

文章编号: 1001-0920(2013)03-0429-05

## 切换拓扑一阶积分器网络量化趋同控制

王 垚, 伍清河, 王寅秋

(北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

**摘 要:** 针对数字信道中传输的是经过量化和编码后的数据, 研究了切换拓扑情况下连续时间一阶积分器网络中的量化趋同问题. 通过均匀量化器, 每个智能体将量化后的状态传输给邻居, 并利用所得信息设计协议, 实现量化趋同. 在所提出的量化趋同协议下, 所有状态将在有限时间内进入包含状态均值的量化层中. 特别地, 对于通信拓扑是时不变的情况, 给出了实现量化趋同所需时间的上界. 仿真结果验证了所提出算法的有效性.

**关键词:** 多智能体系统; 量化趋同; 切换拓扑; 收敛时间

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Quantized consensus of first-order integrator networks with switching topologies

WANG Yao, WU Qing-he, WANG Yin-qi

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China. Correspondent: WANG Yao, E-mail: wangyaobit@hotmail.com)

**Abstract:** In the real digital channel, only quantized symbolic data can be transmitted. Therefore, the quantized consensus problem of continuous-time first-order agents under switching communication topologies is investigated. Each agent uses the uniformly quantized states received from its neighbors to update its state, and quantized consensus is achieved. Under the proposed protocol and assumptions, all the states can go into the quantization bin containing the average of initial states in finite time. Particularly, under time-invariant topologies, the upper bound of the convergence time is given. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed protocol.

**Key words:** multi-agent systems; quantized consensus; switching topologies; convergence time

### 0 引 言

近年来, 由于趋同控制在多智能体协作控制、分布式计算和生物群体行为等方面有着广泛的应用, 趋同算法已成为研究人员关注的热点. 利用代数图论, 文献[1]解决了一阶积分器网络中的均值趋同问题, 此后涌现出了大量的研究成果<sup>[2-5]</sup>. 在数字信道中, 带宽受到限制, 智能体只能传输有限比特的数据, 因此信息的量化问题应该加以考虑.

Kashyap 等<sup>[6]</sup>在假设每个智能体的状态均为整数的情况下, 设计了量化趋同协议, 使所有状态收敛到接近状态均值的一个整数. 文献[7]基于动态编码/解码算法提出了趋同协议, 使得所有状态能够收敛到真正的状态均值. 在此基础上, 李韬等<sup>[8]</sup>证明了能够使用任意比特数的量化器实现状态渐近趋同. 目前,

量化过程对于趋同协议的影响受到了越来越多的关注<sup>[9-12]</sup>.

上述成果均使用一阶离散模型描述智能体动力学特性. 然而, 在实际工程应用中, 智能体的状态可以是位置、速度、方向等连续变量, 因此研究连续时间模型下的量化趋同问题具有重要意义. 在通信拓扑固定的情况下, 文献[13]提出了分段连续的趋同协议, 它能在有限时间内将所有状态牵引到含有状态均值的量化层中. 考虑到该协议不能保证闭环系统具有 Carathéodory 解, 文献[14]在 Krasowskii 解的意义下指出, 如果通信拓扑是时不变的无向图, 则系统可在有限时间内实现量化趋同.

上述成果均假设通信拓扑是时不变的. 然而, 在编队控制中, 信号发送功率和传感器接收能力是有限

收稿日期: 2011-08-13; 修回日期: 2011-12-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074031).

作者简介: 王垚(1985-), 男, 博士生, 从事多智能体协作控制的研究; 伍清河(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事  $H_\infty$  控制、鲁棒控制、多维系统等研究.

的,因此整个网络的通信拓扑可能随着智能体之间相对位置的变化而变化.另一方面,不可靠的信道也会引起网络拓扑的改变.为此,本文提出一种在时变拓扑中一阶积分器网络的量化趋同协议.在邻接矩阵元素有一致正下界、有限时间段内联合连通的多智能体网络中,闭环系统的 Carathéodory 解在有限时间内到达包含状态均值的量化层中.趋同算法研究的另一个重要方向是状态收敛的速度.尽管已有文献指出在固定通信拓扑情况下闭环系统在有限时间内实现趋同,但状态的收敛时间是多少,收敛速度和通信拓扑及状态初值有何关系依然是未知的.为此,本文给出了量化趋同时间的上界,并分析了影响收敛速度的因素,这有利于设计控制器实现更快的趋同速度.

## 1 问题描述

### 1.1 代数图论

多智能体之间的通信拓扑通常用图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}})$  描述.其中:  $\mathcal{V} = \{I | I = 1, 2, \dots, N\}$  是顶点集,顶点  $i$  代表第  $i$  个智能体;  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \subset \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}\}$  是边集;  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$  是加权邻接矩阵.边  $(j, i)$  和边  $(i, j)$  代表智能体  $i$  与智能体  $j$  之间为同一条通信信道.顶点  $i$  的邻居  $\mathcal{N}_i$  是所有与第  $i$  个智能体通信的顶点集合.对于任意给定的  $i, j \in \mathcal{V}$ ,  $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ , 并且  $a_{ij} > 0$  当且仅当  $j \in \mathcal{N}_i$ .  $\deg_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$  称作第  $i$  个顶点的度.

定义图  $\mathcal{G}$  的 Laplacian 矩阵为

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{D}_{\mathcal{G}} - \mathcal{A}_{\mathcal{G}},$$

其中  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \text{diag}(\deg_1, \dots, \deg_N)$ . 由边  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$  构成的序列称为顶点  $i_1$  与  $i_k$  之间的通路.图  $\mathcal{G}$  是连通的,当且仅当对于任意给定的  $i, j \in \mathcal{V}$ , 存在一条从  $i$  到  $j$  的通路.对于任意给定的正整数  $k$ , 图  $\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_j = \left\{ \mathcal{V}, \bigcup_{j=1}^k \mathcal{E}_{\mathcal{G}_j}, \sum_{j=1}^k \mathcal{A}_{\mathcal{G}_j} \right\}$  是图  $\mathcal{G}_1 = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}_1}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}_1}\}, \dots, \mathcal{G}_k = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}_k}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}_k}\}$  的并.如果  $\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_j$  是连通图,则称图  $\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k\}$  是联合连通的.

本文使用如下记号和约定:

$|\mathcal{S}|$  代表集合  $\mathcal{S}$  中的元素个数,对于任意  $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ , 补集  $\mathcal{S}^c = \{i \in \mathcal{V} : i \notin \mathcal{S}\}$ ;

$[x]$  代表不超过  $x \in \mathbf{R}$  的最大整数;

向量  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ ;

向量  $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ ;

$\mathbf{R}_{>0}$  是正实数集.

### 1.2 趋同协议

对于连续时间一阶积分模型

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad (1)$$

文献[1]提出了如下趋同协议:

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (2)$$

其中  $x_i(t) \in \mathbf{R}$  是第  $i$  个智能体的状态.

本文假设智能体之间通过数字信道通信,因此只有符号数据能被传输.每个智能体的状态在通过数字信道传递给邻居之前,由如下均匀量化器进行编码:

$$q_{\delta}(y) = 2\delta \left\lfloor \frac{y}{2\delta} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad y \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

其中  $\delta$  是量化误差.根据均匀量化器(3),本文提出如下连续时间网络量化趋同协议:

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)(q_{\delta}(x_j(t)) - q_{\delta}(x_i(t))). \quad (4)$$

数据的量化往往与离散采样相关.然而,采样速率可以远高于智能体动力学性能,所以使用连续时间控制器(4)是恰当的.

记

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T, \\ q_{\delta}([x_1, x_2, \dots, x_N]^T) &= \\ &= [q_{\delta}(x_1), q_{\delta}(x_2), \dots, q_{\delta}(x_N)]^T. \end{aligned}$$

对模型(1)应用趋同协议(4),则闭环系统可简写为

$$\dot{x}(t) = -\mathcal{L}_{\mathcal{G}(t)} q_{\delta}(x(t)). \quad (5)$$

考虑到  $\mathbf{1}$  是 Laplacian 矩阵零特征值对应的左特征向量,由式(5)可知

$$\mathbf{1}^T \dot{x}(t) = -\mathbf{1}^T \mathcal{L}_{\mathcal{G}(t)} q_{\delta}(x(t)) = 0.$$

这意味着所有智能体的状态总和保持不变,由此可得到如下引理.

**引理 1** 闭环系统(5)满足

$$x_{\text{ave}}(t) = x_{\text{ave}}(t_0), \quad t \geq t_0.$$

其中:  $x_{\text{ave}}(t) = (1/N)\mathbf{1}^T x(t)$ ,  $t_0$  是初始时刻.

方便起见,下文中记  $x_{\text{ave}} = x_{\text{ave}}(t)$ .

## 2 时变拓扑下连续时间系统趋同分析

趋同协议(4)的右端是分段连续的.文献[14]指出,在时不变通信拓扑和特殊的初始条件下,智能体状态会在  $2\delta(b + 1/2)$ ,  $b \in \mathbf{Z}$  处产生抖振,此时闭环系统(5)将没有完整的 Carathéodory 解.然而,仿真结果表明,多数情况下趋同协议(4)仍是有效的.简单起见,本文给出如下假设.

**假设 1** 系统(5)存在完整的 Carathéodory 解.

为保证系统收敛,提出如下假设.

**假设 2** 对于任意给定的  $(i, j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}(t)}$ , 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} a_{ij}(t) > 0.$$

假设 2 要求邻接矩阵的元素有一致正下界.下面

通过一个反例来说明该假设的必要性.

**例 1 (反例)** 考虑由两个智能体组成的系统, 其通信拓扑图总是连通的, 但邻接权重  $a_{12}(t) = a_{21}(t)$  在整数时刻改变. 特别地, 令

$$a_{12}(t) = \frac{k}{1 + ([t])^2},$$

其中  $k$  是给定的正数. 显然, 该系统满足假设 1. 但是, 当  $k$  充分小时, 从给定初值出发, 容易验证智能体状态的改变量可以是任意小的, 因此闭环系统无法实现趋同.

记闭环系统 (5) 的初始时刻为  $t_0$ , 时间序列  $\{t_1, t_2, \dots\}$  代表通信拓扑切换的时刻, 则存在  $\gamma > 0$ , 使得  $t_{i+1} - t_i \geq \gamma > 0, i \in \mathbf{N}$ , 即在时间段  $[t_i, t_{i+1})$  上,  $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(t_i)$ .

**假设 3**<sup>[2]</sup> 存在一致有界、不重叠的时间段序列  $[t_{i_j}, t_{i_{j+1}}), j = 1, 2, \dots$ , 满足  $t_{i_1} = t_0$  并且在每个时间段  $[t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$  上, 通信拓扑图是联合连通的.

对于任意给定的  $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$  和  $i \in \mathbf{Z}$ , 定义第  $i$  个量化层

$$\mathcal{R}_i^\delta = \{r \in \mathbf{R} : q_\delta(r) = 2\delta i\} \quad (6)$$

和含有状态均值的量化层

$$\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta = \left\{ r \in \mathbf{R} : q_\delta(r) = q_\delta\left(\frac{1}{N}\mathbf{1}^\top x(t_0)\right) \right\}. \quad (7)$$

**定理 1** 若假设 1~假设 3 成立, 对系统 (1) 应用趋同协议 (4), 则存在  $t_{\text{con}} \geq 0$ , 使得对于所有  $t \geq t_{\text{con}}$ , 有

$$x_i(t) \in \mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta, i \in \mathcal{V}. \quad (8)$$

**证明** 定理 1 的证明建立在以下两个事实的基础上:

**事实 1** 对于闭环系统 (5), 集合  $\{\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta\}^N$  是一个不变子集;

**事实 2** 对于智能体  $i \in \mathcal{V}$ , 无论其状态  $x_i(t) \in \mathbf{R}$  从任何初值出发, 都将在有限时间内到达集合  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$ .

下面逐一检验上述事实.

1) 若所有的状态都到达集合  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$ , 则有  $q_\delta(x)(t) = q_\delta((1/N)\mathbf{1}^\top x(t_0))\mathbf{1}$ , 这意味着

$$\dot{x} = -q_\delta\left(\frac{1}{N}\mathbf{1}^\top x(t_0)\right)\mathcal{L}_{\mathcal{G}(t)}\mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

因此,  $\{\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta\}^N$  是动态系统 (5) 的一个不变子集.

2) 定义

$$\begin{cases} m(t) = \frac{1}{2\delta} \min_{1 \leq i \leq N} q_\delta(x_i(t)), \\ M(t) = \frac{1}{2\delta} \max_{1 \leq i \leq N} q_\delta(x_i(t)), \\ D(t) = M(t) - m(t), \\ \mathcal{H}_a(t) = \{i \in \mathcal{V} : x_i(t) \in \mathcal{R}_a^\delta\}, \end{cases} \quad (9)$$

则事实 2 建立在关于  $D(t)$  单调性的以下结果之上:

若  $D(t) > 0$ , 则存在  $\tau > 0$  使得

$$0 < \tau < \infty, D(t + \tau) < D(t). \quad (10)$$

下面证明式 (10) 成立. 对于任意给定的状态  $x_i(t) \in \mathcal{H}_{m(t)}(t)$ , 由  $m(t)$  的定义可知, 对于所有  $j \in \mathcal{V}$ ,  $q_\delta(x_i(t)) \leq q_\delta(x_j(t))$ , 并且

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)(q_\delta(x_j(t)) - q_\delta(x_i(t))) \geq 0.$$

这意味着  $m(t)$  对于时间  $t$  是单调不减的. 同理,  $M(t)$  对于时间  $t$  是单调不增的. 因此, 在整个闭环系统的演变过程中,  $D(t)$  是单调不增的. 若  $D(t_0) > 0$ , 则只需考虑如下两种情况.

**情况 1** 在有限时间  $\tau > 0$  内, 每个状态  $x_i(t) (i \in \mathcal{V})$  到达  $\mathcal{R}_{m(t_0)}^\delta$ . 这种情况下, 对于  $t > \tau$ ,  $D(t) = 0$ .

**情况 2** 对于任意给定的  $t > t_0$ , 存在  $x_k(t), k \in \mathcal{V}$ , 满足  $x_k(t) \notin \mathcal{R}_{m(t_0)}^\delta$ . 令

$$\mathcal{H}^c(t) = \bigcup_{i > m(t_0)} \mathcal{H}_i(t),$$

即  $\mathcal{H}^c(t)$  代表所有在  $t$  时刻量化状态值大于  $2\delta m(t_0)$  的智能体集合.  $x_k(t)$  的存在意味着在任意时刻  $\mathcal{H}^c(t)$  是非空的. 根据假设 3, 对于  $t \in [t_{i_1}, t_{i_2})$ , 既然  $\{\mathcal{G}(t_{i_1}), \mathcal{G}(t_{i_1+1}), \dots, \mathcal{G}(t_{i_2})\}$  是联合连通的, 则必然存在时间段  $[t_p, t_{p+1}) \subset [t_{i_1}, t_{i_2})$  满足  $\mathcal{G}(t_p)$  包含一条边  $(s, n)$ . 其中:  $s \in \mathcal{H}_{m(t_0)}(t), n \in \mathcal{H}^c(t), t \in [t_p, t_{p+1})$ . 考虑到

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) = & a_{sn}(t)(q_\delta(x_n(t)) - q_\delta(x_s(t))) + \\ & \sum_{j \in N_s(t), j \neq n} a_{sj}(t)(q_\delta(x_j(t)) - q_\delta(x_s(t))) \geq \\ & a_{sn}(t)(q_\delta(x_n(t)) - q_\delta(x_s(t))) > 0, t \in [t_p, t_{p+1}), \end{aligned}$$

$t_{p+1} - t_p \geq \gamma > 0$  和假设 2, 容易验证在时间段  $[t_p, t_{p+1})$  上  $x_s(t)$  严格增大. 如此, 在每一个时间段  $[t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$  上至少有一个状态  $x_i \in \mathcal{H}_{m(t_0)}(t_0)$  是严格增大的. 考虑到智能体的个数  $N$  和量化误差  $\delta$  都是有限的, 从而可知存在  $\tau_1 > 0$  满足

$$|\mathcal{H}_{m(t_0)}(t_0 + \tau_1)| < |\mathcal{H}_{m(t_0)}(t_0)|,$$

因此存在  $\tau \geq t_0$  使得

$$0 < \tau < \infty, m(\tau) > m(t_0).$$

这意味着  $D(t_0 + \tau) < D(t_0)$ , 即式 (10) 成立.

由式 (10) 可知, 在有限时间内所有的状态都将到达同一个集合  $\mathcal{R}_i^\delta, i \in \mathbf{Z}$ , 即  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$ , 否则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}^\top x(t) \neq \mathbf{1}^\top x(t_0)$ , 这与引理 1 矛盾. 由此定理得证.  $\square$

由  $\mathcal{R}_i^\delta$  和  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$  的定义和定理 1 可得到如下推论:

**推论 1** 对于闭环系统 (5), 若假设 1~假设 3 成立, 则存在  $t_{\text{con}} \geq t_0$ , 使得对于所有  $t \geq t_{\text{con}}$ , 有

$$\|x(t) - x_{\text{ave}}\mathbf{1}\|_\infty \leq 2\delta.$$

定理 1 表明, 在有限时间内从任何初值出发的状

态都将进入状态均值的一个邻域, 即  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$ . 由于量化误差的存在, 智能体状态无法收敛到  $x_{\text{ave}}$ . 由推论 1 可知, 状态终值和均值的距离与通信拓扑和初始状态无关, 仅由量化器的量化精度决定.

### 3 固定拓扑下有限时间量化趋同

在固定拓扑的情况下, 文献 [13] 证明了趋同协议 (4) 能在有限时间内将每个智能体的状态引入  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$ . 但是, 系统需要多长时间才能够实现趋同, 这个时间与量化误差、通信拓扑以及状态初值之间有怎样的关系依然是未知的.

在固定拓扑下, 图  $\mathcal{G}$  是不随时间改变的, 趋同协议 (4) 和闭环系统 (5) 可分别改写为

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(q_\delta(x_j) - q_\delta(x_i)), \quad (11)$$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}_{\mathcal{G}} q_\delta(x). \quad (12)$$

类似于假设 3, 这里给出如下假设:

**假设 4** 通信拓扑  $\mathcal{G}$  是连通的.

**定理 2** 若假设 1 和假设 4 成立, 对系统 (1) 应用趋同协议 (11), 则对于所有

$$t > t_0 + \frac{(M(t_0) - m(t_0) + 1)(N - 1)}{a_{\min}}, \quad (13)$$

有

$$x_i(t) \in \mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta, \quad i \in \mathcal{V}.$$

其中:  $m(t)$  和  $M(t)$  如式 (9) 定义,  $a_{\min} = \min_{(i,j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}} a_{ij}$ .

**证明** 用式 (9) 定义  $m(t)$ 、 $M(t)$  和  $\mathcal{H}_a(t)$ , 并定义  $t \geq t_0$  时刻最小量化层  $\mathcal{R}_{m(t_0)}^\delta$  中的状态总和为

$$E(t) = \sum_{i \in \mathcal{H}_{m(t_0)}(t)} [2\delta(m(t_0) + 1/2) - x_i(t)].$$

显然,  $E(t)$  是不增的. 下面验证: 若  $x_{\text{ave}} \notin \mathcal{R}_{m(t_0)}^\delta$ , 则在  $(N - 1)/a_{\min}$  时间之内  $E(t)$  减小到零. 根据假设 4 和  $x_{\text{ave}} \notin \mathcal{R}_{m(t_0)}^\delta$ , 若  $E(t') > 0, t' \geq t_0$ , 则存在  $(p, r) \in \mathcal{E}$ , 其中  $p \in \mathcal{H}_{m(t_0)}(t'), r \in \mathcal{H}_{m(t_0)}^c(t')$ . 因此

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t') &= \\ & a_{pr}(q_\delta(x_r(t')) - q_\delta(x_p(t'))) + \\ & \sum_{j \in \mathcal{N}_p, j \neq r} a_{pj}(q_\delta(x_j(t')) - q_\delta(x_p(t'))) \geq \\ & a_{pr}(q_\delta(x_r(t')) - 2\delta m(t_0)) \geq \\ & 2\delta a_{pr} \geq 2\delta a_{\min}, \end{aligned}$$

这意味着  $\dot{E}(t') \leq -2\delta a_{\min}$ . 另一方面, 由  $E(t)$  的定义可知  $E(t_0) \leq 2\delta(N - 1)$ , 所以当  $t \geq t_0 + 2\delta(N - 1)/(2\delta a_{\min}) = t_0 + (N - 1)/a_{\min}$  时,  $E(t) = 0$ . 根据假设 1, 所有智能体的状态不会在  $2\delta(m(t_0) + 1/2)$  处产生抖动, 从而当  $t > t_0 + (N - 1)/a_{\min}$  时,  $\mathcal{H}_{m(t_0)}(t) = \emptyset$ . 同理, 若  $x_{\text{ave}} \notin \mathcal{R}_{m(t_0)}^\delta \cup \mathcal{R}_{m(t_0)+1}^\delta$ , 则当  $t > t_0 + 2(N - 1)/$

$a_{\min}$  时,  $\mathcal{H}_{m(t_0)}(t) \cup \mathcal{H}_{m(t_0)+1}(t) = \emptyset$ . 相似的分析对于  $M(t)$  依然有效. 继续执行上述过程, 由  $m(t)$  和  $M(t)$  的定义和引理 1 可知, 当  $t > t_0 + (M(t_0) - m(t_0) + 1)(N - 1)/a_{\min}$  时, 所有状态全部到达集合  $\mathcal{R}_{\text{ave}}^\delta$ . 根据定理 1 证明中的事实 1, 定理 2 得证.  $\square$

定理 2 给出了固定拓扑情况下实现状态趋同所需时间的上界, 并指出了它与量化精度无关. 然而, 状态初值的范围越大, 智能体越多, 收敛时间越长; 反之, 邻接权重越大, 收敛速度越快.

**推论 2** 对于闭环系统 (12), 若假设 1 和假设 4 成立, 则当时间  $t$  满足式 (13) 时, 有

$$\|x(t) - x_{\text{ave}}\mathbf{1}\|_\infty \leq 2\delta.$$

### 4 仿真实验

下面用 3 个仿真实例来验证所提出的趋同算法的有效性. 在单位正方形内, 随机产生均匀分布的  $N = 20$  个顶点, 如果其中 2 个顶点的距离小于 0.3, 则用一条边将其连接. 每条边对应的邻接权重在  $\{1, 2, 3\}$  中随机产生, 给定一组均值为零的初始状态. 图 1 和图 2 分别显示了  $\delta = 0.5$  和  $\delta = 0.05$  时的状态轨迹. 所有状态在 20 s 内分别进入  $[-0.5, 0.5]$  和  $[-0.05, 0.05]$ .

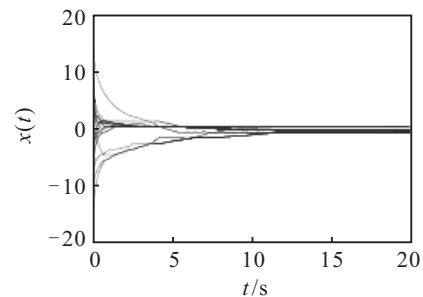


图 1 固定拓扑,  $\delta = 0.5$

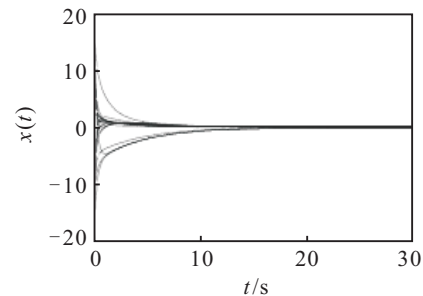
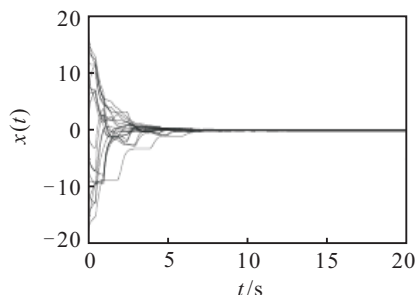


图 2 固定拓扑,  $\delta = 0.05$

第 3 个仿真演示了时变拓扑的情况. 在单位正方形内, 如果 2 个顶点的距离小于 0.15, 则用一条边将它们连接. 如此产生 4 个本身不连通, 但它们的并是联合连通的图. 从  $t_0 = 0$  时刻开始, 通信拓扑每隔  $T = 0.5$  s 于 4 个图中顺次进行切换. 由图 3 可以观察到, 所有状态在 20 s 内实现量化趋同. 图中曲线的不连续性是由拓扑切换造成的.

图3 时变拓扑,  $\delta = 0.05$ 

## 5 结 论

本文基于一阶积分器网络的趋同算法,提出了一种切换拓扑下的多智能体量化趋同协议.该算法适用于通信能力受限、信道不可靠的网络环境,拓宽了量化趋同协议的应用范围.通过分析固定拓扑时状态的趋同时间,明确了影响收敛速度的因素,这有助于设计性能更好的趋同算法.

### 参考文献(References)

- [1] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [2] Ren Wei, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [3] Xiao Feng, Wang Long. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(8): 1804-1816.
- [4] Kar S, Moura J M F. Sensor networks with random links: topology design for distributed consensus[J]. IEEE Trans on Signal Process, 2008, 56(7): 3315-3326.
- [5] 席裕庚, 黄维, 李晓丽. 具有状态预测器的多智能体系统一致性研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 769-772. (Xi Y G, Huang W, Li X L. Consensus of multi-agent system with state predictor[J]. Control and Decision, 2010, 25(5): 769-772.)
- [6] Kashyap A, Basar T, Srikant R. Quantized consensus[J]. Automatica, 2007, 43(7): 1192-1203.
- [7] Carli R, Bullo F, Zampieri S. Quantized average consensus via dynamic coding/decoding schemes[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(2): 156-175.
- [8] Li Tao, Fu Minyue, Xie Lihua, et al. Distributed consensus with limited communication data rate[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(2): 279-292.
- [9] Lavaei J, Murray R M. On quantized consensus by means of gossip algorithm-Part I: convergence proof[C]. Proc of American Control Conf. St Louis, 2009: 394-401.
- [10] Lavaei J, Murray R M. On quantized consensus by means of gossip algorithm-Part II: Convergence time[C]. Proc of American Control Conference. St Louis, 2009: 2958-2965.
- [11] Carli R, Fagnani F, Frasca P, et al. Gossip consensus algorithms via quantized communication[J]. Automatica, 2010, 46(1): 70-80.
- [12] Yuan Deming, Xu Shengyuan, Zhao Huanyu, et al. Distributed average consensus via gossip algorithm with real-valued and quantized data for  $0 < q < 1$ [J]. Systems and Control Letters, 2010, 59(9): 536-542.
- [13] Hui Qing. Quantized near-consensus via quantized communication links[C]. Proc of American Control Conf. Baltimore, 2010: 247-252.
- [14] Ceragioli F, Persis C D, Frasca P. Quantized average consensus: Discontinuities and hysteresis[J]. Automatica, 2011, 47(9): 1916-1928.
- [13] Manfred E Leipold, Otto Wagner. Mercury sun-synchronous polar orbits using solar sail propulsion[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 1996, 19(6): 1337-1341.
- [14] Leipold, Borg, Lingner. Mercury orbiter with a solar sail spacecraft[J]. Acta Astronautica, 1995, 35(2): 635-644.
- [15] Matteo Ceriotti, Colin R McInnes. Generation of optimal trajectories for earth hybrid pole sitters[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2011, 34(3): 847-857.

(上接第428页)