粘滞和滑动交替的混沌运动.

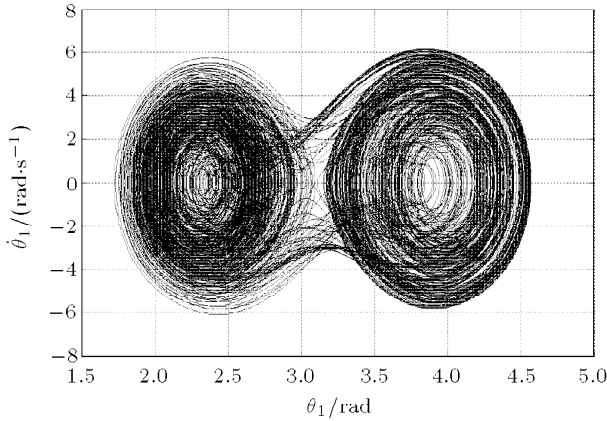


图 7 圆盘转角和角速度的相图

Fig.7 The phase diagram of angle and angular velocity of disk

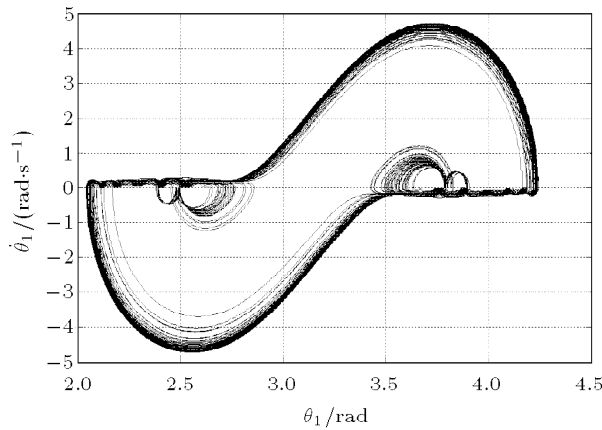


图 8 圆盘转角和角速度的相图

Fig.8 The phase diagram of angle and angular velocity of disk

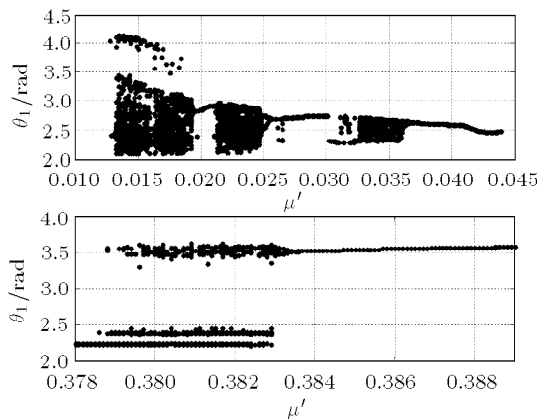


图 9 分岔图

Fig.9 Bifurcation diagram

针对上述算例，采用了不同的计算方法。对于光滑系统，无需用试算法；对于非光滑系统，采用了

原有的试算法和改进的试算法。3种计算方法数值仿真 100s 所用 CPU 时间如表 1 所示。

表 1 用 3 种方法计算所用的 CPU 时间

Table 1 The CPU time of three methods

Method of compute (type of system)	CPU time/s
RK method (the smooth system)	282
previous trial-and-error and RK method (the nonsmooth system)	369
improved trial-and-error and RK method (the nonsmooth system)	323

数值计算的 CPU 时间主要由两部分组成：一部分是 RK 计算方法所用的时间，另一部分是试算法所用的时间。由上表可以看出，扣除 RK 方法所用的时间外，原有试算法所用 CPU 时间为 87s，改进的试算法所用 CPU 时间为 41s，提高了计算效率。

本算例中滑块只有两个，试算的计算量不是很大，随着滑块个数的增多，试算的计算量呈指数增加，应用改进的试算法，计算效率将会有更明显的提高。

### 3 结 论

本文应用第一类 Lagrange 方程建立了具有固定双面约束多点摩擦的多刚体系统动力学方程。采用笛卡尔坐标作为系统的位形坐标，应用局部方法的递推关系建立系统的约束方程，使得动力学方程中与滑道约束方程对应的 Lagrange 乘子和该滑道的法向约束力一一对应，易于建立摩擦力与 Lagrange 乘子的关系，为摩擦力广义力的计算奠定了基础；为便于方程的计算，用矩阵形式给出了系统摩擦力的广义力的一般表达式；应用增广法将微分-代数方程转化为常微分方程，并以分块矩阵的形式给出，便于其动力学方程的编程计算。根据摩擦力的广义力的特点和系统的分段连续性，对试算法进行了改进，提高了计算效率。

### 参 考 文 献

- 1 Klepp HJ. Case with several and with no solutions of the initial value problem and the corresponding states of systems with friction-affected constraints. *Proc. Instn Mech. Engrs Part K: J. Multi-body Dynamics*, 2003, 217: 51~61
- 2 Albert CJ Luo, Brandon C Gegg. Stick and non-stick periodic motions in periodically forced oscillators with dry friction. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 291: 132~168
- 3 Pfeiffer F. Multi-body systems with unilateral constraints. *Journal Applied Mechanics*, 2001, 65 (4): 665~671

- 4 Brogliato B, Dam AA Ten, Paoli L, et al. Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(2): 107~150
- 5 Fu Shihui, Wang Qi. Estimating the largest Lyapunov exponent in a multibody system with dry friction with using Chaos synchronization. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22(3): 277~283
- 6 Glocker Ch, Pfeiffer F, München. Complementarily problem in multibody systems with planar friction. *Archive of Applied Mechanics*, 1993, 63: 452~463
- 7 Pfeiffer F, Foerg M, Ubrlch H. Numerical aspects of non-smooth multibody dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 6891~6908
- 8 王剑锋, 王琪. 含摩擦多体系统 Lagrange 方程的数值算法. *动力学与控制学报*, 2004, 2(2): 58~61 (Wang Jianfeng, Wang Qi. The numerical method for Lagrange's equations of multibody system with dry friction. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2): 58~61 (in Chinese))
- 9 Klepp HJ. Trial-and-error based method for the investigation of multi-body systems with friction. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 197(5): 629~637
- 10 Klepp HJ. The existence and uniqueness of solutions for a single-degree-of-freedom system with two friction-affected sliding joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 185(2): 364~371
- 11 Klepp HJ. Modes of contact and uniqueness of solutions for systems with friction-affected sliders. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(2): 987~996
- 12 Kunze M. Non-smooth Dynamical Systems. New York. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000
- 13 Geier T, Foerg M, et al. Simulation of a push belt CVT considering uni- and bilateral constraints. *ZAMM-Z Angew Math Mech*, 2006, 86(10): 795~806
- 14 Flores P, Ambósio J, et al. Translational joints with clearance in rigid multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2008, 011007(3): 1~10
- 15 Ahmed A. Shabana. Dynamics of Multibody System. 3rd. ed. New York: Cambridge University Press, 2005
- 16 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of Multi-body Systems. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))
- 17 潘振宽, 洪嘉振等. 多体系统动力学微分 - 代数方程数值方法. *力学进展*, 1996, 26(1): 28~40 (Pan Zhenkuan, Hong Jiazhen, et al. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multi-body systems. *Advances in Mechanics*, 1996, 26(1): 28~40(in Chinese))

(责任编辑: 何漫丽)

## MODELING AND SIMULATION OF MULTI-BODY SYSTEMS WITH MULTI-FRICTION AND FIXED BILATERAL CONSTRAINT<sup>1)</sup>

Peng Huilian<sup>2)</sup> Wang Shimin Wang Qi Guo Yiyuan

(*Dynamics and Control Department, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China*)

**Abstract** Modeling and simulating the dynamics of the multibody systems with bilateral constraints and dry friction are important in mechanical system and robotics. For smooth bilateral constraints, it is easy to solve the dynamical equations numerically. The dynamic equations of the multibody systems with the friction of constraint are the discontinuous differential-algebraic equations (DAE) and the equations cannot be expressed as being linear with respect to the generalized accelerations and the Lagrange multipliers directly. In the present paper, modeling of planar multi-rigid-body system with multi-friction and fixed-bilateral constraints is proposed. It is assumed that the system has sliding joints with Coulomb's dry friction and smooth hinge joints, while the sliding joints move along the fixed-slots. Firstly, the motion equations of the system are derived from Lagrange's equations of the first kind in Cartesian coordinate system, and constraint equations are expressed by local approach. A one-to-one map between the normal constraint forces and the Lagrange multipliers is established to analysis and compute the friction forces. Secondly, using the constraint equations and the principle of virtual work, the generalized forces of the friction forces are derived in the matrix form. The absolute value of Lagrange multiplier  $|\lambda|$  in the motion equations is given as  $\lambda \text{sgn}(\lambda)$  by sign function. Therefore, the sign function,  $\text{sgn}(\lambda)$ ,  $\text{sgn}(\dot{s})$  and  $\text{sgn}(\ddot{s})$ , included in the motion equations, correspond to Lagrange multipliers, the velocity and tangential acceleration of the slider, respectively. Thirdly, the DAE are transformed into ordinary differential equations (ODE) by means of the augmentation approach. An improved trial-and-error method is proposed according to the characteristics of the piecewise smooth of the systems, which can improve the efficiency of computation. Finally, an example of one degree of freedom mechanism is given by improved trial-and-error method and R-K method.

**Key words** multi-body system, bilateral constraint, modeling method, dry friction, Lagrange multiplier

---

Received 12 May 2008, revised 20 October 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672007).

2) E-mail: huilian.peng@gmail.com