

文章编号: 1001-0920(2013)03-0424-05

## 基于解析控制律的太阳帆星际转移轨道控制

史晓宁, 郭继峰, 荣思远, 崔乃刚

(哈尔滨工业大学 航天工程系, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 太阳帆航天器可依靠反射太阳光子提供动力, 因此较适用于远距离的星际转移任务. 针对太阳帆航天器星际转移轨道控制问题, 提出一种新的解析最优控制律, 通过设定混合权重对各轨道根数进行联合控制. 引入改进春分点轨道根数对解析控制律进行了优化推导, 并以水星探测任务为背景进行了相应的仿真分析. 仿真结果表明, 该控制律计算速度较快, 可对各个轨道根数进行联合控制, 从而得到满足工程要求的太阳帆航天器星际转移轨道.

**关键词:** 太阳帆航天器; 日心转移轨道; 解析法; 最优控制律; 轨道控制

中图分类号: V412.1

文献标志码: A

## Solar sail heliocentric transfer orbit control based on analytical control laws

SHI Xiao-ning, GUO Ji-feng, RONG Si-yuan, CUI Nai-gang

(Department of Astronautics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: SHI Xiao-ning, E-mail: sxn\_1219@163.com)

**Abstract:** Solar sail spacecrafts can provide motivation rely on reflecting the sun photons, so that it is suitable for long distance interstellar transfer task. Aiming at the problem of solar sail interstellar transfer orbit control, a new analytical control law is presented. This control law can realize the combination control of each orbit elements by setting the blending weights. The modified equinoctial orbital elements are introduced to the optimal derivation of the analytical optimal control law, and numerical simulations for the method are performed based on mercury exploration mission. Simulation results show that, the proposed control law has higher computational speed and the capability of realizing the combination control of each orbit elements, thus the solar sail interstellar transfer orbit can be obtained, which can satisfy the requirements of the project.

**Key words:** solar sail; heliocentric transfer orbit; analytical method; optimal control law; orbit control

### 0 引言

太阳帆是目前唯一不依靠反作用推进实现飞行控制的航天器, 因而在太空中的寿命不受有限燃料约束<sup>[1]</sup>. 由于太阳光压可提供长期地持续加速, 理论上太阳帆航天器的航天速度可达到0.1倍的光速<sup>[2]</sup>, 当今用任何化学燃料推进的航天器都无法达到这个速度. 太阳帆可飞至外太阳系进行太阳风层顶和日光层接触面实地科学探测, 这将对地球长期受来自外太阳系宇宙射线辐射所造成的影响等问题进行解答<sup>[3]</sup>.

太阳帆航天器在远距离星际航行中不受有限燃料约束, 因此, 利用太阳帆推进完成深空探测任务时, 最核心的问题之一就是如何设计最优转移轨道使任务总消耗时间最少, 且同时满足工程约束<sup>[4]</sup>. 文献[5]提出了一种应用于恒定质量航天器星际转移任

务的纯径向推力控制方法, 该方法设定航天器所受推力始终沿轨道径向, 且推力大小与中心天体距离的平方成反比. 文献[6-7]针对该轨道控制方法展开了进一步的研究. 纯径向推力控制方法由于不需要太阳帆航天器姿态持续快速机动, 进行任务设计时相对简单, 然而对于一些带有约束条件的复杂任务并不适用. 为了解决上述问题, 文献[8]提出了一种连续径向推力控制方法, 但该控制方法无法实现对各个轨道根数的联合控制, 在处理一些具有较强工程约束的星际轨道转移问题时并不适用.

本文针对太阳帆星际转移轨道设计问题, 给出了一种基于解析最优控制律的轨道控制方法以及相应的详细推导过程, 该控制律的优点在于运算速度较快, 同时权值仅与密切轨道根数有关, 而不显含时间,

收稿日期: 2012-06-01; 修回日期: 2012-09-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61005060).

作者简介: 史晓宁(1984—), 男, 博士生, 从事空间飞行器动力学与控制的研究; 崔乃刚(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器动力学与控制、非线性滤波理论及其应用等研究.

从而便于对权值进行设定; 然后以水星探测任务为背景, 对上述太阳帆航天器星际轨道控制方法进行了仿真验证.

### 1 问题描述

太阳帆航天器日心转移轨道设计是通过搜索太阳帆航天器的姿态控制角, 使太阳帆航天器在转移轨道末端到达目标行星的引力影响球附近, 并使航天器相对目标行星的轨道能量 $C_3$ 最小, 以减小目标行星中心轨道捕获时间.

#### 1.1 坐标系定义

本文主要研究太阳帆航天器日心转移段轨道, 首先定义日心黄道直角坐标系, 原点位于日心, 主平面为黄道平面,  $X$ 轴指向某历元时刻的春分点方向,  $Y$ 轴在黄道平面内与 $X$ 轴垂直,  $Z$ 轴与 $X$ 轴和 $Y$ 轴构成右手系.

为了研究太阳帆航天器所受推力, 本文还定义了RTN轨道坐标系. RTN轨道坐标系原点位于太阳帆航天器质心,  $R$ 轴为轨道径向(即太阳光入射方向),  $N$ 轴为轨道法向,  $T$ 轴与 $R$ 轴和 $N$ 轴构成右手系. 如图1所示, 定义太阳帆航天器锥角 $\tilde{\alpha}$ 为推力矢量 $F$ 与 $R$ 轴夹角, 时钟角 $\tilde{\delta}$ 为推力矢量 $F$ 在TN平面的投影与 $T$ 轴的夹角.

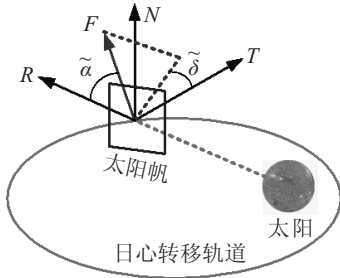


图1 坐标系及太阳帆航天器姿态角定义

#### 1.2 太阳帆航天器推力模型

理想太阳帆推力模型定义为: 太阳帆表面对入射光的反射为纯镜面反射. 分别定义 $e_r$ 和 $e'_r$ 为沿太阳光入射方向和反射方向的单位向量, 则由入射太阳光子对太阳帆的冲击产生的太阳光压力为

$$F_r = PA(e_r \cdot n)e_r. \quad (1)$$

其中:  $P$ 为太阳光压强度,  $A(e_r \cdot n)$ 为太阳帆在垂直于 $e_r$ 矢量平面上的投影面积. 由反射太阳光子反作用产生的太阳光压力为

$$F'_r = -PA(e_r \cdot n)e'_r. \quad (2)$$

由于 $e_r - e'_r = 2(e_r \cdot n)n$ , 作用于太阳帆的太阳光压合力为

$$F_{SRP} = F_r + F'_r = 2PA(e_r \cdot n)^2 n, \quad (3)$$

由 $e_r \cdot n = \cos \beta$ 可得

$$F_{SRP} = 2PA \cos^2 \beta n. \quad (4)$$

另外, 作用于理想太阳帆推力模型的太阳光压力始终与帆的法线方向一致, 即 $f = n$ .

### 2 解析最优控制律

本文利用改进春分点轨道根数对 Gauss 型轨道摄动方程在 RTN 轨道坐标系下进行了优化推导, 从而得到了各个轨道根数的解析最优控制律, 并通过对各轨道根数进行加权, 实现了各个轨道根数的混合最优控制.

#### 2.1 各轨道根数的解析最优控制律

本文选取的太阳帆航天器日心转移轨道的轨道根数分别为半长轴 $a$ , 偏心率 $e$ , 轨道倾角 $i$ , 升交点经度 $\Omega$ , 近心点幅角 $\omega$ 以及近拱点中心距 $R_p$ .

本文引入改进春分点轨道根数对太阳帆所受推力方向矢量进行描述, 改进春分点轨道根数的基本形式为<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2), \quad f = e \cos(\omega + \Omega), \\ g &= e \sin(\omega + \Omega), \quad h = \tan(i/2) \cos \Omega, \\ k &= \tan(i/2) \sin \Omega, \quad L = v + \omega + \Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

对式(5)进行推导可得

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - (f^2 + g^2)}, \quad e = \sqrt{f^2 + g^2}, \\ i &= 2 \arctan(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad \Omega = \arctan(k/h), \\ \sin v &= \frac{f \sin L - g \cos L}{\sqrt{f^2 + g^2}}, \quad \cos v = \frac{f \sin L + g \cos L}{\sqrt{f^2 + g^2}}, \\ \cos(v + \omega) &= \frac{h \cos L + k \sin L}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \\ \sin(v + \omega) &= \frac{h \cos L - k \sin L}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \end{aligned}$$

其中 $v$ 为真近点角.

##### 1) 半长轴控制律.

由拉格朗日行星摄动方程可得, 轨道半长轴 $a$ 在 RTN 轨道坐标系下的微分方程为

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [e \sin v R + (1 + e \cos v) T]. \quad (6)$$

其中:  $r$ 为轨道半径;  $\mu$ 为中心天体引力常数;  $R, T$ 和 $N$ 分别为 RTN 轨道坐标系中径向、切向和法向摄动力. 通过引入改进春分点轨道根数对式(6)进行变换可得轨道半长轴推力方向矢量

$$\eta_a = \begin{bmatrix} f \sin L - g \cos L \\ 1 + f \cos L + g \sin L \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

##### 2) 偏心率控制律.

由拉格朗日行星摄动方程可得, 轨道偏心率 $e$ 在 RTN 轨道坐标系下的微分方程为

$$\frac{de}{dt} = \frac{a(1 - e^2)}{e\sqrt{\mu p}} [e \sin v R + (e \cos v + e \cos E) T], \quad (8)$$

其中 $E$ 为轨道偏近点角, 由二体问题轨道真近点角

$$v = \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (9)$$

可得

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}. \quad (10)$$

通过引入改进春分点轨道根数,并结合式(10)对(8)进行变换可得轨道偏心率推力方向矢量

$$\eta_e = \begin{bmatrix} f \sin L - g \cos L \\ f \cos L + g \sin L + \\ \frac{f^2 + g^2 + f \sin L - g \cos L}{1 + f \cos L + g \sin L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

3) 轨道倾角最优解析控制律.

轨道倾角变化率仅与平面外摄动有关,为了计算轨道倾角的最优变化率,这里首先给出轨道倾角  $i$  在 RTN 轨道坐标系中的微分方程

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos(v + \omega) N. \quad (12)$$

通过引入改进春分点轨道根数对式(12)进行变换,定义轨道倾角  $i$  的推力方向矢量为

$$\eta_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sgn}(h \cos L + k \sin L) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

4) 升交点经度控制律.

升交点经度  $\Omega$  在 RTN 轨道坐标系下的微分方程为

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin(v + \omega)}{\sin i} N. \quad (14)$$

通过引入改进春分点轨道根数对式(14)进行变换,可得升交点经度的推力方向矢量

$$\eta_\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sgn}(h \cos L - k \sin L) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

5) 近心点幅角控制律.

近心点幅角  $\omega$  在 RTN 轨道坐标系下的微分方程为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ -\frac{\sqrt{p}}{e} \cos v R + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sqrt{p}}{e} \sin v T - \frac{r}{\sqrt{p}} \cot i \cos(v + \omega) N \right]. \quad (16)$$

通过引入改进春分点轨道根数对式(16)进行变换,可得近心点幅角的推力方向矢量

$$\eta_\omega = \begin{bmatrix} -\frac{(f \cos L + g \sin L)}{(f^2 + g^2)} \\ \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{(f \sin L - g \cos L)}{(f^2 + g^2)} \\ \frac{r \cot(2 \arctan \sqrt{h^2 + k^2})(h \sin L - k \cos L)}{p \sqrt{f^2 + g^2}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

6) 近拱点中心距控制律.

由二体问题轨道近拱点中心距

$$r_p = a(1 - e) \quad (18)$$

结合式(6)和(8),并引入改进春分点轨道根数进行变换,可得轨道近拱点中心距推力方向矢量

$$\eta_{r_p} = \begin{bmatrix} (f \sin L - g \cos L) \times \\ \left[ \frac{2(1 - \sqrt{f^2 + g^2})}{1 - f^2 - g^2} - \sqrt{f^2 + g^2} \right] \\ \frac{2(1 - \sqrt{f^2 + g^2})(1 + f \cos L + g \sin L)}{1 - f^2 + g^2} \\ \left( \frac{f \cos L - g \sin L}{\sqrt{f^2 + g^2}} + \cos E \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

为了表征太阳帆航天器姿态,需要通过  $\eta_k$  在 RTN 轨道坐标系下对太阳帆航天器姿态角进行解算,即

$$\tilde{\alpha} = \arccos(\eta_x), \quad (20)$$

$$\tilde{\delta} = \arccos \frac{\eta_z}{\sqrt{\eta_y^2 + \eta_z^2}}. \quad (21)$$

对式(20)进行优化推导可得太阳帆航天器理想推力矢量方向(即太阳帆航天器所受最大推力矢量方向)<sup>[11]</sup>为

$$\alpha = \arctan \frac{-3 \cos \tilde{\alpha} + \sqrt{9 \cos^2 \tilde{\alpha} + 8 \sin^2 \tilde{\alpha}}}{4 \sin \tilde{\alpha}}, \quad (22)$$

其中  $\alpha$  为理想推力矢量太阳帆航天器锥角.由于太阳帆航天器加速度的量级主要由锥角决定,而受时钟角影响较小,在本文的局部最优控制律中时钟角可直接由式(21)表示,而不必进行优化推导,即

$$\delta = \tilde{\delta}, \quad (23)$$

其中  $\delta$  为理想推力矢量太阳帆航天器时钟角.

基于利用上述解析控制律所求得的最优锥角以及时钟角,航天器所受最优推力方向矢量可表示为

$$f = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \sin \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (24)$$

## 2.2 混合最优控制律

本文所涉及的混合最优控制律是指对太阳帆航天器日心转移轨道各个轨道根数同时进行控制,通过该控制律可使各个轨道根数同时朝最大瞬时变化率方向改变.本文所采用的混合最优控制律在对各个轨道根数进行最终加权之前,首先针对每个轨道根数设定常值权重  $W_{k0}$ ,之后还需考虑各轨道根数到达终端值的变化速率和太阳帆利用效率.

通过式(14)可得到太阳帆航天器在 RTN 轨道坐标系下所受的推力  $F_R$ ,  $F_T$  和  $F_N$ ,从而对轨道根数

的最快变化速率  $dE_k/dt$  进行求解. 通过轨道根数  $E_k$  的当前状态及终端状态之差  $\Delta E_k$ , 并结合变化速率  $dE_k/dt$  可得轨道根数变化的最优时间. 定义变化速率系数

$$\xi_s = \left| \frac{\Delta E_k}{dE_k/dt} \right|. \quad (25)$$

另外注意到, 若太阳帆航天器锥角较大, 由式(4)可知, 此时太阳帆所受光压摄动加速度较小, 导致太阳帆航天器利用效率较低, 因此本文用锥角  $\alpha$  表征利用效率系数  $\zeta_k$ , 定义

$$\zeta_k = \cos^2 \alpha_k. \quad (26)$$

对  $\xi_k$  及  $\zeta_k$  进行归一化处理并结合常值权重  $W_{k0}$ , 可得各个轨道根数的混合最优控制权值

$$W_k = W_{k0} \left( \frac{\xi_k}{\max(\xi)} + \frac{\zeta_k}{\max(\zeta)} \right). \quad (27)$$

混合最优控制律的单位推力矢量

$$\eta_b = \sum_{k=1}^6 W_k \eta_k / \left| \sum_{k=1}^6 W_k \right|. \quad (28)$$

其中:  $W_k$  表示各个轨道根数的混合最优控制权值,  $\eta_b$  表示对各个轨道根数进行加权之后的混合最优控制推力矢量. 由式(28)可知, 通过调整权值  $W_k$  可实现对各个轨道根数的联合控制.

### 3 仿真分析

考虑到水星是太阳系中最靠近太阳的行星, 距离地球较远, 并且其绕太阳公转轨道面相对黄道面的倾角相对较大, 可达到  $7^\circ$  左右, 因此水星探测任务是一种典型的高能量任务, 采用太阳帆推进的方式更能发挥其优势<sup>[12]</sup>. 基于上述考虑, 本文选取水星探测任务为研究背景对上述算法进行仿真验证.

在整个地球-水星轨道转移过程中设定太阳帆航天器的特征加速度  $a_{sc} = 0.45 \text{ mm/s}^2$ , 本文中发射轨道选择直接逃逸轨道, 即运载火箭直接将航天器发射到逃逸轨道上. 为了使发射  $C_3$  最小, 通过对发射窗口的搜索可得从地球引力影响球逃逸的时间为 2015 年 1 月 1 日. 仿真中选用的星历为美国喷气推进实验室的 JPL DE405 星历.

本文设定水星探测器的工作轨道为近拱点, 位于水星北极上方的近极地太阳同步轨道<sup>[13-14]</sup>. 为了满足水星捕获轨道要求, 使太阳帆航天器在轨道转移末端尽量与水星接近, 同时考虑水星根数变化较慢, 设定目标轨道根数为航天器从地球引力影响球逃逸时的水星绕太阳公转的日心瞬时轨道根数. 根据水星星历计算可得目标轨道根数, 如表 1 所示. 解析控制律中所选用的初始常值权重为

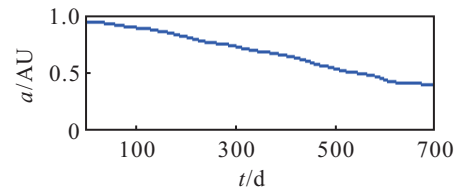
$$W_0 = [1.058 \ 0.29 \ 0.218 \ 0.3 \ 0.844 \ 0]^T.$$

通过解析控制律对地球-水星日心转移轨道进

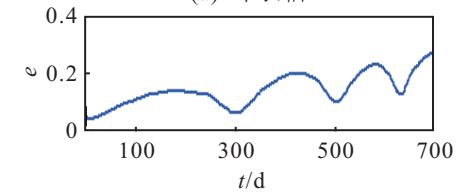
行优化求解可得到太阳帆航天器的终端轨道根数如表 1 所示, 各轨道根数的变化情况如图 2 和图 3 所示.

表 1 轨道参数目标值和转移轨道末端值

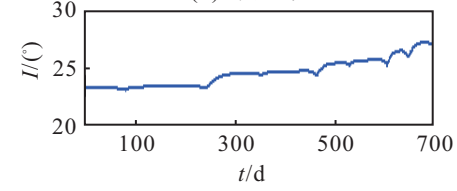
轨道根数	目标值	终端值
半长轴/AU	0.387	0.3871
偏心率	0.2	0.2179
轨道倾角/ $^\circ$	28.55	27.0578
升交点经度/ $^\circ$	11	10.3506
近地点幅角/ $^\circ$	67.6	72.6101
真近点角/ $^\circ$	0.304	0.3028



(a) 半长轴

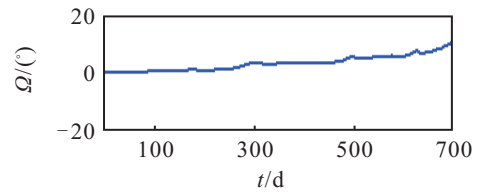


(b) 偏心率

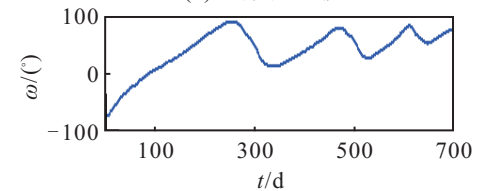


(c) 轨道倾角

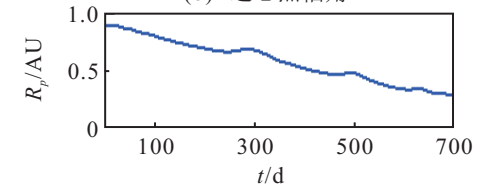
图 2 半长轴、偏心率及轨道倾角变化



(a) 升交点经度



(b) 近心点幅角



(c) 近拱点中心距

图 3 升交点经度、近心点幅角及近拱点中心距变化

由表 1, 图 2 和图 3 可知, 采用本文中给出的解析最优控制律可实现对轨道根数的联合控制, 且在日心转移轨道末端使各个轨道根数均到达目标值附近.

整个仿真过程所用时间为 12.140 s. 通过仿真计算可得, 转移段末端时间为 2016 年 12 月 8 日, 总飞行时间为 705.73 d, 转移末端太阳帆航天器和水星的相位差为  $2.8593^\circ$ .

日心转移段轨迹如图 4 所示, 同时得到转移末端的水星中心距为 0.0207 AU, 速度大小为 0.1077 VU ( $1 \text{ VU} = 2.978 \times 10^4 \text{ m/s}$  为速度正则单位), 水星影响球半径为  $7.4867 \times 10^{-4} \text{ AU}$ , 影响球附近的双曲线逃逸速度约为  $0.0211 \text{ VU}^{[15]}$ .

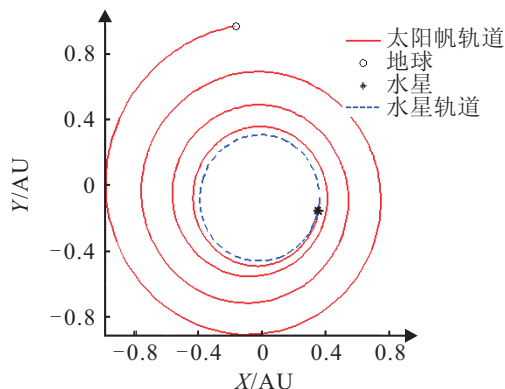


图 4 日心转移段太阳帆航天器轨迹

图 5 为太阳帆航天器最优锥角及时钟角的变化趋势. 由图 5 可知, 利用解析最优控制律对太阳帆航天器日心转移轨道进行轨道控制所得到的太阳帆航天器姿态角变化较为剧烈, 对姿态控制系统提出了较高的要求, 因此需在未来的工作中利用其他优化算法对太阳帆航天器姿态角速度进行约束.

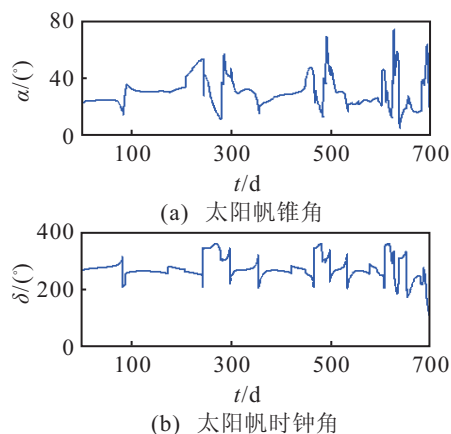


图 5 最优锥角及时钟角

## 4 结 论

本文针对太阳帆航天器星际轨道转移问题, 提出了一种基于解析最优控制律的轨道控制方法, 并以水星探测任务为背景对上述轨道控制方法进行了仿真验证, 通过上述研究可得到以下结论:

1) 采用本文中给出的解析最优控制律可实现对轨道根数的联合控制, 且在日心转移轨道末端使各个轨道根数均到达目标值附近;

2) 由于高能任务最主要的体现是在日心转移阶段, 而太阳帆推进在此阶段利用效率较高, 因此能体现利用太阳帆推进方式进行深空探测任务的优势, 这说明太阳帆较适合应用于日心轨道转移阶段;

3) 解析最优控制律仿真所用时间较短, 且可实时根据当前的状态解计算控制角, 因此较为适用于未来的太阳帆航天器在轨自主控制系统.

## 参考文献(References)

- [1] McInnes C R. Solar sailing: Technology, dynamics and mission applications[M]. London: Springer-Verlag, 1999: 1-55.
- [2] 荣思远, 刘家夫, 崔乃刚. 太阳帆航天器研究及其关键技术综述[J]. 上海航天, 2011, 2(21): 53-62.  
(Rong S Y, Liu J F, Cui N G. A review of solar sail spacecraft research and its key technology[J]. Aerospace Shanghai, 2011, 2: 53-62.)
- [3] Leipold M. Solar sail mission design[D]. Munich: School of Astronautics, Technische University, 2000: 78-102.
- [4] 王松霞, 徐世杰, 陈统. 太阳帆飞行器轨道动力学分析[J]. 中国空间科学技术, 2006, 4(2): 30-37.  
(Wang S X, Xu S J, Chen T. Orbit dynamics analysis of solar spacecraft[J]. Chinese Space Science and Technology, 2006, 4(2): 30-37.)
- [5] Boltz F W. Orbital motion under continuous radial thrust[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 1991, 14(3): 667-670.
- [6] McInnes C R. Orbits in a generalized two-body problem [J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2003, 26(5): 743-749.
- [7] Yamakawa H. Optimal radially accelerated interplanetary trajectories[J]. J of Spacecraft and Rockets 2006, 43(1): 116-120.
- [8] Otten M, McInnes C R. Near minimum-time trajectories for solar sails[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(3): 632-634.
- [9] 王志胜, 王道波. 含理想控制策略和期望轨道的最优控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 101-103.  
(Wang Z S, Wang D B. Optimal control with ideal control strategy and expected trajectory[J]. Control and Decision, 2006, 21(1): 101-103.)
- [10] Roy A E. Orbital motion[M]. London: Institute of Physics, 1998: 245-250.
- [11] Macdonald M, McInnes C R. Analytical control laws for planet-centred solar sailing[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2005, 28(5): 1038-1048.
- [12] Macdonald M, McInnes C R. Solar sail capture trajectories at mercury[C]. AIAA Guidance, Navigation and Control Conf and Exhibit. Monterey, 2002: 1-7.

(下转第 433 页)