

周期激励下分段线性电路的动力学行为¹⁾

张晓芳 陈章耀 季颖 毕勤胜²⁾

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

摘要 基于四阶自治分段线性电路的分岔特性, 探讨了两种幅值周期激励下该电路系统的复杂动力学行为. 给出了弱周期激励下系统共存的两种分岔模式及其产生的原因, 讨论了不同分岔模式下动力学行为的演化过程及混沌吸引子相互作用机理. 而随着激励幅值的增大, 即强激励作用下, 围绕两个原自治系统平衡点的周期轨道不再分裂, 从而导致共存的分岔模式消失. 指出无论在弱激励还是在强激励下, 由于系统的固有频率与外激励频率存在量级上的差距, 其相应的各种运动模式, 诸如周期运动、概周期运动甚至混沌运动均表现出明显的快慢效应, 进而从分岔的角度分析了不同快慢效应的产生机制.

关键词 周期激励, 非线性电路, 分岔, 混沌, 快慢效应

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2009)05-0765-10

引言

自蔡氏电路中的混沌现象被揭示以来, 非线性电路的理论和实验研究引起了各国学者的广泛关注, 成为当前电路研究中的热点课题之一^[1,2]. 各种混沌和超混沌电路被设计出来, 人们通过建立数学模型, 结合实验方法探讨了其中的复杂动力学行为, 如环面破裂、间歇、超混沌、混沌危机等^[3~7]. 在众多的混沌电路中, 蔡氏电路作为其中最具代表性的一种, 其典型的电路结构已成为理论和实验研究混沌的一个范例. 在此基础上, 人们还进一步研究了蔡氏电路的其他形式. 在 Chua 和 Lin^[8] 建立的三阶自治非线性电路的基础上, Stouboulos 等^[9] 和 Koliopanos 等^[10] 应用蔡氏二极管替代非线性电阻建立了一个四阶自治非线性电路, 讨论了其中的混沌演化过程并解释了由危机引起的间歇现象. 值得指出的是, 在这些模型中, 所引入的电阻具有分段线性的电压和电流关系. 这种分段线性导致向量场的非光滑, 由于非光滑约束处的奇异性可产生复杂的分岔现象^[11].

迄今为止, 无论是对于蔡氏三阶模型还是对修改后的四阶模型, 虽然取得了一些成果, 但这些工作大都是基于自治系统, 而实际电路往往是非自治的, 这些非自治因素可能来自于系统本身存在着具有交

变特性的电源^[12], 也可能来自于基于控制目的的控制器^[13]. 这些非自治因素的引入, 不仅改变了系统的结构, 同时也可能使得电路系统具有更为丰富的动力学行为, 诸如同宿及异宿分岔等^[14]. 本文通过引入具有交变特性的电源, 讨论周期激励下该四阶分段线性电路在不同激励强度下随参数变化的演化过程. 由于系统的固有频率与引入的外激励频率存在量级上的差距, 系统在运动过程中表现出明显的快慢效应.

1 非自治电路模型

在 Stouboulos 等^[9] 建立的四阶分段线性电路中引入一个电流周期变化的电源, 其电路结构如图 1 所示, 其中, 通过非线性电阻 R_N 的电流 i 与电压 v 成反对称的分段线性关系, 如图 2 所示. 其动力

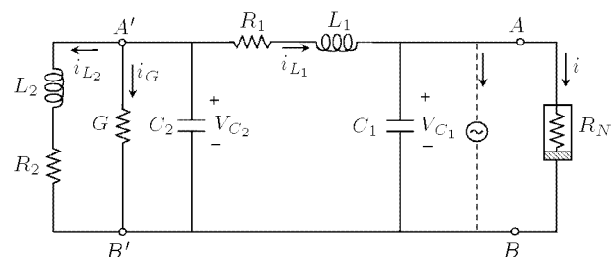


图 1 四阶非自治电路

Fig.1 The fourth-order nonautonomous electric circuit

2008-02-26 收到第 1 稿, 2009-01-05 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (20476041).

2) E-mail: qbi@ujs.edu.cn

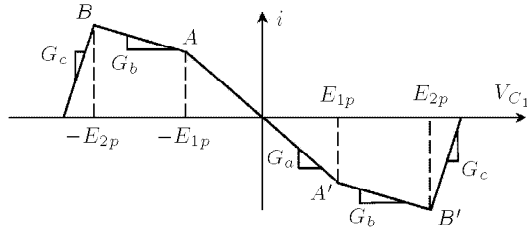


图 2 非线性电阻 R_N 的电流 i 与电压 v 的关系

Fig.2 The v - i characteristics of the nonlinear resistor R_N

学行为可以由如下数学模型刻画

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{C1}}{dt} &= \frac{1}{C_1}(i_{L1} - i - I_s \sin \omega t) \\ \frac{dv_{C2}}{dt} &= -\frac{1}{C_2}(Gv_{C2} + i_{L1} + i_{L2}) \\ \frac{di_{L1}}{dt} &= \frac{1}{L_1}(v_{C2} - v_{C1} - i_{L1}R_1) \\ \frac{di_{L2}}{dt} &= \frac{1}{L_2}(v_{C2} - i_{L2}R_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中通过非线性电阻 R_N 的电流 i 表示为

$$\begin{aligned} i &= g(v_{C1}) = G_C v_{C1} + 0.5(G_a - G_b) \cdot \\ &(|v_{C1} + E_{1p}| - |v_{C1} - E_{1p}|) + \\ &0.5(G_b - G_c)(|v_{C1} + E_{2p}| - |v_{C1} - E_{2p}|) \end{aligned} \quad (2)$$

引入变换 $t = \sqrt{L_1 C_1} \tau$, $v_{C1} = x_1$, $v_{C2} = x_2$, $i_{L1} = x_3$, $i_{L2} = x_4$, $\Omega = \omega \sqrt{L_1 C_1}$, 式 (1) 可以转化为如下无量纲形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{C_1}[x_3 - f(x_1) - I_s \sin \Omega \tau] \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -\frac{\sqrt{L_1 C_1}}{C_2}(Gx_2 + x_3 + x_4) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{L_1}(x_2 - x_1 - R_1 x_3) \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{L_2}(x_2 - R_2 x_4) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} f(x_1) &= G_C x_1 + 0.5(G_a - G_b) \cdot \\ &(|x_1 + E_{1p}| - |x_1 - E_{1p}|) + \\ &0.5(G_b - G_c)(|x_1 + E_{2p}| - |x_1 - E_{2p}|) \end{aligned} \quad (4)$$

显然, 式 (3) 具有 $O_2 \oplus O_2$ 对称性, 即在变换 $(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau) \rightarrow (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, \frac{\pi}{\Omega} + \tau)$ 下其形式保持不变, 因此, 其相应的解结构或者不同的解之间在相空间中可能保持一定的对称关系. 同

时, 由于系统的非线性因素主要来自于分段线性的电流与电压之间的关系, 控制向量场的方程在分段点会产生质的变化, 因此, 有必要首先给出无外激励下, 即自治系统随参数变化的分岔行为.

2 无外激励下系统的分岔分析

首先分析无外激励下, 即 $I_s = 0$ 时系统的分岔特性. 向量场 (3) 的平衡点可以表示为 $\mathbf{X}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^T$, 其中

$$\left. \begin{aligned} x_{20} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10} \\ x_{30} &= -\frac{1 + GR_2}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10} \\ x_{40} &= \frac{1}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

而 x_{10} 满足

$$\begin{aligned} &\frac{1 + GR_2}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10} + G_C x_{10} + 0.5(G_a - G_b) \cdot \\ &(|x_{10} + E_{1p}| - |x_{10} - E_{1p}|) + \\ &0.5(G_b - G_c)(|x_{10} + E_{2p}| - |x_{10} - E_{2p}|) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

显然, 由式 (6) 得到的 x_{10} 的数目和大小决定了自治系统平衡点的数目及其相应的位置, 其稳定性由如下特征方程决定

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (7)$$

对应于不同的参数条件, 方程 (7) 中的系数 a_1, a_2, a_3, a_4 可得到 3 种不同的表达式, 统一表示为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= G_x a + Gb + R_2 e + R_1 c \\ a_2 &= G_x a Gb + ca + cb + eb + Gb R_2 e + Gb R_1 c + \\ &G_x a R_2 e + R_1 c R_2 e + G_x a R_1 c \\ a_3 &= G_x a Gb R_1 c + G_x a c b + G_x a Gb R_2 e + \\ &G_x a e b + G_x a R_1 c R_2 e + Gb R_1 c R_2 e + \\ &cb R_2 e + eb R_1 c + ca R_2 e + ca Gb \\ a_4 &= ceab + G_x a Gb R_1 c R_2 e + ca Gb R_2 e + \\ &G_x a c b R_2 e + G_x a e b R_1 c \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $a = \sqrt{C_1 L_1} / C_1$, $b = \sqrt{C_1 L_1} / C_2$, $c = \sqrt{C_1 L_1} / L_1$, $e = \sqrt{C_1 L_1} / L_2$, G_x 的取值决定于 x_{10} 和 E_{1p}, E_{2p} 之间的关系. 当 $x_{10} \in (-\infty, -E_{2p})$ 或 $x_{10} \in$

$(E_{2p}, +\infty)$ 时, $G_x = G_c$; 当 $x_{10} \in [-E_{2p}, -E_{1p}]$ 或 $x_{10} \in [E_{1p}, E_{2p}]$ 时, $G_x = G_b$; 当 $x_{10} \in (-E_{1p}, E_{1p})$ 时, $G_x = G_a$. 由式 (7) 可以得到如下两种形式的分岔集. 一种为简单分岔集

$$S \quad a_4 = 0 \quad (a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0) \quad (9)$$

另一种为 Hopf 分岔集

$$H \quad a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 = 0 \quad (a_4 > 0) \quad (10)$$

这两种分岔集将参数空间划分为不同的区域, 当参数穿越这两种分岔集时, 系统的动力学行为可能产生定性变化. 为了进一步描述参数空间中这些分岔集, 取定参数

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 10.0 \text{ nF}, C_2 = 18.0 \text{ nF}, L_1 = 10.4 \text{ mH}, \\ L_2 &= 24.3 \text{ mH}, G = -0.5 \text{ mS}, \\ G_a &= -0.835 \text{ mS}, G_b = -0.515 \text{ mS}, G_c = 2.0 \text{ mS}, \\ E_{1p} &= 1.47 \text{ V}, E_{2p} = 9.00 \text{ V} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

此时分岔集可以表示成 R_1 和 R_2 的表达式. 需要指出的是, 由于在 $|x_1| = E_{1p}$ 及 $|x_1| = E_{2p}$ 时向量场会发生质的变化, 因此, 也相应地存在两条临界线. 在参数条件 (11) 下, 只存在 $|x_1| = E_{2p}$ 的临界线, 用 L 表示. 同时, 在一定参数条件下不同的平衡点相应的特征方程总具有至少一个正的特征值, 使得系统在平衡点失稳后一直趋向无界解, 我们分别用 N_1, N_2 和 N_3 表示这些临界条件. 这些分岔集及临界条件进而将参数平面 R_1 - R_2 分成对应于不同行为的 6 个区域 (见图 3).

在区域 ① 中存在两个相互对称的稳定的平衡点, 且 $|x_1| > E_{2p}$. 当参数穿过 H_1 或 H_2 曲线,

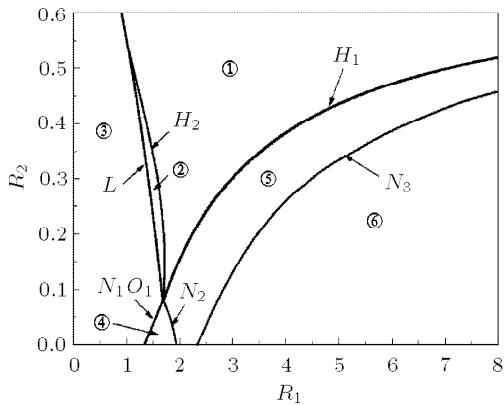


图 3 R_1 - R_2 平面上的分岔集

Fig.3 Bifurcation sets on the plane (R_1 - R_2)

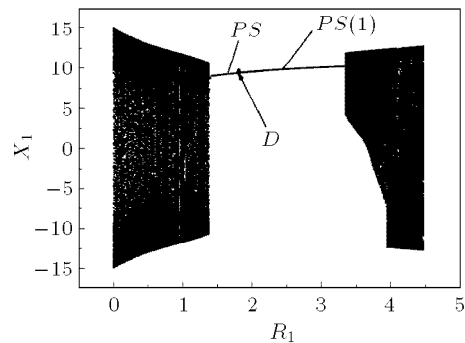
不同平衡点经 Hopf 分岔得到周期解, 在区域 ③ 中还可以观察到由周期运动到混沌的复杂动力学现象. 区域 ② 中除两个稳定的平衡点仍然保留外, 还出现了由不稳定的平衡点 $(0,0,0,0)$ 分岔产生的周期运动. 穿过临界线 L 后两个稳定的平衡点消失, 在区域 ③ 中只存在一个对称于原点的周期解. 在区域 ④ 和 ⑥ 中不存在有界解. 这些结论已通过数值计算得到了验证, 在此从略.

下面我们考虑存在周期激励作用, 即 $I_s \neq 0$ 时电路系统的分岔行为. 由于非自治系统的复杂性, 我们很难从理论上给出其分岔特性. 在此, 我们用数值方法分析. 为了揭示周期激励强度对系统的影响, 我们考察两种较为典型的激励幅值, 即 $I_s = 1.0 \text{ mA}$ 和 $I_s = 3.0 \text{ mA}$ 情况下系统随分岔参数 R_1 变化的动力学演化过程, 其中 $R_2 = 0.30 \text{ k}\Omega$, 其它参数由式 (11) 定义.

3 弱周期激励下系统的分岔分析

图 4 给出了 $I_s = 1.0 \text{ mA}$ 时系统的分岔图. 对于不同的初始条件, 系统存在着两种不同的分岔模式. 这两种共存的分岔模式是由于在 $I_s = 0$ 条件下相应存在着两个不同的稳定平衡点引起的, 在弱激励及一定的参数条件下, 外激励引发的周期运动对应于以这两个平衡点为中心的周期轨道.

由于选取的截面是以外激励周期为标准定义的, 不同的初值会在截面上形成不同的点集. 图 4(a) 和 4(b) 中的 PS 对应于同一具有对称结构的周期解, PS 在 D 点分裂, 导致两个不同的周期行为 $PS(1)$ 和 $PS(2)$.



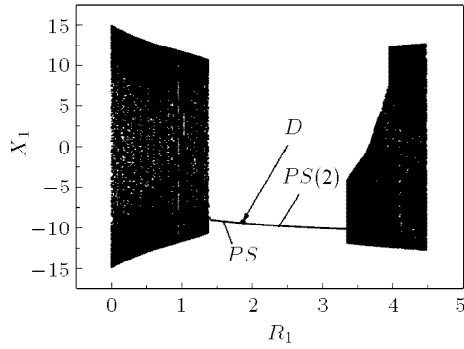
(a) 初始条件为 (0.01,0.01,0.01,0.01)

(a) Initial condition (0.01,0.01,0.01,0.01)

图 4 $I_s = 1.0 \text{ mA}$ 时系统随 R_1 变化的分岔图

Fig.4 Bifurcation diagram with the variation of R_1 for

$I_s = 1.0 \text{ mA}$



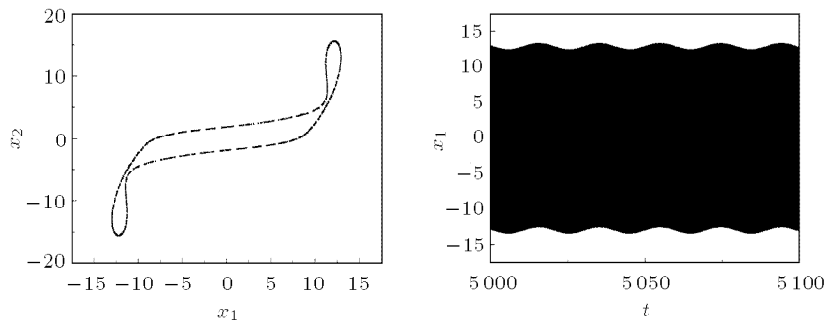
(b) 初始条件为 $(-0.01, -0.01, -0.01, -0.01)$
 (b) Initial condition $(-0.01, -0.01, -0.01, -0.01)$

图 4 $I_s = 1.0 \text{ mA}$ 时系统随 R_1 变化的分岔图 (续)

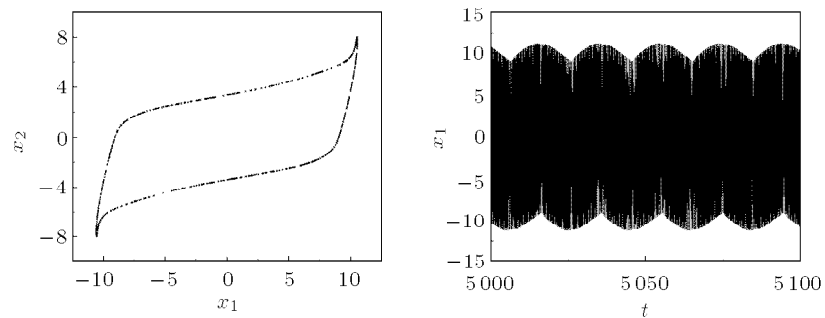
Fig.4 Bifurcation diagram with the variation of R_1 for $I_s = 1.0 \text{ mA}$ (continued)

当 R_1 相对较小, 即 $R_1 \leq 1.387 \text{ k}\Omega$ 时, 电路系统呈现概周期振荡 (见图 5), 其中包含两个频率分别对应于外激励的频率 $f' = 0.0510$ 和原自治系统平衡点产生 Hopf 分岔引起的频率 f , 频率 f 会随着 R_1 的增加而减少. 例如, 当 $R_1 = 0.5 \text{ k}\Omega$ 时 $f = 5.6240$; $R_1 = 1.387 \text{ k}\Omega$ 时 $f = 4.2769$.

从相图中我们发现此时概周期解相对于坐标原点对称, 满足方程 (3) 的对称性. 仔细分析概周期解的特性可以发现, 其轨迹围绕着原系统两个平衡点以 f 频率作快速振荡, 同时由于外激励频率的影响, 这些轨迹又围绕以 f' 频率的周期轨道作低频振荡, 从而整个解轨迹扭扩为环面解, 即概周期运动. 而在 Hopf 分岔后, 扭扩后的环面解失稳, 演化为连接围绕原自治系统两个平衡点来回振荡的周期解.



(a) $R_1 = 0.5 \text{ k}\Omega$



(b) $R_1 = 1.387 \text{ k}\Omega$

图 5 概周期解的庞加来截面和时间历程

Fig.5 Poincaré maps and time histories of quasi-periodic solutions

此时快慢效应非常明显 (见图 6(a)).

随着 R_1 的增加, 围绕原系统两个平衡点的高频振荡越来越弱 (见图 6(b)), 直到 $R_1 = 1.840 \text{ k}\Omega$, 连接围绕两个平衡点振荡的轨迹断裂, 从而演化为两个共存并相互对称的周期运动 (见图 6(c)).

当 R_1 增加至 $R_1 = 3.349 \text{ k}\Omega$ 时, 两个周期解均

分别通过各自的 Hopf 分岔导致两个对称的概周期解. 其相应的轨迹随着 R_1 的增加在相空间中不断扩大. 当 $R_1 = 3.637 \text{ k}\Omega$ 时, 与 Hopf 分岔相关的频率产生倍化, 并进一步通过环面破裂分别进入混沌 (见图 7(a)). 随着 R_1 的增加, 两个共存的混沌吸引子轨迹在相空间中不断扩张, 直至相互作用最终形成

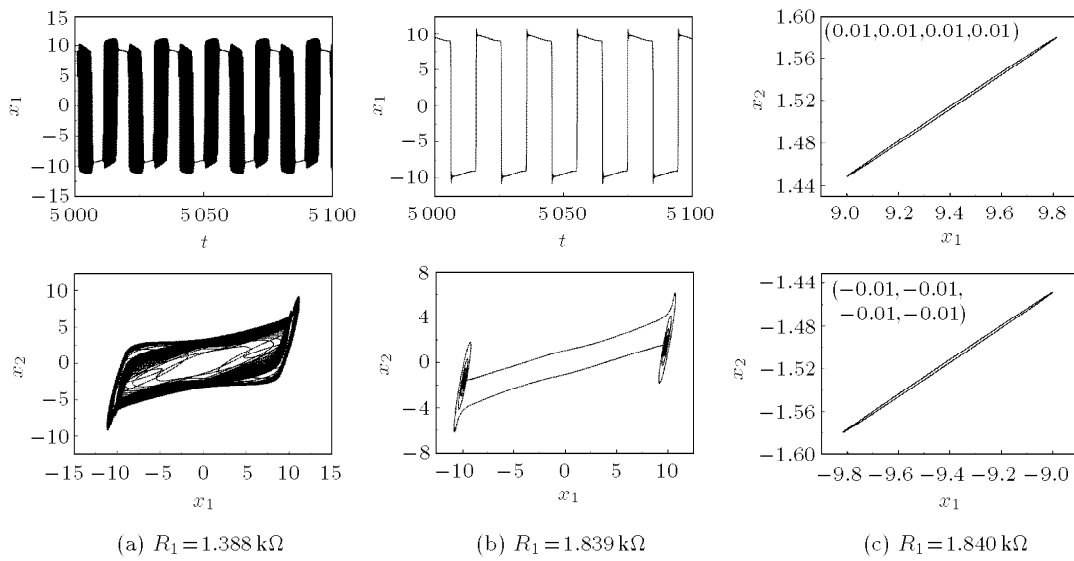
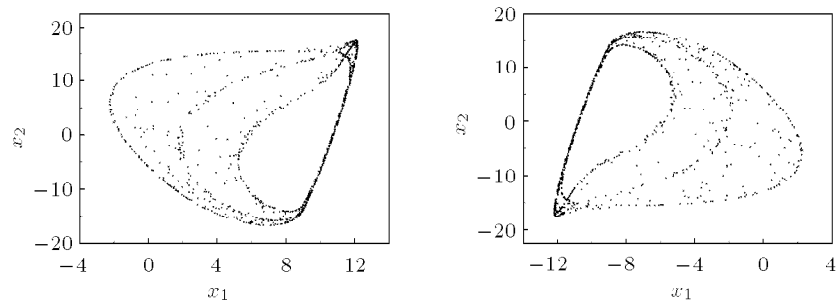


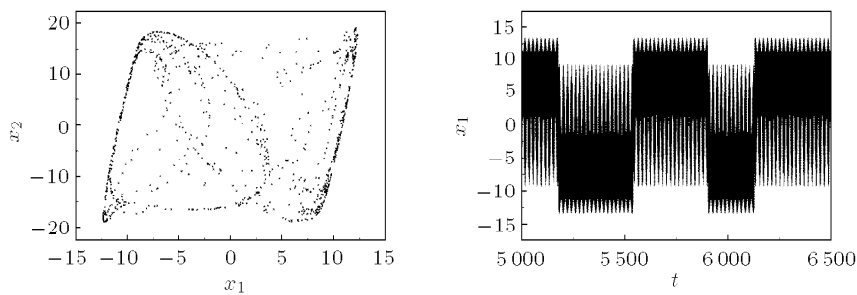
图 6 系统周期解的时间历程和相图

Fig.6 Time histories and phase portraits of periodic solutions



(a) $R_1 = 3.75 \text{ k}\Omega$ 时不同初始条件下的庞加来截面

(a) Poincare map for $R_1 = 3.75 \text{ k}\Omega$ with different initial condition



(b) $R_1 = 3.944 \text{ k}\Omega$ 时的庞加来截面图及时间历程

(b) Poincare map and time history for $R_1 = 3.944 \text{ k}\Omega$

图 7 混沌的庞加来截面图及时间历程

Fig.7 Poincare maps and time history of chaos

一个更为复杂的混沌吸引子 (见图 7(b)). 该扩大的混沌吸引子包含了两个对称的混沌吸引子的信息, 这也可以从其相应的时间历程中得到证实, 即扩大

了的混沌吸引子每隔一段时间分别呈现出原来两个混沌吸引子的特征.

下面我们从分岔的角度给出图 6 中快慢现象的

产生机制. 由于外激励频率和系统的固有频率之间存在着量级上的差距, 因而整个过程表现出明显的快慢运动的特征. 当系统在 $R_1 = 1.388 \text{ k}\Omega$ 由概周期解分岔为周期运动后, 虽然系统按照周期激励的频率进行周期振荡, 但概周期解的后续效应依然存在. 不过, 此时连接围绕原系统两个平衡点来回振荡的轨迹不再分布于某一环面上, 而是包含了两个不同的分岔过程. 图 8(a) 给出了此时该周期解的结构示意图. 当轨迹从 A 点出发, 近似按照系统的固有频率作快尺度上的振荡, 这种振荡会导致慢尺度上各参数的变化, 直到 B 点经历亚临界 Andronov-Hopf 分岔 (subcritical Andronov-Hopf bifurcation, SAHB) 进入准静态过程, 这种准静态也同样会引起快尺度

上的动力学结构突变, 在 C 点由鞍结同宿轨道分岔 (saddle-homoclinic orbit bifurcation, SHOB) 进入快尺度上近似按照固有频率的快速振荡, 而同样又分别由 SAHB 和 SHOB 回到 A 点. 整个系统的周期刚好等于这一循环过程完成所需要的时间, 即外激励的周期 (慢尺度上的一个完整周期). 快时间尺度上的高频振荡对应于时间历程中快速变化的轨迹集中区, 而连接不同集中区的轨迹即相应于准静态过程. 这一特点与神经元放电节律非常接近^[15].

随着 R_1 的增大, 在快尺度上的高频振荡越来越弱 (见图 8(b),(c)), 最终分裂为两个共存的周期解. 图 9 给出了这一分裂过程的示意图.

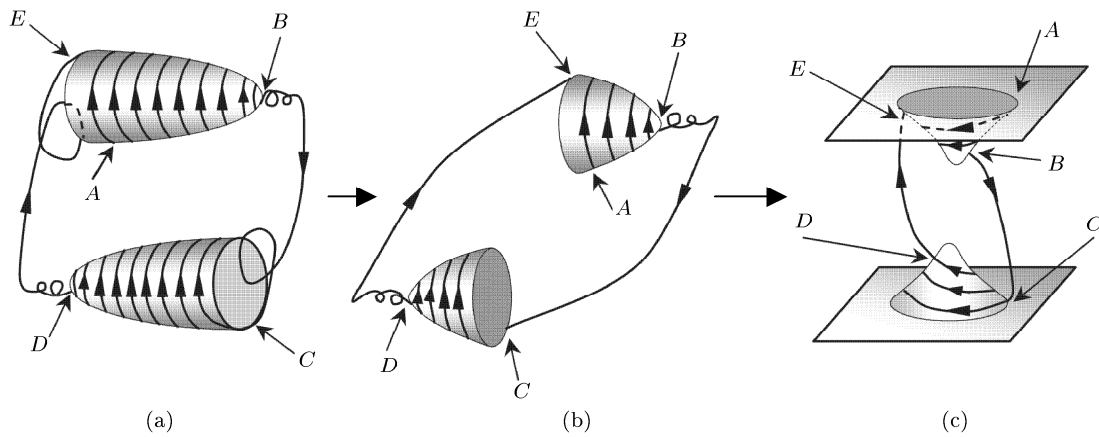


图 8 快慢效应的分岔示意图

Fig.8 Bifurcations with fast-slow effect

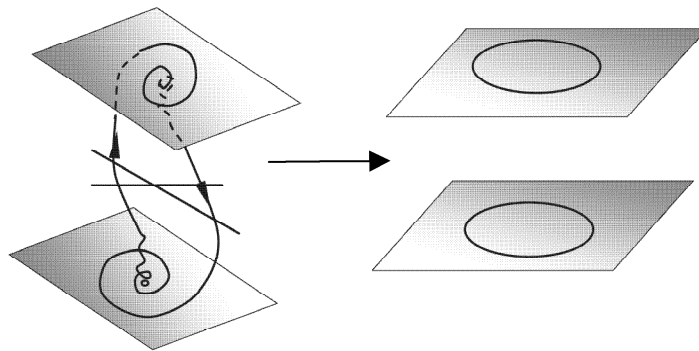


图 9 周期解分裂过程示意图

Fig.9 Splitting process from periodic movement

4 强周期激励下系统的分岔分析

随着周期激励强度的增加, 其分岔行为发生了

定性的变化. 图 10 给出了 $I_s = 3.0 \text{ mA}$ 时其系统动力学的演化过程. 我们发现此时只存在一种分岔模式, 所有吸引子的结构在空间中具有对称性.

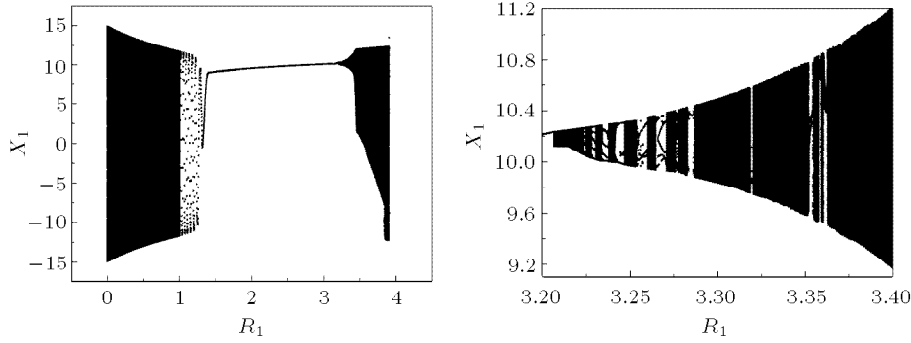


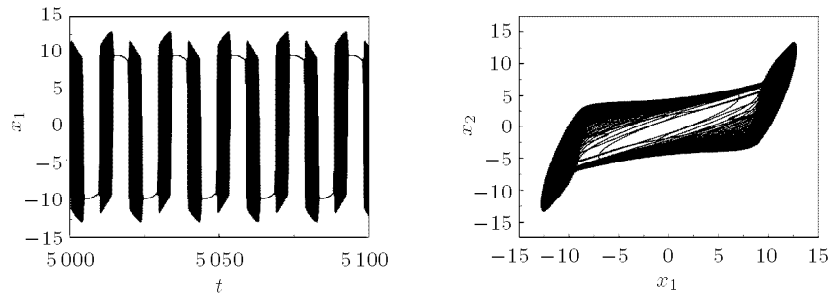
图 10 $I_s = 3.0\text{ mA}$ 时系统随 R_1 变化的分岔图

Fig.10 Bifurcation diagram with the variation of R_1 for $I_s = 3.0\text{ mA}$

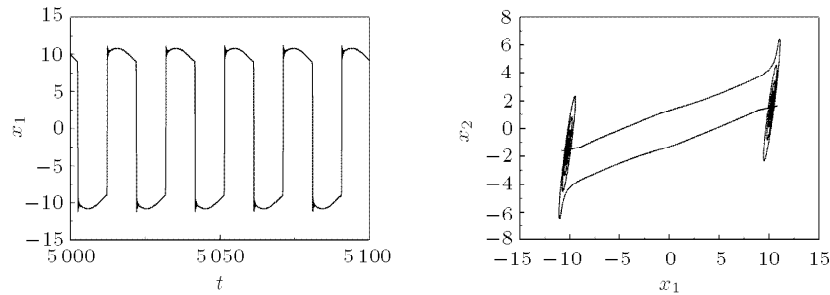
下面我们详细比较两种不同幅值激励下的行为差异. 当 $I_s = 3.0\text{ mA}$ 时, 在 R_1 相对较小时系统仍表现为关于原点对称的概周期解, 其解的特性与 $I_s = 1.0\text{ mA}$ 相似. 只不过 SAHB 提前产生, 在 $R_1 = 1.005\text{ k}\Omega$ 时概周期解失稳进入周期运动 (见图 11),

随着 R_1 的继续增加, 其周期解运动的演化过程也与 $I_s = 1.0\text{ mA}$ 类似. 此时电路的快慢效应同样存在.

值得指出的是, 该对称的周期解不会分裂为两个对称的周期解, 而是直接由 Hopf 分岔进入关于原点对称的概周期运动 (见图 12). 相应地, 该概周期



(a) $R_1 = 1.1\text{ k}\Omega$



(b) $R_1 = 2.0\text{ k}\Omega$

图 11 系统周期解的时间历程和相图

Fig.11 Time histories and phase portraits of periodic solutions

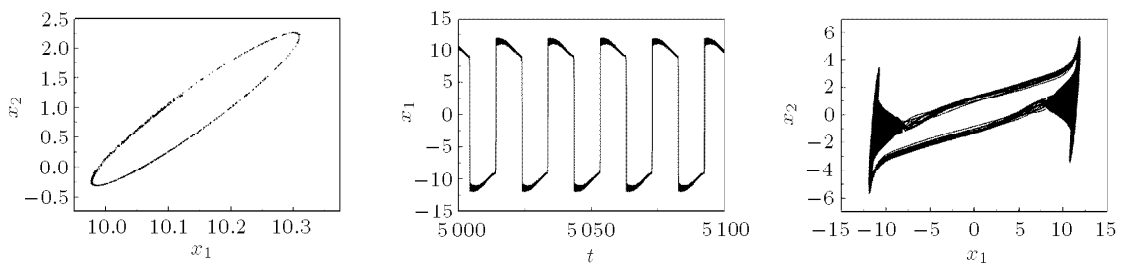


图 12 $R_1 = 3.248\text{ k}\Omega$ 时的庞加来截面、时间历程及相图

Fig.12 Poincaré map, time history and phase portrait for $R_1 = 3.248\text{ k}\Omega$

解的绝大部分轨迹围绕着原自治系统的两个对称的平衡点振荡，而连接这两部分振荡的轨迹分布在扭扩的环面上。

随着 R_1 的继续增加，概周期运动失稳进入混沌

振荡。与弱激励不同的是此时只存在一个关于原点对称的混沌吸引子。从图 13 中可以看出混沌吸引子呈现亚铃形状，即混沌轨迹每隔一段时间分别集中在空间中两个对称的区域中。

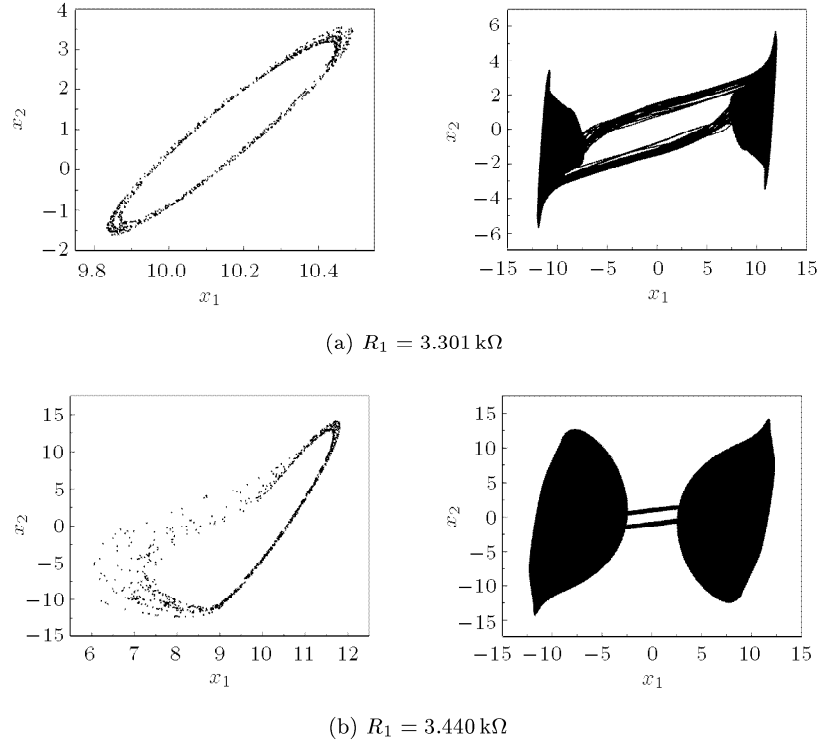


图 13 混沌运动的庞加来截面和相图

Fig.13 Poincare maps and phase portraits for chaos

这两个区域不断地扩张，最终形成一片。有必要指出的是，由于不同量级频率成分的存在，混沌结构依然呈现出这种快慢效应，这也可以从其时间

历程上得到证实，即在不同的时间区间上分别表现出快和慢的节律(见图 14)。

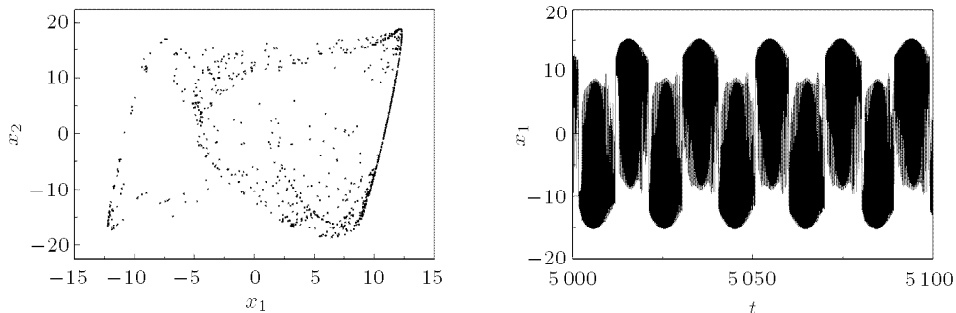


图 14 $R_1 = 3.880 \text{ k}\Omega$ 时的庞加来截面和时间历程

Fig.14 Poincare map and time history for $R_1 = 3.880 \text{ k}\Omega$

图 15 从分岔的角度定性地给出了由周期解进入概周期解的演化过程。当系统呈现为周期振荡时，快尺度上的高频振荡由 SAHB 进入准静态(即慢变过程)，并由 SHOB 再次进入快变过程，这种循环构成

一个完整的周期(见图 15(a))。当 R_1 增加到 $3.248 \text{ k}\Omega$ 时，由 Hopf 分岔将整个慢变过程扭扩为广义相空间中的环面(见图 15(b))，系统中会有两个不同的频率构成 D_1, D_2 和 D_3 3 个环面，其中对称的 D_1 和 D_2

均对应于快变频率, 即快尺度下的 D_1 和 D_2 环面以及慢尺度下的 D_3 环面. 系统在快尺度上的高频振荡 (如环绕 D_1) 由 SAHB 演化为慢尺度上的振荡 (环绕

D_3), 该振荡又由 Hopf-Hopf 分岔演化为环绕 D_2 的高频振荡, 这几个环面上的运动组合为系统整个概周期过程.

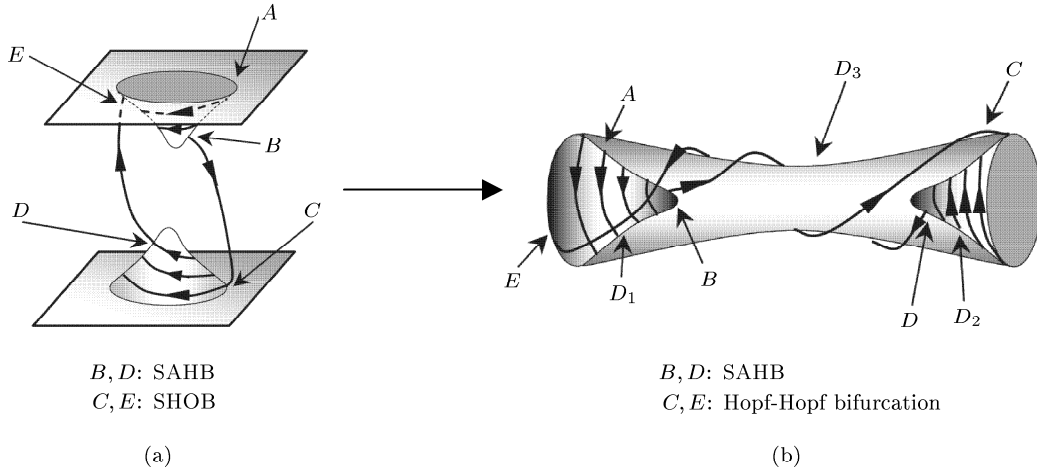


图 15 快慢效应的分岔示意图

Fig.15 Bifurcation details for fast-slow effect

比较两种情形下的动力学演变过程, 可以发现两种情况下都存在一个频率很高的高频振荡, 而这个频率与系统的固有频率有关. 然而在弱激励下, 由于激励的振幅较小, 振荡产生一个周期吸引子, 此周期吸引子分裂成一对共存的对称的周期解, 由分岔产生共存的概周期解直至混沌解, 再由混沌吸引子相互作用形成一个扩大的混沌吸引子. 而当增大周期激励的强度, 共存现象消失, 系统的解始终是关于原点对称的. 可见, 周期激励的幅值不仅影响到系统的分岔模式, 同时也改变了系统进入复杂性的道路.

5 结 论

周期激励下四阶分段线性电路具有十分丰富的动力学行为. 由于原自治系统中共存有两个对称的稳定平衡点, 当外激励幅值较小时, 随着参数的变化, 电路系统存在有两种不同的分岔模式. 概周期解逐渐演变为围绕这两个平衡点的周期轨道, 这一周期轨道在一定条件下会分裂成两个分别围绕两个平衡点的周期运动, 进而由 Hopf 分岔演化为两个对称的概周期运动, 并分别导致不同的混沌吸引子, 两个混沌吸引子在空间上不断成长产生相互作用, 进一步演化为一个扩大的混沌吸引子. 随着外激励幅值的增大, 围绕两个平衡点的周期轨道不再破裂, 而是直接由环面破裂进入具有对称结构的混沌吸引子, 也即共存现象消失, 只存在一种分岔模式.

同时, 由于非线性电路的固有频率与外激励频率存在量级上的差距, 无论是在弱激励还是在强激励情况下, 系统均呈现出明显的快慢效应, 即在不同的时间区域上表现出快和慢的节律, 不同时间尺度上的分岔模式的组合引起吸引子结构的变化, 进而影响着系统进入混沌的道路.

参 考 文 献

- 1 Baptista MS, Caldas IL. Type-II intermittency in the driven double scroll circuit. *Phys D: Nonlinear Phenomena*, 1999, 132(3): 325~338
- 2 Contou-Carrere MN, Daoutidis P. An output feedback precompensator for nonlinear DAE systems with control-dependent state-space. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1831~1835
- 3 Fettweis A. Nonlinear kirchhoff circuits and relativity theory. *Int J of Electronics and Communications*, 2004, 58(1): 21~29
- 4 Chan WCY, Tse CK. On the form of control function that can lead to chaos in discontinuous—mode DC/DC converters. *IEEE Power Electron Spec Conf Rec*, 1997. 1317~1322
- 5 Yassen MT. On hyperchaos synchronization of a hyperchaotic Lü system. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2008, 68(11): 3592~3600
- 6 Zhang H, Ma X, Xue B, et al. Study of intermittent bifurcations and chaos in boost PFC converters by nonlinear discrete models. *Chaos, Solutions & Fractals*, 2005, 23(2): 431~444
- 7 Werner JP, Stemler T, Benner H. Crisis and stochastic resonance in Shinriki's circuit. *Phys D: Nonlinear Phenomena*,

- 2008, 237(6): 859~865
- 8 Chua LO, Lin GN. Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans Circ Syst*, 1990, 37(7): 885~902
- 9 Stouboulos IN, Miliou AN, Valaristos AP, et al. Crisis induced intermittency in a fourth-order autonomous electric circuit. *Chaos, Solutions & Fractals*, 2007, 33: 1256~1262
- 10 Koliopoulos CL, Kyprianidis IM, Stouboulos IN, et al. Chaotic behaviour of a fourth-order autonomous electric circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 16: 173~182
- 11 Qin ZY, Lu QS. Non-smooth bifurcation and chaos in a DC-DC buck converter. *Chin Phys Lett*, 2007, 24(4): 886~889
- 12 Anishchenko VS, Vadivasova TE, Sosnovtseva O. Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven system. *Phys Rev*, 1996, E54: 3231~3234
- 13 Liu Z. Strange nonchaotic attractors from periodically excited Chua's circuit. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2001, 11: 225~230
- 14 Karagiannopoulos CG. A model for dielectrics experiencing partial discharges under high electric fields. *J Electrostatics*, 2007, 65: 535~541
- 15 Izhikevich EM. Neural excitability, spiking and bursting. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 1171~1266

(责任编辑: 陶彩军)

THE DYNAMICAL BEHAVIOR OF A PIECEWISE-LINEAR ELECTRIC CIRCUIT WITH PERIODICAL EXCITATION¹⁾

Zhang Xiaofang Chen Zhangyao Ji Ying Bi Qinsheng²⁾
(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract Since the chaotic phenomenon in Chua's circuit was reported, the complicated dynamics in nonlinear circuits has been one of the key topics to attract a lot of researchers. Based on Chua's circuits, many modified models have been established, which exhibit rich nonlinear behaviors, such as intermittency and chaos crisis. Because of the piecewise-linear function between the current and the voltage introduced, non-smooth bifurcation may occur at the singular positions. Up to now, most of the obtained results focus on the dynamics of autonomous vector fields. However, many real electric circuits are non-autonomous, in which the time-dependent terms may come from the alternating current or the controllers. Therefore, it is very important to explore the evolution of the dynamics of such types of systems.

Based on the bifurcation prosperities of a fourth-order autonomous piecewise-linear electric circuit, complicated dynamics of the oscillator with periodic excitation for two different excitation amplitudes has been investigated in details. Two coexisted bifurcation forms for weak excitation are presented. Different chaotic attractors can be observed via sequences of associated bifurcations, which may interact with each other to form an enlarged chaotic attractor. While for the relatively strong excitation, the periodic orbit circling around the original two equilibrium points does not split into two parts, resulting in the disappearance of the coexisted phenomenon. Because of the different scale between the natural frequency and the excitation frequency, fast-slow effect was obviously found on the behaviors of both the weak and strong excitation, such as periodic solutions, quasi-periodic movements, and even for chaotic oscillation. Furthermore, the mechanism of fast-slow effect has been discussed from the view point of bifurcation.

Key words periodic excitation, nonlinear electrical circuit, bifurcation, chaos, fast-slow effect

Received 26 February 2008, revised 5 January 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation Of China (20476041).

2) E-mail: qbi@ujs.edu.cn