

# 热力学相容的混凝土各向异性单边损伤模型<sup>1)</sup>

吴建莹<sup>2)</sup>

(华南理工大学土木工程系; 华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510640)

**摘要** 微裂缝演化(损伤)引起的各向异性和单边效应,对于混凝土材料和结构的变形和内力有非常重要的影响.在描述单边效应时,已有的各向异性损伤模型均会得出与热力学基本原理相矛盾的结论即损伤卸载时能量耗散不为零.基于不可逆热力学和内变量理论,直接以材料柔度张量的增量作为损伤内变量,建立了各向异性单边损伤模型的一般形式,给出了热力学相容的投影算子,推导了模型的率本构关系.文中详细发展了模型的 Newton-Raphson 数值实现算法及其算法一致性模量,建立了合理的损伤准则和演化法则并应用于混凝土材料.数值模拟结果初步验证了建议模型的有效性.需要说明的是,模型完全构筑于热力学基础上,无需引入应变等效或应变能等效等经验性假定.

**关键词** 混凝土, 损伤力学, 本构关系, 损伤诱致各向异性, 单边效应

**中图分类号:** TU311, O346.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)05-0696-12

## 引 言

一般来说,材料细观结构微缺陷(如金属和合金材料中的微孔洞和微剪切带<sup>[1,2]</sup>、高聚物材料中的微孔洞和银纹<sup>[3]</sup>等)的萌生、演化和融合等是导致材料最终发生破坏的主要影响因素.对于混凝土等准脆性材料而言,在初始状态下一般可视为各向同性.在外载荷作用下,浇注和养护过程中形成的初始微缺陷将会沿着大致垂直于最大主应力的方向发展而形成微裂缝<sup>[4]</sup>.同时,随着应力历史的变化,这些微裂缝的发展方向还可能发生一定的转动或形成多条微裂缝<sup>[5]</sup>,这将导致材料呈现出明显的各向异性特性,称之为损伤诱致各向异性<sup>[6]</sup>.此外,在拉应力作用下微裂缝张开时,将会导致材料刚度退化和柔度增加;载荷反向后,在压应力作用下微裂缝则会闭合(即损伤被抑制),材料刚度又基本恢复.这种微裂缝张开—闭合—再张开过程引起的刚度变化现象即所谓“单边效应”<sup>[7]</sup>.上述微裂缝演化(损伤)引起的材料各向异性和单边效应,对于反复加载<sup>[7]</sup>或非比例加载<sup>[8]</sup>等复杂载荷作用下混凝土材料和结构的变形和内力有非常重要的影响.

自从 Kachanov<sup>[9]</sup>最早提出损伤力学的基本思想并用于分析金属蠕变问题以来,损伤力学已经逐渐

发展成为包括连续损伤力学和细观损伤力学等在内的一门相对独立的固体力学分支<sup>[4]</sup>.其中,尽管近年来细观损伤力学<sup>[10~12]</sup>发展非常迅猛,但通过引入标量、矢量、二阶或四阶甚至更高阶张量形式的损伤内变量<sup>[13]</sup>,连续损伤模型能够在宏观上反映微裂缝演化对材料非线性行为的影响,在混凝土材料本构建模领域得到了非常广泛的应用<sup>[14~29]</sup>.从物理意义上讲,“损伤”表征为材料的刚度退化,因此,采用刚度张量(或柔度张量,或其增量)作为损伤变量建立损伤模型更为合理<sup>[30]</sup>.基于类似的考虑,文献<sup>[14,15]</sup>引入了退化应变率的概念,并为众多学者所采用<sup>[16~18,20]</sup>,随后 Carol 等<sup>[21]</sup>归纳了弹性退化(损伤)理论; Govindjee 等<sup>[23]</sup>和 Meschke 等<sup>[25]</sup>分别将该理论推广至多面弹性损伤和弹塑性损伤模型.

在连续损伤力学基本理论框架内,通过将某些二阶张量如应力<sup>[4,16,20]</sup>、应变<sup>[17,18]</sup>或有效应力<sup>[26~29]</sup>等进行正、负分解并引入相应的四阶投影算子<sup>[16,17,31]</sup>,已有部分混凝土损伤模型<sup>[4,16~18,20,26~29]</sup>能够描述单边效应的影响.然而,研究<sup>[31]</sup>表明:对于各向同性损伤,已有模型往往可以给出令人满意的预测结果,而在描述各向异性损伤时,这些模型会给出损伤卸载能量耗散不为零等

2008-03-03 收到第 1 稿, 2009-01-08 收到修改稿.

1) 亚热带建筑科学国家重点实验室自主研究课题资助项目(2008ZA10).

2) E-mail: jywu@scut.edu.cn

热力学不相容结论. 此外, 由于投影算子的引入, 已有模型的数值算法过于复杂或无法线性化而计算效率十分低下<sup>[32]</sup>, 大大限制了模型的应用.

基于不可逆热力学原理和内变量理论, 本文直接以材料柔度张量的增量作为损伤内变量, 建立了热力学相容的各向异性单边损伤模型的一般形式, 给出了热力学相容的投影算子, 推导了模型的率本构关系并发展了其数值实现算法和算法一致性度量. 在此基础上, 建立了合理的损伤准则和演化法则, 并将上述模型应用于混凝土材料. 数值模拟结果初步验证了模型的有效性. 建议模型完全构筑于热力学基础上, 无需引入应变等效或应变能等效等经验性假定. 需要说明的是, 模型不考虑动态载荷下混凝土材料的应变率效应, 其率相关推广将在后续研究中给出. 此外, 由于不可恢复变形可以通过塑性力学方法加以描述, 本文将集中讨论微裂缝演化 (损伤) 对材料非线性行为的影响, 因此, 建议模型隶属于弹性损伤范畴, 但推广至弹塑性损伤模型不存在原则性的困难.

为方便后文表述, 二阶和四阶单位张量分别记为  $\mathbf{1}$  和  $\mathbf{I}$ , 此外, 引入以下张量运算符

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= A_{ij}B_{ij}, \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl} \\ (\mathbf{A} \otimes \otimes \mathbf{B})_{ijkl} &= \frac{1}{2}(A_{il}B_{jk} + A_{ik}B_{jl}) \\ \mathbf{X} :: \mathbf{Y} &= X_{ijkl}Y_{ijkl} \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  均为二阶对称张量,  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  均为四阶张量,  $i, j, k$  和  $l$  为分量下标.

## 1 热力学相容的单边弹性损伤模型

### 1.1 本构关系

传统的连续损伤模型中, 一般选取某些标量或二阶张量作为损伤内变量, 其选择具有较大的随意性. 同时, 为了描述损伤演化对材料宏观力学性能的影响, 通常还需要引入诸如应变等效<sup>[33]</sup>或应变能等效<sup>[6]</sup>等假定. Krajcinovic<sup>[30]</sup>从原子、微细观和宏观等尺度综合分析了材料细观结构非均匀特性和微裂缝非线性演化特征对材料宏观力学行为的影响, 结果表明: 从一般意义上讲, 作为沟通微细观和宏观尺度的桥梁, 选取材料的柔度或刚度张量作为损伤内变量更为合理. 对于初始各向同性材料, 其线弹性柔度张量  $\mathbf{C}_0$  和刚度张量  $\mathbf{S}_0$  分别表示为

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{E_0}[(1 + \nu_0)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \nu_0\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}], \quad \mathbf{S}_0 = \mathbf{C}_0^{-1} \quad (1)$$

式中,  $E_0$  和  $\nu_0$  分别表示材料的弹性模量和泊松比. 出现损伤后, 微裂缝演化导致材料刚度  $\mathbf{S}$  发生退化, 而柔度张量  $\mathbf{C}$  则相应增加. 若将损伤变量统一标记为  $B_*$  (可以为标量、二阶张量或四阶张量, 下标 “\*” 表示张量的阶数), 则可以给出如下关系式

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(B_*), \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{C} : \mathbf{S} = \mathbf{I} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{A}$  表示柔度张量的增量, 为损伤内变量  $B_*$  的非线性函数.

注意到微裂缝演化与拉应力的方向和大小密切相关, 将应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  分解为其正、负分量之和的形式, 即

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^- \quad (3)$$

其中, 正、负应力分量  $\boldsymbol{\sigma}^+$  和  $\boldsymbol{\sigma}^-$  分别表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \sum_i \langle \sigma^{(i)} \rangle \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)}, \quad \boldsymbol{\sigma}^- = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^+ \quad (4)$$

式中,  $\sigma^{(i)}$  为应力  $\boldsymbol{\sigma}$  的第  $i$  个特征值, 相应的特征向量为  $\mathbf{n}^{(i)}$ ;  $\langle \cdot \rangle$  为 McAuley 尖括号, 定义为  $\langle x \rangle = \max(0, x)$ . 引入四阶对称投影算子  $\mathbf{P}^\pm$ , 将式 (4) 写为

$$\boldsymbol{\sigma}^\pm = \mathbf{P}^\pm : \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{P}^+ + \mathbf{P}^- = \mathbf{I} \quad (5)$$

对于弹性损伤材料, 其卸载路径直线指向原点, 而且在整个卸载—再加载 (再加载指再加载至先前的卸载点, 后文同) 的过程中, 材料的损伤状态保持为当前的值不变, 即  $\dot{B}_* = 0$ . 此时, 弹性损伤材料的 Gibbs 自由能势  $\psi$  依赖于当前的应力  $\boldsymbol{\sigma}$  和损伤状态  $B_*$ , 即

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\sigma}, B_*) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{C}_0 + \mathbf{A}) : \boldsymbol{\sigma} = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^+ : \mathbf{A}^+ : \boldsymbol{\sigma}^+ + \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^- : \mathbf{A}^- : \boldsymbol{\sigma}^- \end{aligned} \quad (6)$$

其中, 柔度张量的增量  $\mathbf{A}$  表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^+ : \mathbf{A}^+ : \mathbf{P}^+ + \mathbf{P}^- : \mathbf{A}^- : \mathbf{P}^- \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{A}^+$  和  $\mathbf{A}^-$  即为损伤内变量  $B_*$ , 其物理意义为分别在  $\boldsymbol{\sigma}^+$  和  $\boldsymbol{\sigma}^-$  单独作用下, 微裂缝演化引起的材料柔度增量. 局限于纯力学范畴 (等温、绝热状态), 任意可能的变形过程均需满足不可逆热力学第二定律, 即如下 Clausius-Duhem 不等式<sup>[4]</sup>

$$\dot{D} = \dot{\psi} - \boldsymbol{\epsilon} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \quad (8)$$

将式 (6) 对时间微分并代入到式 (8) 给出

$$\dot{D} = \dot{\psi} - \epsilon : \dot{\sigma} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \epsilon \right) : \dot{\sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda} :: \dot{\Lambda} \geq 0 \quad (9)$$

由  $\dot{\sigma}$  的任意性, 可以给出如下割线应力 - 应变关系式

$$\epsilon = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = C : \sigma, \quad \sigma = S : \epsilon, \quad S = C^{-1} \quad (10)$$

将式 (10) 两边对时间微分, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= C : \dot{\sigma} + \dot{C} : \sigma = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^d \\ \dot{\sigma} &= S : \dot{\epsilon} + \dot{S} : \epsilon = S : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^d) = S : \dot{\epsilon}^e \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中,  $\dot{\epsilon}^e = C : \dot{\sigma}$  为阻止微裂缝继续发展的弹性应变率即损伤不进一步发展 (保持上一步的柔度  $C$  或刚度  $S$  不变) 的前提下, 应力的增量  $\dot{\sigma}$  引起的应变, 而  $\dot{\epsilon}^d = \dot{C} : \sigma = \dot{\Lambda} : \sigma$  则为损伤应变率即在当前应力水平下, 由于刚度退化 (或柔度增加) 而导致的应变, 也称为退化应变率. 其中, 根据式 (7) 率张量  $\dot{\Lambda}$  表示为

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \dot{C} = 2P^+ : \Lambda^+ : \dot{P}^+ + 2P^- : \Lambda^- : \dot{P}^- + \\ &P^+ : \dot{\Lambda}^+ : P^+ + P^- : \dot{\Lambda}^- : P^- \end{aligned} \quad (12)$$

上述损伤应变率最早由 Hueckel 和 Maier<sup>[15]</sup> 给出, 随后被文献 [16,21] 采用.

### 1.2 热力学相容条件

上述本构关系的推导过程中, 忽略了其中的关键步骤: 既然依据热力学基本原理给出, 所得到的本构关系成立与否需要验证其是否满足不可逆热力学的基本要求. 对于弹性损伤模型而言, 式 (10) 成立的前提是式 (6) 中定义的函数  $\psi$  确实是有效的 Gibbs 自由能势. 上述要求实际上等效为<sup>[31]</sup>: 当材料损伤保持恒定不变即  $\dot{B}_* = 0$  时, 如下伪能量耗散率  $\dot{D}^{sp}$  应该为零, 即

$$\dot{D}^{sp} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \epsilon \right) : \dot{\sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda} :: \left( \dot{\Lambda} |_{\dot{B}_*=0} \right) = 0 \quad (13)$$

当式 (10) 成立时, 式 (13) 给出的伪能量耗散率  $\dot{D}^{sp}$  简化为

$$\begin{aligned} \dot{D}^{sp} &= \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda} :: \left( \dot{\Lambda} |_{\dot{B}_*=0} \right) = \frac{1}{2} \sigma : \left( \dot{\Lambda} |_{\dot{B}_*=0} \right) : \sigma = \\ &\sigma : (P^+ : \Lambda^+ : \dot{P}^+ + P^- : \Lambda^- : \dot{P}^-) : \sigma = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

对于 Green 弹性材料, 当不考虑单边效应时, 在整个损伤卸载 - 再加载过程中损伤状态不变即意味

着其柔度张量保持当前值不变, 即  $\dot{B}_* = 0 \iff \dot{D}^{sp} |_{\dot{B}_*=0} = 0$ , 此时上述热力学要求实际上等效于本构关系式 (10). 然而, 对于上述单边弹性损伤模型中引入了投影算子  $P^\pm$  且其表达式并不唯一<sup>[31,34]</sup>, 从式 (14) 可以看出  $\dot{B}_* = 0$  并不一定可以保证  $\dot{D}^{sp} |_{\dot{B}_*=0} = 0$ .

显然, 当各向同性损伤或当  $P^\pm$  保持固定不变即  $\dot{P}^\pm = 0$  时 (如比例加载等),  $\dot{D}^{sp} = 0$  的条件自动得到满足; 而对于一般情况, 投影算子  $P^\pm$  满足

$$\dot{P}^\pm : \sigma = 0 \quad (15)$$

能够保证热力学相容条件  $\dot{D}^{sp} = 0$ . 综合考虑式 (5) 和式 (15), 可以得出结论: 只有同时满足如下条件

$$P^\pm : \sigma = \sigma^\pm, \quad P^\pm : \dot{\sigma} = \dot{\sigma}^\pm, \quad P^+ + P^- = I \quad (16)$$

的投影算子才是热力学相容的, 式中,  $\dot{\sigma}^\pm$  为  $\sigma^\pm$  的率张量.

附录表明, 热力学相容的投影算子唯一地表示为如下表达式

$$\left. \begin{aligned} P^+ &= \sum_{i=1} H(\sigma^{(i)}) N^{(ii)} \otimes N^{(ii)} + \\ &2 \sum_i \sum_{j>i} \frac{\langle \sigma^{(i)} \rangle - \langle \sigma^{(j)} \rangle}{\sigma^{(i)} - \sigma^{(j)}} N^{(ij)} \otimes N^{(ij)} \\ P^- &= I - P^+ \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中,  $H(\sigma^{(i)})$  为  $\sigma^{(i)}$  的 Heaviside 函数, 二阶对称张量  $N^{(ij)}$  表示为

$$N^{(ij)} = \frac{1}{2} (n^{(i)} \otimes n^{(j)} + n^{(j)} \otimes n^{(i)}) \quad (18)$$

### 1.3 损伤演化法则

对于任何可能的变形过程, 根据不等式 (9) 和式 (10) 可知, 本构关系必须满足如下耗散不等式

$$\left. \begin{aligned} \dot{D} &= \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda} :: \dot{\Lambda} = (-Y^+) :: \dot{\Lambda}^+ + (-Y^-) :: \dot{\Lambda}^- \geq 0 \\ -Y^\pm &= \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda^\pm} = \frac{1}{2} \sigma^\pm \otimes \sigma^\pm \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中,  $-Y^\pm$  为与损伤变量  $\Lambda^\pm$  功共轭的热力学广义力即损伤能释放率. 从式 (19) 标准的二项式结构可以看出,  $\dot{\Lambda}^\pm$  应该为四阶对称正定张量. 需要指出的是, 上述式 (14) 和式 (19) 两个看起来类似的条件实际上是完全独立的: 前者限制了卸载一再加载过程中材料损伤行为, 而后者则规定了损伤加载演化法则应该满足的条件.

构建合理的损伤变量演化法则是发展连续损伤模型的最大难点之一。由于混凝土非线性行为的复杂性,对于一般的各向异性损伤模型,给出高阶损伤变量的演化法则更加困难。已有连续损伤模型的演化法则往往只能基于唯象学给出,而目前细观损伤理论微裂缝的方向和大小分布函数往往依赖于人为假定,且难以有效地考虑软化段大量微裂缝的相互作用。基于上述考虑,本文类似于塑性流动法则,给出如下损伤演化法则的一般形式

$$\dot{\Lambda}^\pm = \dot{\lambda}^\pm \Psi^\pm \quad (20)$$

式中,  $\dot{\lambda}^\pm \geq 0$  为损伤演化因子; 损伤演化方向  $\Psi^\pm$  为正定的四阶对称张量, 以保证损伤耗散式 (19) 为非负值。上述损伤演化法则最早由 Simo 和 Ju<sup>[17]</sup> 提出, 并得到了较为广泛的应用<sup>[16,21,31]</sup>。

由于热力学相容的投影算子满足关系式 (15), 相应的损伤应变率  $\dot{\epsilon}^d$  可以简单地表示为

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\Lambda} : \sigma = \dot{\lambda}^+ \Gamma^+ + \dot{\lambda}^- \Gamma^- \quad (21)$$

式中, 损伤应变的演化方向  $\Gamma^\pm$  为

$$\Gamma^\pm = P^\pm : \Psi^\pm : \sigma^\pm \quad (22)$$

需要指出的是, 一旦确定了柔度增量的演化法则, 损伤应变的演化法则即可根据式 (21) 给出; 反之则不成立。

损伤演化因子  $\dot{\lambda}^\pm$  与损伤状态有关: 当处于损伤加载时,  $\dot{\lambda}^\pm > 0$ , 而  $\dot{\lambda}^\pm = 0$  则表明损伤卸载或处于弹性区域内, 因此, 必须首先根据损伤准则确定相应的损伤状态。本文采用如下损伤准则

$$\left. \begin{aligned} F^\pm &= f^\pm(-Y^\pm) - r^\pm(\lambda^\pm) \leq 0 \\ \lambda^\pm &= \int_0^t \dot{\lambda}^\pm dt \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

和如下损伤加载 / 卸载条件

$$\dot{\lambda}^\pm \geq 0, \quad F^\pm \leq 0, \quad \dot{\lambda}^\pm F^\pm = 0 \quad (24)$$

式中, 损伤加载函数  $f^\pm$  与当前的应力状态有关; 损伤阈值  $r^\pm$  为累积损伤  $\lambda^\pm$  的函数。当处于损伤加载即  $\dot{\lambda}^+ > 0$  或  $\dot{\lambda}^- > 0$  时,  $\dot{\lambda}^\pm$  可以通过损伤一致性条件  $\dot{F}^\pm = 0$  给出, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{F}^\pm &= \mathbf{r}^\pm : \dot{\sigma} - \dot{\lambda}^\pm h^\pm = 0 \\ \mathbf{r}^\pm &= \frac{\partial f^\pm}{\partial \sigma}, \quad h^\pm = \frac{\partial r^\pm}{\partial \lambda^\pm} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{r}^\pm$  为损伤加载函数  $f^\pm$  的应力梯度, 而  $h^\pm$  则表示硬化 / 软化函数。

### 1.4 连续体切线模量

为了确定材料的失效模式和局部化状态<sup>[35]</sup>, 往往需要给出材料的连续体切线模量。此外, 连续体切线模量的推导过程往往对于发展本构模型的数值算法有一定的启发作用<sup>[36]</sup>。对于建议模型, 考虑到式 (11) 和 (21), 可以给出如下率本构关系

$$\dot{\sigma} = \mathbf{S}^{\text{tan}} : \dot{\epsilon} \quad (26)$$

式中, 损伤演化因子  $\dot{\lambda}^\pm$  和相应的连续体切线模量  $\mathbf{S}^{\text{tan}}$  可以分为以下几种情况求得:

(1) 当  $F^+ < 0, F^- < 0$  时

$$\dot{\lambda}^+ = 0, \quad \dot{\lambda}^- = 0, \quad \mathbf{S}^{\text{tan}} = \mathbf{S} \quad (27)$$

(2) 当  $F^+ = \dot{F}^+ = 0, F^- < 0$  时

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}^+ &= \frac{\mathbf{r}^+ : \mathbf{S} : \dot{\epsilon}}{h^+ + \mathbf{r}^+ : \mathbf{S} : \Gamma^+}, \quad \dot{\lambda}^- = 0 \\ \mathbf{S}^{\text{tan}} &= \mathbf{S} - \frac{\mathbf{S} : (\Gamma^+ \otimes \mathbf{r}^+) : \mathbf{S}}{h^+ + \mathbf{r}^+ : \mathbf{S} : \Gamma^+} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(3) 当  $F^+ < 0, F^- = \dot{F}^- = 0$  时

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}^+ &= 0, \quad \dot{\lambda}^- = \frac{\mathbf{r}^- : \mathbf{S} : \dot{\epsilon}}{h^- + \mathbf{r}^- : \mathbf{S} : \Gamma^-} \\ \mathbf{S}^{\text{tan}} &= \mathbf{S} - \frac{\mathbf{S} : (\Gamma^- \otimes \mathbf{r}^-) : \mathbf{S}}{h^- + \mathbf{r}^- : \mathbf{S} : \Gamma^-} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(4) 当  $F^+ = \dot{F}^+ = 0, F^- = \dot{F}^- = 0$  时

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{\lambda}^+ \\ \dot{\lambda}^- \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta} \left[ \begin{array}{c} (H_{22} \mathbf{r}^+ - H_{12} \mathbf{r}^-) : \mathbf{S} : \dot{\epsilon} \\ (H_{11} \mathbf{r}^- - H_{21} \mathbf{r}^+) : \mathbf{S} : \dot{\epsilon} \end{array} \right] \quad (30)$$

$$\mathbf{S}^{\text{tan}} = \mathbf{S} - \frac{1}{\Delta} \mathbf{S} : [\Gamma^+ \otimes (H_{22} \mathbf{r}^+ - H_{12} \mathbf{r}^-) + \Gamma^- \otimes (H_{11} \mathbf{r}^- - H_{21} \mathbf{r}^+)] : \mathbf{S} \quad (31)$$

其中, 系数  $H_{ij}$  和  $\Delta$  分别表示为

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= h^+ + \mathbf{r}^+ : \mathbf{S} : \Gamma^+, \quad H_{12} = \mathbf{r}^+ : \mathbf{S} : \Gamma^- \\ H_{21} &= \mathbf{r}^- : \mathbf{S} : \Gamma^+, \quad H_{22} = h^- + \mathbf{r}^- : \mathbf{S} : \Gamma^- \\ \Delta &= H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

从上述率本构关系和切线刚度张量清楚地看出, 由于引入了损伤应变率且采用了与塑性流动法则类似的损伤演化法则即式 (20), 只需要将经典的

塑性力学基本公式中的初始刚度张量  $S_0$  替换为割线刚度张量  $S$ , 即可给出建议的弹性损伤模型. 然而, 此处的割线刚度张量  $S$  为内变量, 其演化法则根据关系式  $S = C^{-1}$  和式 (20) 给出的演化法则加以描述.

## 2 模型数值实现算法

### 2.1 应力更新算法

本文建议的各向异性单边损伤模型率本构方程的数值积分实际上是对状态变量  $\{\sigma, \epsilon^d, C\}$  进行更新的过程. 若整体非线性方程采用基于应变的有限元进行求解, 一般将时间离散为若干子增量步  $[t_n, t_{n+1}] \subset \mathbf{R}_+(n = 0, 1, \dots)$ , 初始条件为  $\{\sigma, \epsilon^d, C\}|_{t=t_n} = \{\sigma_n, \epsilon_n^d, C_n\}$ , 且应变历史即  $t \rightarrow \epsilon \equiv \nabla^s \mathbf{u}(t)$  已知. 根据无条件稳定的后退欧拉方法<sup>[36]</sup>, 时间步  $t_{n+1}$  的状态变量按下式更新

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1} \quad (33a)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + S_n : (\Delta \epsilon_{n+1} - \Delta \epsilon_{n+1}^d), \quad S_n = C_n^{-1} \quad (33b)$$

$$\epsilon_{n+1}^d = \epsilon_n^d + \Delta \epsilon^d = \epsilon_n^d + \Delta \lambda^+ \Gamma_{n+1}^+ + \Delta \lambda^- \Gamma_{n+1}^- \quad (33c)$$

$$F_{n+1}^\pm = f^\pm(-Y_{n+1}) - r_{n+1}^\pm = 0 \quad (33d)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{n+1}^\pm &= \mathbf{A}_n^\pm + \dot{\lambda}^\pm \Psi_{n+1}^\pm \\ \mathbf{C}_{n+1} &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{P}_{n+1}^+ : \mathbf{A}_{n+1}^+ : \mathbf{P}_{n+1}^+ + \\ &\quad \mathbf{P}_{n+1}^- : \mathbf{A}_{n+1}^- : \mathbf{P}_{n+1}^- \end{aligned} \right\} \quad (33e)$$

式 (33b) 可以写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - S_n : \Delta \epsilon_{n+1}^d \\ -\Delta \epsilon_{n+1}^d &= C_n : (\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中,  $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$  为弹性试算应力, 表示为

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = \sigma_n + S_n : \Delta \epsilon_{n+1} \quad (35)$$

于是, 式 (33a)~(33d) 等效为如下残量形式

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1}^{\epsilon^d} &= C_n : (\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{\text{trial}}) + \\ &\quad \Delta \lambda^+ \Gamma_{n+1}^+ + \Delta \lambda^- \Gamma_{n+1}^- = 0 \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

$$q_{n+1}^{F^\pm} = f^\pm(-Y_{n+1}) - r_{n+1}^\pm = 0 \quad (36b)$$

可以看出, 式 (34) 和 (36) 实际上构成了模型数值实现的弹性预测——多面损伤修正方法: 在损伤加载状态, 弹性预测应力和其它状态变量通过多面损伤修正“回映”到当前损伤面. 典型的回映算法有

最近点投影方法和切平面方法两种<sup>[36]</sup>. 由于可以保证二阶收敛速度并能够给出与算法一致的线性化方程, 本文采用最近点投影方法. 相应地, 将式 (36) 线性化为 (此处, 为了书写简便, 省略了下标  $n+1$ , 下同)

$$\left. \begin{aligned} q^{\epsilon^d} + \left( C_n + \Delta \lambda^+ \frac{\partial \Gamma^+}{\partial \sigma} + \Delta \lambda^- \frac{\partial \Gamma^-}{\partial \sigma} \right) : \delta \sigma + \\ \Gamma^+ \delta(\Delta \lambda^+) + \Gamma^- \delta(\Delta \lambda^-) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37a)$$

$$q^{F^\pm} + \mathbf{r}^\pm : \delta \sigma - h^\pm \delta(\Delta \lambda^\pm) = 0 \quad (37b)$$

根据式 (37a),  $\delta \sigma$  可以用  $\delta(\Delta \lambda^\pm)$  表示为

$$\delta \sigma = -\mathbf{H} : [\Gamma^+ \delta(\Delta \lambda^+) + \Gamma^- \delta(\Delta \lambda^-) + q^{\epsilon^d}] \quad (38)$$

式中, 四阶对称张量  $\mathbf{H}$  称为弹性算法模量<sup>[36]</sup>, 表示为

$$\mathbf{H} = \left( C_n + \Delta \lambda^+ \frac{\partial \Gamma^+}{\partial \sigma} + \Delta \lambda^- \frac{\partial \Gamma^-}{\partial \sigma} \right)^{-1} \quad (39)$$

将式 (38) 代入式 (37b) 中, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}^\pm : \mathbf{H} : [\Gamma^+ \delta(\Delta \lambda^+) + \Gamma^- \delta(\Delta \lambda^-)] + \\ h^\pm \delta(\Delta \lambda^\pm) = q^{F^\pm} - \mathbf{r}^\pm : \mathbf{H} : q^{\epsilon^d} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

当两个损伤面都处于损伤加载时, 式 (40) 可以写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(\Delta \lambda^+) \\ \delta(\Delta \lambda^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^{F^+} - \mathbf{r}^+ : \mathbf{H} : q^{\epsilon^d} \\ q^{F^-} - \mathbf{r}^- : \mathbf{H} : q^{\epsilon^d} \end{bmatrix} \quad (41)$$

式中, 矩阵  $J$  的分量  $J_{ij}$  表示为

$$J_{11} = h^+ + \mathbf{r}^+ : \mathbf{H} : \Gamma^+, \quad J_{12} = \mathbf{r}^+ : \mathbf{H} : \Gamma^- \quad (42a)$$

$$J_{21} = \mathbf{r}^- : \mathbf{H} : \Gamma^+, \quad J_{22} = h^- + \mathbf{r}^- : \mathbf{H} : \Gamma^- \quad (42b)$$

因此, 第  $k+1$  次迭代后的  $\Delta \lambda^\pm$  可以求解为

$$\begin{bmatrix} \Delta \lambda^+ \\ \Delta \lambda^- \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \Delta \lambda^+ \\ \Delta \lambda^- \end{bmatrix}^{(k)} + [\mathbf{J}^{(k)}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q^{F^+} - \mathbf{r}^+ : \mathbf{H} : q^{\epsilon^d} \\ q^{F^-} - \mathbf{r}^- : \mathbf{H} : q^{\epsilon^d} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (43)$$

其中  $(\cdot)^{(k+1)}$  和  $(\cdot)^{(k)}$  分别表示第  $k+1$  次迭代和第  $k$  次迭代后变量的值. 当仅有损伤面  $F^+$  或  $F^-$  处于损伤加载状态时, 式 (40) 退化为单面损伤的形式, 于是得到  $\Delta \lambda^+$  和  $\Delta \lambda^-$

$$\begin{aligned} (\Delta \lambda^+)^{(k+1)} &= (\Delta \lambda^+)^{(k)} + \\ &\quad \frac{q^{F^+} - \mathbf{r}^+ : \mathbf{H} : q^{\epsilon^d}}{h^+ + \mathbf{r}^+ : \mathbf{H} : \Gamma^+}, \quad \Delta \lambda^- = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \Delta\lambda^+ &= 0 \\ (\Delta\lambda^-)^{(k+1)} &= (\Delta\lambda^-)^{(k)} + \frac{q^{F^-} - \boldsymbol{\Upsilon}^- : \boldsymbol{\Pi} : \mathbf{q}^{\epsilon^d}}{h^- + \boldsymbol{\Upsilon}^- : \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\Gamma}^-} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

根据式 (43)~(45) 计算出损伤演化因子的增量  $\delta(\Delta\lambda^\pm)$  后, 其它物理量可以相应地进行更新, 不再赘述。

在已有各向异性单边损伤模型中, 几乎都无法给出相应的率本构关系和连续体切线模量, 其非线性有限元数值实现算法则采用显式算法, 或只能采用效率较低的准 Newton-Raphson 算法或拟 Newton-Raphson 算法, 而这些方法对于混凝土此类强非线性材料而言往往不够强大. Mahnken 等<sup>[32]</sup> 发展了 Ortiz 模型<sup>[16]</sup> 的隐式求解算法, 然而其过程异常繁琐, 所得结果也极其复杂, 效率不高而极大地限制了其应用. 本文建议模型不仅在理论上解决了已有模型热力学不相容的理论缺陷, 同时还给出上述无条件稳定的隐式数值实现算法。

## 2.2 与算法一致的切线模量

为了保证建议模型在有限元数值实现时具有二阶收敛速度, 在非线性方程组的迭代求解过程中, 还必须使用与上述最近点投影算法一致的切线模量  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}/d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ . 为此, 将式 (33) 线性化, 可以得到

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_n : (d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^d) \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^d &= \left( \Delta\lambda^+ \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^+}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda^- \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^-}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \\ &\quad \boldsymbol{\Gamma}^+ d\lambda^+ + \boldsymbol{\Gamma}^- d\lambda^- \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{n+1}^\pm : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - h_{n+1}^\pm d\lambda_{n+1}^\pm = 0 \quad (46c)$$

综合考虑式 (46a) 和 (46b), 将得到如下关系式

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Pi}_{n+1} : [d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - (\boldsymbol{\Gamma}^+ d\lambda^+ + \boldsymbol{\Gamma}^- d\lambda^-)] \quad (47)$$

于是, 将式 (47) 代入到式 (46c), 可以将  $d\lambda^\pm$  用  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  表示, 并将其结果代回到式 (47), 即可给出与算法一致的切线模量  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}/d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$  表示为:

(1) 当  $F_{n+1}^+ < 0, F_{n+1}^- < 0$  时

$$d\lambda^+ = d\lambda^- = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \mathbf{S}_n \quad (48)$$

(2) 当  $F_{n+1}^+ = 0, F_{n+1}^- < 0$  时

$$\left. \begin{aligned} d\lambda^+ &= \frac{\boldsymbol{\Upsilon}^+ : \boldsymbol{\Pi} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}}{h^+ + \boldsymbol{\Upsilon}^+ : \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\Gamma}^+}, \quad d\lambda^- = 0 \\ \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} &= \boldsymbol{\Pi} - \frac{\boldsymbol{\Pi} : (\boldsymbol{\Gamma}^+ \otimes \boldsymbol{\Upsilon}^+) : \boldsymbol{\Pi}}{h^+ + \boldsymbol{\Upsilon}^+ : \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\Gamma}^+} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

(3) 当  $F_{n+1}^+ < 0, F_{n+1}^- = 0$  时

$$\left. \begin{aligned} d\lambda^+ &= 0, \quad d\lambda^- = \frac{\boldsymbol{\Upsilon}^- : \boldsymbol{\Pi} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}}{h^- + \boldsymbol{\Upsilon}^- : \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\Gamma}^-} \\ \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} &= \boldsymbol{\Pi} - \frac{\boldsymbol{\Pi} : (\boldsymbol{\Gamma}^- \otimes \boldsymbol{\Upsilon}^-) : \boldsymbol{\Pi}}{h^- + \boldsymbol{\Upsilon}^- : \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\Gamma}^-} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

(4) 当  $F_{n+1}^+ = 0, F_{n+1}^- = 0$  时

$$\left[ \begin{array}{c} d\lambda^+ \\ d\lambda^- \end{array} \right] = \frac{1}{\Delta} \left[ \begin{array}{c} (J_{22} \boldsymbol{\Upsilon}^+ - J_{12} \boldsymbol{\Upsilon}^-) : \boldsymbol{\Pi} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \\ (J_{11} \boldsymbol{\Upsilon}^- - J_{21} \boldsymbol{\Upsilon}^+) : \boldsymbol{\Pi} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \end{array} \right] \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} &= \boldsymbol{\Pi} - \left\{ \boldsymbol{\Pi} : [\boldsymbol{\Gamma}^+ \otimes (J_{22} \boldsymbol{\Upsilon}^+ - J_{12} \boldsymbol{\Upsilon}^-) + \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{\Gamma}^- \otimes (J_{11} \boldsymbol{\Upsilon}^- - J_{21} \boldsymbol{\Upsilon}^+)] : \boldsymbol{\Pi} \right\} / (\det \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (52)$$

式中,  $\det \mathbf{J}$  为矩阵  $\mathbf{J}$  的行列式即

$$\det \mathbf{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad (53)$$

可以看出, 将第 1.4 节给出的连续体切线模量  $\mathbf{S}^{\text{tan}}$  中的割线刚度  $\mathbf{S}$  替代为弹性算法模量  $\boldsymbol{\Pi}$ , 即得到了与算法一致的切线模量  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}/d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ . 因此, 当  $\Delta\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0$  也即  $\Delta\lambda_{n+1}^\pm \rightarrow 0$  时, 算法模量趋近于割线刚度张量即  $\boldsymbol{\Pi}_{n+1} \rightarrow \mathbf{S}_n$ . 相应的, 与算法一致的切线模量退化为连续体切向刚度张量, 即  $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}/d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rightarrow \mathbf{S}_{n+1}^{\text{tan}}$ . 上述结论与计算力学中的结论<sup>[36]</sup> 是一致的。

## 3 混凝土应用

### 3.1 混凝土损伤准则和损伤阈值

在缺乏试验数据的情况下, 通常很难直接给出柔度增量  $\boldsymbol{\Lambda}^\pm$  完全各向异性损伤的演化法则. 受到各向同性和正交各向异性损伤演化法则<sup>[37]</sup> 的启发, 本文建议如下柔度增量的演化方向张量

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}^\pm &= \frac{1}{E_0} [(1 + \nu_0) \mathbf{1}_\sigma^\pm \otimes \mathbf{1}_\sigma^\pm - \nu_0 \mathbf{1}_\sigma^\pm \otimes \mathbf{1}_\sigma^\pm] \\ \mathbf{1}_\sigma^\pm &= \frac{\boldsymbol{\sigma}^\pm}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^\pm : \boldsymbol{\sigma}^\pm}} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

相应地, 材料柔度增加 (或刚度退化) 引起的损伤应变率  $\dot{\epsilon}^d$  表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}^d &= \dot{\boldsymbol{\Lambda}} : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\lambda}^+ \boldsymbol{\Gamma}^+ + \dot{\lambda}^- \boldsymbol{\Gamma}^- \\ \boldsymbol{\Gamma}^\pm &= \boldsymbol{\Psi}^\pm : \boldsymbol{\sigma}^\pm = \\ &\quad \frac{1}{E_0} [(1 + \nu_0) (\mathbf{1}_\sigma^\pm \cdot \mathbf{1}_\sigma^\pm \cdot \boldsymbol{\sigma}^\pm) - \nu_0 \boldsymbol{\sigma}^\pm] \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

式中,  $E_0$  和  $\nu_0$  分别为材料的弹性模量和泊松比;  $\mathbf{1}_\sigma^\pm$  为  $\sigma^\pm$  的单位张量. 可以看出, 当  $\nu_0$  分别取为  $\nu_0 = 0$  和  $\nu_0 = -1$  时, 式 (54) 分别退化为 Ortiz<sup>[16]</sup> 和 Losi<sup>[22]</sup> 等提出的演化法则. 需要指出的是,  $\Psi^\pm$  为正定的四阶对称张量, 满足损伤耗散为非负值的热力学要求.

研究表明<sup>[16]</sup>, 对于率无关材料, 可以根据损伤耗散不等式 (19) 给出如下损伤加载函数  $f^\pm$  表达式

$$f^\pm(-\mathbf{Y}^\pm) = -\mathbf{Y}^\pm :: \Psi^\pm = \frac{1}{2} \sigma^\pm : \Psi^\pm : \sigma^\pm \quad (56)$$

上述损伤加载函数  $f^\pm$  没有考虑损伤演化对材料泊松比的影响. 试验表明<sup>[38]</sup>, 拉应力对混凝土泊松比的影响不大, 而在双轴或三轴受压应力下其泊松比会逐渐增加, 最终破坏时将超过 0.5 甚至接近于 1.0. 基于上述事实, 本文引入参数  $v^\pm$  以反映材料泊松比的变化, 并考虑到损伤阈值  $r^\pm$  归一化的需要, 模型建议采用如下损伤加载函数

$$f^\pm(-\mathbf{Y}^\pm) = \sqrt{-2\mathbf{Y}^\pm :: \Theta^\pm} = \sqrt{\sigma^\pm : \Theta^\pm : \sigma^\pm} \quad (57)$$

式中, 四阶对称张量  $\Theta^\pm$  表示为与损伤演化张量  $\Psi^\pm$  相同的形式即

$$\Theta^\pm = (1 + v^\pm) \mathbf{1}_\sigma^\pm \otimes \mathbf{1}_\sigma^\pm - v^\pm \mathbf{1}_\sigma^\pm \otimes \mathbf{1}_\sigma^\pm \quad (58)$$

相应的, 损伤面的应力梯度  $\mathbf{r}^\pm$  分别表示为

$$\mathbf{r}^\pm = \frac{\partial f^\pm}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^\pm : \Theta^\pm : \mathbf{P}^\pm}{f^\pm} \quad (59)$$

本文取参数  $v^+$  为混凝土的泊松比  $\nu_0$ , 即  $v^+ = \nu_0$ , 此时  $\Theta^+ = E_0 \Psi^+$ , 则建议的损伤加载函数  $f^+$  与式 (56) 是等效的. 若将单轴受拉和等双轴受拉强度分别标记为  $f_t$  和  $f_{bt}$ , 则损伤阈值  $r^+$  的最大值  $r_p^+$  表示为

$$r_p^+ = f_t = \sqrt{2(1 - v^+)} f_{bt} \implies f_{bt} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - v^+)}} f_t \quad (60)$$

一般来说, 混凝土的泊松比  $\nu_0$  在 0.15~0.25 之间, 由此可以得到  $f_{bt}/f_t$  的值在 0.767~0.816 之间, 这与试验结果<sup>[38]</sup> 非常吻合. 例如, 泊松比  $\nu_0 = 0.20$  时, 相应的,  $f_{bt} = 0.79 f_t$ .

类似的, 将单轴受压和等双轴受压强度分别标记为  $f_c$  和  $f_{bc}$  (均为正值表示), 则对应于上述强度的损伤阈值  $r_p^-$  表示为

$$r_p^- = f_c = \sqrt{2(1 - v^-)} f_{bc} \implies v^- = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{f_c}{f_{bc}} \right)^2 \quad (61)$$

对于典型的混凝土材料, 强度比值  $f_{bc}/f_c$  一般在 1.10~1.20 之间<sup>[38]</sup>, 因此,  $v^-$  的取值范围为 0.587~0.653. 本文中, 取  $f_{bc}/f_c = 1.16$ , 相应的,  $v^- = 0.6384$ .

将建议模型和上述损伤加载函数应用到一维应力状态下, 即可得到适合于混凝土材料的损伤阈值函数  $r^\pm$ . 本文中,  $r^+$  和  $r^-$  的函数形式分别取为

$$r^+ = \frac{f_0^+}{(1 + \lambda^+)^{\tilde{a}^+}}, \quad r^- = \frac{1 + \tilde{a}^- \ln(1 + \lambda^-)}{1 + \lambda^-} f_0^- \quad (62)$$

相应的, 硬化 / 软化函数  $h^+$  和  $h^-$  分别表示为

$$\left. \begin{aligned} h^+ &= \frac{\partial r^+}{\partial \lambda^+} = -\frac{\tilde{a}^+ f_0^+}{(1 + \lambda^+)^{\tilde{a}^+ + 1}} \\ h^- &= \frac{\partial r^-}{\partial \lambda^-} = \frac{\tilde{a}^- [1 - \ln(1 + \lambda^-)] - 1}{(1 + \lambda^-)^2} f_0^- \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

式中,  $f_0^+$  和  $f_0^-$  则分别代表单轴受拉和单轴受压的线弹性极限强度, 可以表示为单轴抗拉强度  $f_t$  和单轴抗压强度  $f_c$  的如下函数

$$f_0^+ = f_t, \quad f_0^- = f_c \frac{1}{\tilde{a}^-} \exp\left(1 - \frac{1}{\tilde{a}^-}\right) \quad (64)$$

$\tilde{a}^+$  和  $\tilde{a}^-$  分别为控制单轴受拉和单轴受压曲线的硬化 / 软化形状的参数, 与材料属性断裂能和单元特征长度有关. 为了获得与网格大小无关的计算结果, 当本文采用裂缝带理论<sup>[39]</sup> 对软化段进行正则化, 即假定单轴受拉和单轴受压应力 - 应变曲线与应变轴所围的面积应该分别等于单位特征长度  $l_{ch}$  的抗拉断裂能  $G_f^+/l_{ch}$  和抗压断裂能  $G_f^-/l_{ch}$ . 将上述理论应用于建议的混凝土各向异性损伤模型, 模型参数  $\tilde{a}^+$  和  $\tilde{a}^-$  与材料的抗拉断裂能  $G_f^+$  和抗压断裂能  $G_f^-$  之间的关系表示为

$$\tilde{a}^+ = \frac{a^+ + 1}{2a^+ + 1}, \quad \tilde{a}^- = \frac{\sqrt{1 + 8a^-} - 1}{2} \quad (65)$$

式中,  $a^+$  和  $a^-$  分别定义为

$$a^\pm = \frac{G_f^\pm E_0}{l_{ch} (f_0^\pm)^2} - \frac{1}{2} > 0 \quad (66)$$

不同  $a^+$  和  $a^-$  取值条件下, 归一化的损伤阈值  $r^+/f_t$  和  $r^-/f_c$  的演化曲线如图 1 所示.

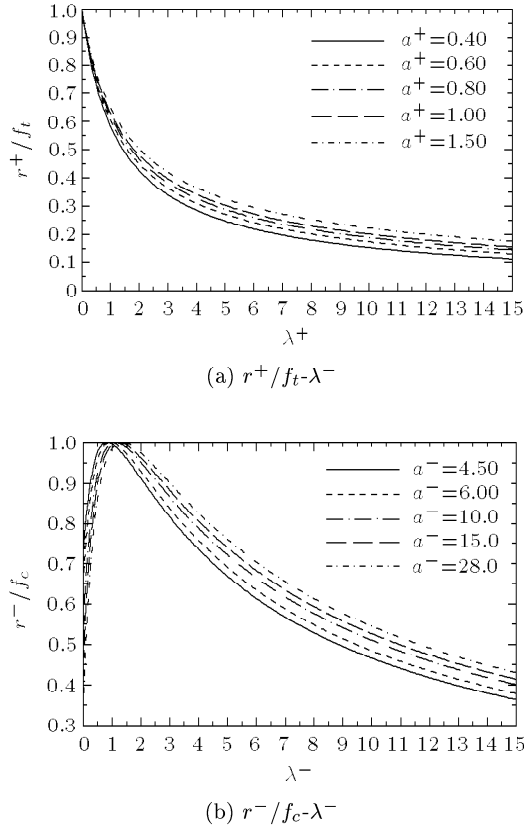


图 1 不同参数  $a^+$  和  $a^-$  取值条件下的损伤阈值 - 累积损伤关系曲线

Fig.1 Positive and negative normalized threshold-cumulative damage curves for the variable values of  $a^\pm$

### 3.2 数值模拟结果

众所周知，混凝土是一种典型的具有初始微缺陷（微裂缝和微空洞）的准脆性材料。试验观察表明，在很低的应力水平下这些微缺陷即开始发展、融合、贯通和成核，而且，其损伤演化与应力历史密切相关且具有本质意义上的各向异性特性。本节中，将建议模型应用于混凝土典型非线性行为的数值模拟，其中，采用的材料属性分别为  $E_0 = 3.0 \times 10^4$  MPa,  $\nu_0 = 0.20$ ,  $f_t = 3.0$  MPa,  $f_c = 30.0$  MPa 以及  $f_{bc}/f_c = 1.16$ 。

首先考虑单轴受拉 ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )。此时，除了分量  $\Lambda_{1111}^+ = \lambda^+/E_0 > 0$  外，柔度增量  $\Lambda^+$  和  $\Lambda^-$  的其它分量均为零。于是，利用建议模型，可以得到加载方向的应力 - 应变关系为

$$\sigma_1 = \begin{cases} f_0^+ \tilde{\epsilon}_0^+ & (0 \leq \tilde{\epsilon}_0^+ \leq 1.0) \\ f_0^+ \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0^+}\right)^{1+\frac{1}{a^+}} & (\tilde{\epsilon}_0^+ \geq 1.0) \end{cases} \quad (67)$$

式中，单轴受拉应力状态下，相对应变  $\tilde{\epsilon}_0^+$  表示为

$$\tilde{\epsilon}_0^+ = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0^+}, \quad \epsilon_0^+ = \frac{f_0^+}{E_0} \quad (68)$$

其次，对于单轴受压 ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$ )，除了分量  $\Lambda_{3333}^- = \lambda^-/E_0 > 0$  外， $\Lambda^+$  和  $\Lambda^-$  的其它分量为零。此时，加载方向的单轴受压应力 - 应变关系曲线可以表示为

$$\sigma_3 = \begin{cases} f_0^- \tilde{\epsilon}_0^- & (0 \leq \tilde{\epsilon}_0^- \leq 1.0) \\ f_0^- \tilde{\epsilon}_0^- \exp\left(\frac{1 - \tilde{\epsilon}_0^-}{\tilde{a}^-}\right) & (\tilde{\epsilon}_0^- \geq 1.0) \end{cases} \quad (69)$$

式中，参数  $\tilde{a}^-$  与  $a^-$  的关系由式 (65) 给出，单轴受压应力状态下的相对应变  $\tilde{\epsilon}_0^-$  表示为

$$\tilde{\epsilon}_0^- = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_0^-}, \quad \epsilon_0^- = \frac{f_0^-}{E_0} \quad (70)$$

求出上述单轴受拉和单轴受压应力 - 应变曲线与应变轴包围的面积，根据裂缝带理论即可得到参数  $a^\pm$  的表达式 (66)。不同参数值  $a^\pm$  给出的单轴受拉和单轴受压应力 - 应变关系曲线如图 2。

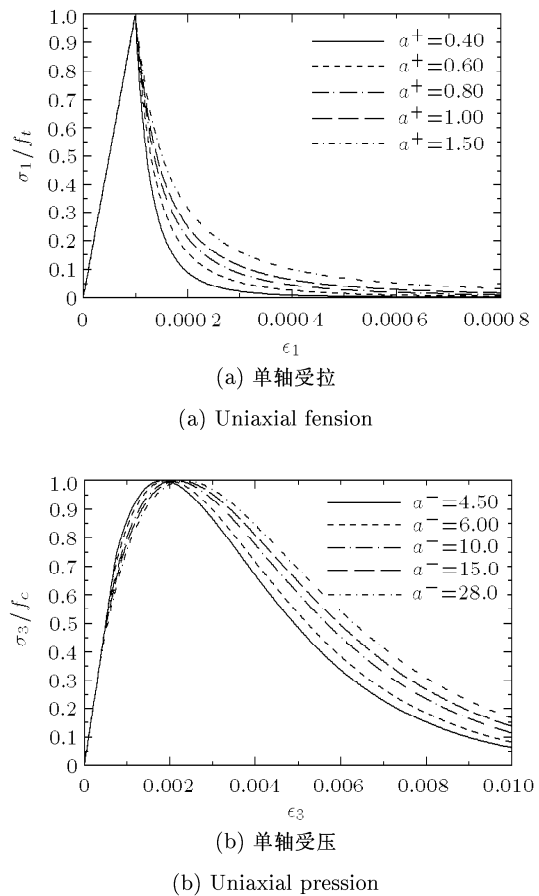
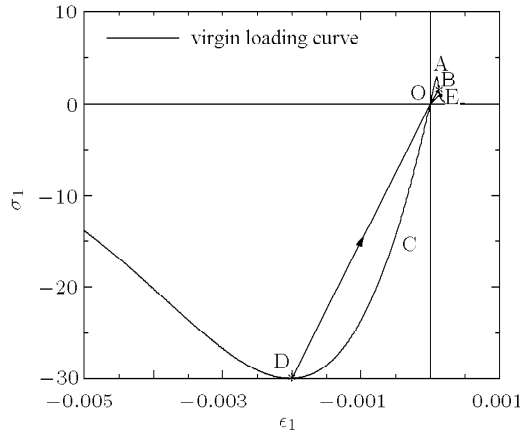


图 2 混凝土单轴应力 - 应变曲线

Fig.2 Uniaxial stress-strain curves for different values of  $a^+$  and  $a^-$

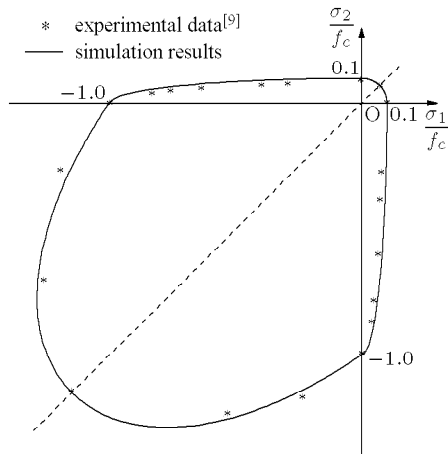


图 3(a) 给出了单轴反复拉压应力状态下加载方向  $x$  的应力  $\sigma_1 = \sigma_{xx}$  与该方向的应变值  $\epsilon_1 = \epsilon_{xx}$  的关系曲线 (O→A→B→O→C→D→O→B→E→O)。图中模型参数取为  $a^+ = 0.50$  和  $a^- = 6.00$ 。从中可以看出, 建议模型能够较好地描述微裂缝演化引起的刚度退化和单边效应。



(a) 单轴反复拉压应力 - 应变曲线

(a) Unilateral effects under uniaxial cyclic loadings



(b) 双轴应力状态下的强度包络线

(b) Strength envelope under biaxial stress states

图 3 数值模拟结果

Fig.3 Numerical simulation results

最后, 将建议模型应用于混凝土的双轴应力状态下 ( $\sigma_3 = 0$ ), 得到的强度包络线如图 3(b), 图中还给出了 Kupfer<sup>[38]</sup> 等试验结果. 数值模拟结果表明建议模型能够较好地描述双轴受压时的强度提高和双轴拉压应力状态下强度的降低。

### 4 结 语

已有的正交各向异性或完全各向异性损伤模型存在热力学不相容、数值算法复杂且效率低等缺点。基于连续损伤力学和不可逆热力学原理, 本文直接以材料柔度张量的增量作为损伤内变量, 建立了各向异性单边损伤模型的一般形式, 并给出了热力学相容的投影算子, 推导了模型的率本构关系。在此基础上, 发展了高效、稳定的 Newton-Raphson 数值实现算法及其算法一致性模量, 并给出了适用于混凝土材料的损伤准则和演化法则。需要指出的是, 建议模型完全构筑于热力学基础上, 而无需引入应变等效或应变能等效等经验性假定, 减少了经验假定引入的系统误差。

由于篇幅限制, 给出的数值算例尽管较为简单, 但模拟结果充分验证了模型的有效性, 表明建议模型能够很好地描述包括刚度退化、强度软化、“拉压”软化、受侧向压应力限制时强度提高、单边效应以及损伤诱致各项异性等在内的各种混凝土材料典型的非线性行为。建议模型更为复杂的混凝土构件和结构非线性分析应用, 如 Willam 数值试验<sup>[5]</sup>和混凝土混合型断裂试验<sup>[8]</sup>等数值模拟将另文给出。

### 参 考 文 献

- 徐永波, 白以龙. 动态载荷下剪切变形局部化、微结构演化与剪切断裂研究进展. 力学进展, 2007, 37(4): 496~516 (Xu Yongbo, Bai Yilong. Shear localization, microstructural evolution and fracture under high-strain rate. *Advances in Mechanics*, 2007, 37(4): 496~516 (in Chinese))
- Chen JK, Huang ZP, Yuan M. A constitutive theory of particulate-reinforced viscoelastic materials with partially debonded microvoids. *Computational Materials Science*, 2007, 41(3): 334~343
- 李强, 贺子如, 宋名实等. 玻璃态高聚物细观损伤断裂统计力学. 力学进展, 1995, 25(4): 451~470 (Li Qiang, He Ziru, Song Mingshi, et al. Review on the statistical mechanics of meso-damage and fracture for glassy polymers. *Advances in Mechanics*, 1995, 25(4): 451~470 (in Chinese))
- Krajcinovic D. *Damage Mechanics*. Elsevier BV, Netherlands, 2003
- Willam K, Pramono E, Sture S. Fundamental issues of smeared crack models. In: Shah SP, Swartz SE, Eds. *Semrilem, Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock*, Bethel, Connecticut, Society of Engineering Mechanics, 1987. 192~207
- Cordebois JP, Sidoroff F. Damage-induced elastic anisotropy. In: Jean-Paul Boehler, Ed. *Mechanics of Behavior of Anisotropic Solids/ No.295 Comportement*

- Mécanique Des Solides Anisotropes. Martinus Nijhoff Publisher, 1979. 19~22
- 7 Mazars J, Berthaud Y, Ramtani S. The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 1990, 35: 629~635
- 8 di Prisco M, et al. Mixed mode fracture in plain and reinforced concrete: some results on benchmark tests. *International Journal of Fracture*, 2000, 103: 127~148
- 9 Kachanov LM. Time rupture process under creep conditions (in Russian). *Izv A Rad Nauk SSSR otd Tekh Nauk*, 1958, 8: 26~31
- 10 Feng XQ, Yu SW. Micromechanical modeling of tensile response of elastic-brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32(22): 3359~3372
- 11 Yu SW, Feng XQ. A micromechanics-based model for microcrack-weakened brittle solids. *Mechanics of Materials*, 1995, 20: 59~76
- 12 Yang Q, Chen X, Zhou WY. On microscopic thermodynamic mechanisms of damage evolution laws. *International Journal of Damage Mechanics*, 2005, 14(3): 261~293
- 13 Wu JY, Li J. On the mathematical and thermodynamical descriptions of strain equivalence based anisotropic damage model. *Mech Mater*, 2008, 40: 377~400
- 14 Dougill JW. On stable progressive fracturing solids. *J Appl Mech and Physics*, 1976, 27: 423~437
- 15 Hueckel T, Maier G. Incrementally boundary value problems in the presense of coupling of elastic and plastic deformations: A rock mechanics oriented theory. *International Journal of Solids and Structures*, 1977, 13: 1~15
- 16 Ortiz M. A constitutive theory for inelastic behaviour of concrete. *Mechanics of Materials*, 1985, 4: 67~93
- 17 Simo C, Ju JW. Stress and strain based continuum damage models. I: Formulation; II: Computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 1987, 23: 375~400
- 18 Ju JW. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, 25: 803~833
- 19 Mazars J, Pijaudier-Cabot G. Continuum damage theory: application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1989, 115(2): 345~365
- 20 Yazdani S, Schreyer HL. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1990, 116: 1435~1450
- 21 Carol I, Rizzi E, Willam K. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, 31(20): 2835~2865
- 22 Losi G. Ladder models for the constitutive behavior of heterogeneous materials with damage. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32(6-7): 795~816
- 23 Govindjee S, Kay GJ, Simo JC. Anisotropic modeling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *Int J Numer Meth Engng*, 1995, 38(21): 3611~3634
- 24 Faria R, Oliver J, Cervera M. A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *International Journal of Solids Structures*, 1998, 35 (14): 1533~1558
- 25 Meschke G, Lackner R, Mang HA. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *Int J Numer Meth Engng*, 1998, 42: 703~727
- 26 Faria R, Oliver J, Cervera M. On isotropic scalar damage models for the numerical analysis of concrete structures. In: CIMNE Monograph, No.198, Barcelona, Spain, 2000
- 27 Wu JY, Li J, Faria R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(3-4): 583~612
- 28 Wu JY, Li J. Unified plastic-damage model for concrete and its applications to dynamic nonlinear analysis of structures. *Structural Engineering and Mechanics*, 2007, 25: 519~540
- 29 李杰, 吴建营. 混凝土弹塑性损伤本构模型研究, I: 基本公式. *土木工程学报*, 2005, 38(9): 14~20 (Li Jie, Wu Jianyeng. Elastoplastic damage constitutive model for concrete based on damage energy release rates, Part I: Basic formulations. *China Civil Engineering Journal*, 2005, 38(9): 14~20 (in Chinese))
- 30 Krajcinovic D. Selection of damage parameter — Art or science. *Mechanics of Materials*, 1998, 28: 165~179
- 31 Carol I, Willam K. Spurious energies dissipation/ generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33(20-22): 2939~2957
- 32 Mahnken D, Tikhomirov D, Stein E. Implicit integration scheme and its consistent linearization for an elastoplastic-damage model with application to concrete. *Computers and Structures*, 2000, 75: 135~143
- 33 Lemaitre J. Evaluation of dissipation and damage in metals. In: Proc. I C M, Vol 1, Kyoto, Japan, 1971
- 34 吴建营. 张量和张量率的投影算子. *计算力学学报*, 2007, 24(4): 519~523 (Wu Jianyeng. Projection operators or rank-two tensor and its rate tensor and their applications. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, 24(4): 519~523 (in Chinese))
- 35 Willam K, et al. Failure conditions and localization in concrete. In: Proc. Euro-C Conference, Mang H, Bicanic N, de Borst R, Eds. Pineridge Press, 1995
- 36 Simo JC, Hughes TJR. Computational Inelasticity. New York: Springer-Verlag, 1998
- 37 Wu JY. On isotropic and anisotropic unilateral damage model for concrete. In: Proceeding of International Symposium on Innovation and Sustainability of Structures in Civil Engineering, Shanghai, China, 2007. 360~371
- 38 Kupfer H, Hilsdorf HK, Rush H. Behavior of concrete under biaxial stress. *ACI Journal*, 1969, 66: 656~666
- 39 Bazant ZP, Oh B. Crack band theory for fracture of concrete. *Rilem Material of Structure*, 1983, 16: 155~177

附录：热力学相容的投影算子

正文已指出，二阶张量  $\sigma$  的投影算子并不唯一。在文献 [34] 中，作者给出了如下统一表达式

$$P_u^+ = P_O^+ + R, \quad P_u^- = I - P_u^+ \quad (A1)$$

式中， $P_O^+$  为 Ortiz<sup>[16]</sup> 提出的投影算子表达式

$$P_O^+ = \sum_i H(\sigma^{(i)}) N^{(ii)} \otimes N^{(ii)}, \quad P_O^- = I - P_O^+ \quad (A2)$$

其中的二阶对称张量  $N^{(ij)}$  表示为式 (18)，而  $R$  则表示为

$$R = 2 \sum_i \sum_{j>i} \xi N^{(ij)} \otimes N^{(ij)}, \quad R : \sigma = 0 \quad (A3)$$

当所有的特征值  $\sigma^{(i)}$  均大于零时，显然有  $P^+ = I$ ，因此系数  $\xi$  应该满足条件：当所有的  $\sigma^{(i)}$  均大于零时， $\xi = 1$ ；当所有的  $\sigma^{(i)}$  均小于零时， $\xi = 0$ 。上述统一表达式包含了 Ortiz<sup>[16]</sup>，Simo 和 Ju 等<sup>[17,18]</sup> 以及 Carol 和 Willam<sup>[31]</sup> 等建议的表达式，更为详细的讨论请参见文献 [34]。研究表明<sup>[31]</sup>：以上 3 种投影算子均不能满足热力学相容条件式 (15)，因此，需要发展新的投影算子。

将式 (4) 给出的  $\sigma^\pm$  两边对时间微分，可以给出如下关系式<sup>[26,27]</sup>

$$\dot{\sigma}^\pm = Q^\pm : \dot{\sigma} = (P_O^\pm \pm T) : \dot{\sigma}, \quad Q^+ + Q^- = I \quad (A4)$$

式中，四阶对称张量  $Q^\pm$  和  $T$  分别表示为

$$\left. \begin{aligned} Q^\pm &= P_O^\pm \pm T \\ T &= 2 \sum_i \sum_{j>i} \frac{\langle \sigma^{(i)} \rangle - \langle \sigma^{(j)} \rangle}{\sigma^{(i)} - \sigma^{(j)}} N^{(ij)} \otimes N^{(ij)} \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

而根据定义  $\dot{\sigma}^\pm = d\sigma^\pm/dt$  则有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^\pm &= \frac{d(P_O^\pm : \sigma)}{dt} = P_O^\pm : \dot{\sigma} + \dot{P}_O^\pm : \sigma = (P_O^\pm \pm T) : \dot{\sigma} \implies \\ \dot{P}_O^\pm : \sigma &= \pm T : \dot{\sigma} \end{aligned} \quad (A6)$$

于是可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^\pm &= P_u^\pm : \dot{\sigma} + \dot{P}_u^\pm : \sigma = (P_O^\pm \pm R) : \dot{\sigma} + \\ & \quad (\dot{P}_O^\pm \pm \dot{R}) : \sigma = (P_O^\pm \pm T) : \dot{\sigma} = Q^\pm : \dot{\sigma} \end{aligned} \quad (A7)$$

上述推导利用了关系式  $R : \sigma = 0$  对时间的微分。

由于  $\dot{\sigma}$  的任意性，可以得出结论：满足式 (A7) 的四阶张量  $Q^\pm$  是唯一的，且为式 (A5) 中给出的表达式。需要指出的是，四阶张量  $Q^\pm$  也是投影算子统一表达式 (A1) 的特例，即

$$Q^\pm \in P_u^\pm, \quad T \in R, \quad \xi = \frac{\langle \sigma^{(i)} \rangle - \langle \sigma^{(j)} \rangle}{\sigma^{(i)} - \sigma^{(j)}} \quad (A8)$$

也就是说，式 (A5) 中给出的表达式  $Q^\pm$  也是应力张量的投影算子，并满足如下条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma^\pm &= Q^\pm : \sigma, \quad \dot{\sigma}^\pm = Q^\pm : \dot{\sigma} \\ Q^+ + Q^- &= I, \quad \dot{Q}^\pm : \sigma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (A9)$$

同时，当所有的特征值  $\sigma^{(i)}$  均大于零 (或小于零) 时可以得到  $Q^+ = I$  (或  $Q^- = I$ )。此外，可以证明式 (A8) 中的  $\xi$  是连续的，因此， $Q^\pm$  在数学上也是成立的。

于是可以得出结论：式 (A5) 中给出的四阶张量  $Q^\pm$  就是所需的热力学相容投影算子即式 (17)。

(责任编辑：刘希国)

## ON THERMODYNAMICALLY CONSISTENT ANISOTROPIC UNILATERAL DAMAGE MODEL FOR CONCRETE<sup>1)</sup>

Wu Jianying<sup>2)</sup>

(*Department of Civil Engineering; State Key Laboratory of Subtropical Building Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China*)

**Abstract** The appropriate modeling of damage induced anisotropy and unilateral effects due to macrocracks evolution are rather crucial to predict the nonlinear responses of concrete material and structures. With the introduction of scalar, vector, second-order and fourth-order tensors, or even higher damage internal variables, continuum damage mechanics (CDM) is capable of macroscopically describing the influences of microcracks evolution on the nonlinear behavior of concrete and therefore has been widely adopted in the literatures. From the physically motivated viewpoint, the terminology “damage” is directly characterized as the degradation of the stiffness or equivalently, the increase of the compliance. Therefore, the fourth-order tensor and more specifically, the material stiffness (or the material compliance, or the change relative to the initial value), is perhaps the most rational candidate as the damage variable. Accordingly, the so-called elastic degradation model which introduces the degradation strain rate was preferred in the modeling of damage induced anisotropy. To describe the unilateral effects upon cyclic loadings, the decomposition of rank-two variables (e.g. stress, strain, effective stress, etc.) into the positive and negative components along with the corresponding fourth-order projection operators is generally adopted. Nevertheless, the expressions for the projection operators are not unique, and all the existing CDM models for microcracks induced anisotropy and unilateral effects imply a thermodynamically consistent result, i.e. the non-zero energy generations upon damage unloading when applied to describe the unilateral effects.

In this paper based on the framework of irreversible thermodynamics and the theory of internal variables, a thermodynamically consistent anisotropic damage model for concrete is proposed. To model the unilateral effects, the stress tensor is decomposed into its positive and negative components. The increments of the intrinsic compliances under purely positive and purely negative stress states are adopted as the internal damage variables to describe the microcracks evolution on the macroscopic nonlinear behavior of concrete. The conditions for zero spurious energy dissipations are presented and then new expressions for projection operators are introduced to guarantee the thermodynamical consistency. The damage evolution laws are postulated by analogy to the flow rules in classical plasticity and the plastic-type rate constitutive relation is derived. The numerical implementation of the proposed model including the back-Euler method based stress updating algorithm and the algorithmic consistent tangent moduli are also presented in details. Finally, the model is specialized to concrete with appropriate evolution laws and is applied to numerically simulate the stress-strain relations of several typical loading cases. The obtained numerical predictions agree with the experimental data fairly well, demonstrating the validity of proposed model. It is worth to note that, neither the principle of strain equivalence nor the hypothesis of strain energy equivalence is required in the developed model.

**Key words** concrete, damage mechanics, constitutive model, damage induced anisotropy, unilateral effect

---

Received 3 March 2008, revised 8 January 2009.

1) The project supported by the Independent Research Funding of State Key Laboratory of Subtropical Building Science (2008ZA10).

2) E-mail: jywu@scut.edu.cn