

文章编号: 1001-0920(2013)03-0396-06

连续 Markov 跳变系统最优控制

胡诗国, 方洋旺, 蔡文新, 张 平

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

摘 要: 针对连续 Markov 跳变系统, 对其最优控制问题进行研究. 首先, 基于随机最大值原理, 设计完全状态信息情形下 Markov 跳变系统的最优控制器; 然后, 采用导数原始定义结合 Markov 跳变系统特性的方法, 得到了最优控制器系数矩阵的黎卡提微分方程, 进而将其推广到不完全状态信息情形; 最后, 通过数值仿真验证了所得控制器的正确性.

关键词: 最优控制; 连续 Markov 跳变系统; 随机最大值原理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Optimal control for continuous-time Markov jump systems

HU Shi-guo, FANG Yang-wang, CAI Wen-xin, ZHANG Ping

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China. Correspondent: HU Shi-guo, E-mail: hshg0406@163.com)

Abstract: Optimal control problem for continuous-time Markov jump systems is studied. Firstly, an optimal controller is designed based on the stochastic maximum principle under complete states information and unconstrained control inputs conditions, which is extended to incomplete states information situation further more. The Riccati differential equation of the optimal control coefficients is deduced through a way of integrating the characters of Markov jump systems and the primal definition of differential coefficient. Finally, an example with incomplete states information is given to exam the presented optimal controller.

Key words: optimal control; continuous-time Markov jump systems; stochastic maximum principle

0 引 言

在工程实际问题中, 许多系统都会因为内部子系统的故障、维修、受到环境突发扰动、子系统之间关联情况发生改变等原因造成系统在结构和参数上的突变. 具有上述特征的系统称为随机跳变系统, 该系统既包含了连续状态, 又包含了离散状态, 是同时包含时间演化和事件驱动两种动态机制的一类特殊的混杂系统. 时间演化动态通常由常规的随机微分方程表示, 事件驱动机制一般由连续时间离散状态的 Markov 过程描述^[1], 故此类系统又称为随机 Markov 跳变系统. 根据结构状态和系统状态的关系可将结构随机跳变系统分为两类^[2], 一类为具有 Markov 结构随机跳变系统, 即系统结构跳变与状态无关; 另一类为具有条件 Markov 结构随机跳变系统, 即系统结构跳变与状态相关. 目前, 结构随机跳变系

统在飞行器控制、通信技术、机器人技术、金融工程以及其他领域都具有广泛的应用^[3-4], 深入研究此类系统的有效辨识、状态估计与控制方法, 对解决此类复杂系统问题具有重要的学术意义及应用价值.

文献[5]总结了自随机跳变系统模型提出以来, 特别是近 20 年, 关于随机跳变系统状态估计和控制的主要理论和应用研究成果. 对于最优控制方面而言, 文献[6]给出了在一定的可控性条件下, 当 $T < +\infty$ 时最优状态反馈控制器存在的条件; [7]将具有时间加权的性能指标引入 Markov 跳变系统的优化控制, 并给出了次优控制器存在的必要条件和设计方法; [8]针对一类具有乘性噪声的离散 Markov 跳变系统, 研究了其最优控制问题. 目前, 针对结构随机跳变系统的研究主要集中在系统结构跳变与状态无关的情形^[9], 且大多假定系统的结构跳变模式已知, 不考虑系统模态的辨识, 且当模态固定时, 系统为确定性系

收稿日期: 2011-11-04; 修回日期: 2011-12-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874040); 国家 863 计划项目(2007AA701405).

作者简介: 胡诗国(1981—), 男, 博士生, 从事导弹制导与控制、武器系统作战效能的研究; 方洋旺(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事导弹制导与控制、导弹作战使用等研究.

统。

本文对具有 Markov 结构的连续随机跳变线性系统最优控制问题进行研究, 将系统的结构参数视为未知; 利用观测器测量, 对系统状态和系统结构参数同时进行估计; 采用随机最大值原理^[10], 推导了控制不受约束条件下, 完全信息和不完全信息情形的相应最优控制算法。

1 问题描述

考虑如下结构 Markov 跳变线性系统:

$$\dot{X} = A^{(l)}(t)X + B^{(l)}(t)u + H^{(l)}V(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (1)$$

其中: X 为 n 维状态向量; $V(t)$ 是均值为 0, 强度为 $G^{(l)}(t)$ 的高斯白噪声信号; 初始状态 X_0 服从正态分布, 其数学期望为 m_0 , 方差为 Q_0 ; u 为 $r(r \leq n)$ 维控制向量; $A^{(l)}(t), B^{(l)}(t), H^{(l)}(t)$ 为指定矩阵, $l \in \{1, 2, \dots, s\}$ 为系统结构参数, 是取有限值的 Markov 链, 结构参数转移概率满足

$$\begin{cases} p(l, t + \Delta t | r, t) = \nu^{(lr)}(t)\Delta t + O(\Delta t), & r \neq l; \\ p(l, t + \Delta t | r, t) = 1 - \nu^{(rr)}(t)\Delta t + O(\Delta t), & r = l. \end{cases}$$

$$\nu^{(rr)}(t) = \sum_{l=1, l \neq r}^s \nu^{(lr)}(t). \quad (2)$$

记 $m(m \leq n)$ 维观测向量为

$$Y(t) = C^{(l)}(t)X(t) + N(t). \quad (3)$$

其中: $C^{(l)}(t)$ 为 $m \times n$ 矩阵; $N(t)$ 是均值为 0, 强度为 $Q^{(l)}(t)$ 的高斯白噪声信号, 且与 $V(t)$ 和 X_0 独立。

求解最优控制向量 u , 通过观测方程(3)的描述, 使系统从初始状态 $X(t_0)$ 转移到终止状态 $X(t_k)$, 并使以下泛函的条件数学期望达到最小:

$$I(X, u, t_k, t_0) = X^T(t_k)\Gamma X(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} [X^T(\tau)L(\tau)X(\tau) + u^T K^{-1}u]d\tau. \quad (4)$$

2 完全状态信息情形

完全信息情形即不需要观测方程, 系统状态既是状态量, 又是测量量. 按照最大值原理求解最优问题的一般方法是, 定义如下随机哈密尔顿函数:

$$H^{(l)}(X, u, \Psi, V, t) = \Psi^T \dot{X} + \psi_{n+1} \dot{X}_{n+1}. \quad (5)$$

其中: Ψ^T, ψ_{n+1} 分别为伴随函数向量和伴随函数; 标量 X_{n+1} 由下式确定:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{n+1} = & 2(X^T A^{(l)T} + u^T B^{(l)T} + V^T)\Gamma X + \\ & X^T L X + u^T K^{-1}u, \quad X_{n+1}(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

将式(1), (6)代入(5)的右边可得

$$H^{(l)} = \Psi^T(A^{(l)}X + B^{(l)}u + V) + \psi_{n+1}[u^T K^{-1}u +$$

$$X^T L X + 2(X^T A^{(l)T} + u^T B^{(l)T} + V^T)\Gamma X]. \quad (7)$$

伴随方程为

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = & -\partial H^{(l)}/\partial X = \\ & -A^{(l)T}\Psi - \psi_{n+1}[2A^{(l)T}\Gamma X + 2\Gamma \dot{X} + 2LX], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\psi}_{n+1} = -\partial H^{(l)}/\partial X_{n+1} = 0. \quad (9)$$

终值条件为

$$\Psi(t_k) = 0, \quad \psi_{n+1}(t_k) = -1. \quad (10)$$

由式(9)和(10)可知 $\psi_{n+1} = -1$. 将其代入式(7)和(8)可得

$$\begin{aligned} H^{(l)} = & \Psi^T(A^{(l)}X + B^{(l)}u + H^{(l)}V) - \\ & [u^T K^{-1}u + X^T L X + 2(X^T A^{(l)T} + \\ & u^T B^{(l)T} + V^T H^{(l)T})\Gamma X], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\Psi} = -A^{(l)T}\Psi + 2[A^{(l)T}\Gamma X + \Gamma \dot{X} + LX]. \quad (12)$$

根据最大值原理, 最优控制由下式确定:

$$\begin{aligned} \max_u \{ & E[H^{(l)}|x, l] \} = \\ \max_u \{ & E\{[\Psi^T(A^{(l)}X + B^{(l)}u + H^{(l)}V) - \\ & u^T K^{-1}u - X^T L_1 X - 2(X^T A^{(l)T} + u^T B^{(l)T} + \\ & H^{(l)}V)\Gamma X]|x, l]\}. \end{aligned} \quad (13)$$

记

$$\tilde{\bullet}^{(l)} = E[\bullet^{(l)}|x, l]. \quad (14)$$

由于 u 不受约束, 有

$$\begin{aligned} \partial \tilde{H}^{(l)}/\partial u = \\ E[-2B^{(l)T}\Gamma X - 2K^{-1}u + B^{(l)T}\Psi|x, l] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

计算上述条件数学期望可得

$$-2B^{(l)T}\Gamma \tilde{X}^{(l)} - 2K^{-1}u + B^{(l)T}\tilde{\Psi}^{(l)} = 0. \quad (16)$$

由式(16)可得

$$\begin{aligned} u^{(l)} = & -\frac{1}{2}KB^{(l)T}[2\Gamma \tilde{X}^{(l)} - \tilde{\Psi}^{(l)}] = \\ & -KB^{(l)T}\tilde{Z}^{(l)}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中新函数

$$Z = -\frac{1}{2}\Psi + \Gamma X. \quad (18)$$

为了求出 Z , 利用式(18)和(12)可得

$$\dot{Z} = -A^{(l)T}Z - L_1 X, \quad Z(t_k) = \Gamma X(t_k). \quad (19)$$

对式(19)的两边求在结构参数 l 和系统状态 X 已知时的条件数学期望, 则有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Z}}^{(l)} = & -A^{(l)T}\tilde{Z}^{(l)} - L_1 \tilde{X}^{(l)}, \\ \tilde{Z}^{(l)}(t_k) = & \Gamma \tilde{X}^{(l)}(t_k), \end{aligned} \quad (20)$$

该式需要与关于 $\tilde{X}^{(l)}$ 的方程联立求解. 对式(1)的两边求在结构参数 l 和系统状态 X 已知时的条件数学

期望可得

$$\dot{\tilde{X}}^{(l)} = A^{(l)}\tilde{X}^{(l)} + B^{(l)}u + H^{(l)}\tilde{V}, \quad \tilde{X}^{(l)}(t_0) = m_0. \quad (21)$$

将式(17)代入(21)可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}^{(l)} &= A^{(l)}\tilde{X}^{(l)} - B^{(l)}KB^{(l)\text{T}}\tilde{Z}^{(l)} + H^{(l)}\tilde{V}, \\ \tilde{X}^{(l)}(t_0) &= m_0. \end{aligned} \quad (22)$$

求解方程(20)和(22)可得 $\tilde{X}^{(l)}$, 由于这些方程式是线性的, 可以假设

$$\tilde{Z}^{(l)} = \tilde{P}^{(l)}\tilde{X}^{(l)}, \quad (23)$$

其中 $\tilde{P}^{(l)} = E[P(l, t)|l]$ 为待定矩阵.

对式(23)两边求导可得

$$\dot{\tilde{Z}}^{(l)} = \dot{\tilde{P}}^{(l)}\tilde{X}^{(l)} + \tilde{P}^{(l)}\dot{\tilde{X}}^{(l)}. \quad (24)$$

将式(22), (23)代入式(24), 合并同类项可得

$$\begin{aligned} &(\dot{\tilde{P}}^{(l)} + \tilde{P}^{(l)}A^{(l)} + A^{(l)\text{T}}\tilde{P}^{(l)} - \\ &\tilde{P}^{(l)}\hat{p}_l^{-1}B^{(l)}KB^{(l)\text{T}}\tilde{P}^{(l)} + L)\tilde{X}^{(l)} + \tilde{P}^{(l)}H^{(l)}\tilde{V} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

注意到 $E[\tilde{V}] = 0$, 于是对式(25)两边求无条件数学期望可得

$$\begin{aligned} &(\dot{\tilde{P}}^{(l)} + \tilde{P}^{(l)}A^{(l)} + A^{(l)\text{T}}\tilde{P}^{(l)} - \\ &\tilde{P}^{(l)}B^{(l)}KB^{(l)\text{T}}\tilde{P}^{(l)} + L)m^{(l)} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

由于对于任意的 $m^{(l)}$ 式(26)都成立, 则有

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}^{(l)} &= -\tilde{P}^{(l)}A^{(l)} - A^{(l)\text{T}}\tilde{P}^{(l)} + \\ &\tilde{P}^{(l)}B^{(l)}KB^{(l)\text{T}}\tilde{P}^{(l)} - L, \\ l &= \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (27)$$

边界条件为

$$\tilde{P}^{(l)}(t_k) = \Gamma. \quad (28)$$

在时刻 t , 当 $l = i, X = x$ 时, 有

$$\tilde{P}^{(l)}|_{l=i} = E[P(l, t)|l = i]. \quad (29)$$

而其导数可根据导数的定义进行如下计算:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}^{(l)}|_{l=i} &= \frac{d}{dt}E[P(l, t)|l = i] := \\ &\frac{d}{dt}E[P(l_t, t)|l_t = i] = \\ &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[P(l_{t+\Delta t}, t + \Delta t)|l_t = i, t] - [P(l_t, t)|l_t = i]}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (30)$$

结构参数 $l \in \{1, 2, \dots, s\}$ 为关于时间的非连续函数, 且 l 为具有指定转移概率的 Markov 链, 因此有

$$\begin{aligned} &E[P(l_{t+\Delta t}, t + \Delta t)|l_t = i, t] = \\ &\sum_{j=1}^s P(l_{t+\Delta t} = j, t + \Delta t) \times \\ &p(l_{t+\Delta t} = j, t + \Delta t | l_t = i, t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1, j \neq i}^s [P(j, t + \Delta t)\nu^{(ji)}(\Delta t)] - \\ &P(i, t + \Delta t)\nu^{(ii)}(\Delta t) + P(i, t + \Delta t). \end{aligned} \quad (31)$$

定义 $P(i, t)$ 表示矩阵 $P(l, t)$ 在系统模块为 $l = i$ 时所对应的矩阵, 从而

$$\tilde{P}^{(l)}|_{l=i} = E[P(l, t)|l = i] = P(i, t). \quad (32)$$

将式(31)代入(30), 通过化简可得

$$\dot{\tilde{P}}^{(l)}|_{l=i} = \sum_{j=1, j \neq i}^s P_j\nu^{(ji)} - P_i\nu^{(ii)} + \dot{P}_i. \quad (33)$$

将式(32), (33)代入(27)可得

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -P_iA^{(i)} - A^{(i)\text{T}}P_i + P_iB^{(i)}KB^{(i)\text{T}}P_i - \\ &\sum_{j=1, j \neq i}^s P_j\nu^{(ji)} + P_i\nu^{(ii)} - L, \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (34)$$

边界条件为

$$P_i(t_k) = \Gamma, \quad i = \overline{1, s}. \quad (35)$$

这样, 将式(23), (32)代入(17), 可求出最优控制向量

$$u^{(i)} = -KB^{(i)\text{T}}P_i\tilde{X}^{(i)}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (36)$$

因为

$$\tilde{X}^{(i)} = E[X|x, i] = X^{(i)}, \quad (37)$$

其中 $X^{(i)}$ 为系统在第 i 结构下满足状态方程(1)的系统状态向量, 所以有

$$u^{(i)} = -KB^{(i)\text{T}}P_iX^{(i)}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (38)$$

3 不完全状态信息情形

不完全状态信息情形即状态值不能直接用于控制, 需要观测的情况, 如式(3)定义的观测向量 $Y(t) \leq n$. 此时, 利用最大值原理求解最优控制问题就是寻求 u 使 $E[H^{(l)}|Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k]$ 达到最大, 即 $\max_u \{E[H^{(l)}|Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k]\}$.

$$\bullet^{(l)} := E[\bullet^{(l)}|Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k], \quad (39)$$

则有

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(l)} &= E[H^{(l)}|Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k] = \\ &E[E[H^{(l)}|x, l]|Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k] = \\ &E[\tilde{H}^{(l)}|Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k]. \end{aligned} \quad (40)$$

假设通过观测数据 $Y(\tau)(t_0 \leq \tau \leq t_k)$ 可获得系统关于结构参数和状态向量的概率密度函数 $f(x, l, t)$, 则定义

$$\hat{H}^{(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}^{(l)}(x, l, u, t)f(x, l, t)dx := \langle \tilde{H}^{(l)} \rangle^{*(l)}. \quad (41)$$

利用最大值原理, 当控制向量 $u(t)$ 无约束时, 有

$$\frac{\partial \hat{H}^{(l)}}{\partial u} = \frac{\partial \langle \tilde{H}^{(l)} \rangle^{*(l)}}{\partial u} = 0, \quad (42)$$

即

$$\langle E[-2B^{(l)T} \Gamma X - 2K^{-1}u + B^{(l)T} \Psi | x, l] \rangle^{*(l)} = 0. \quad (43)$$

通过计算上述条件数学期望可得

$$\langle B^{(l)T} \Gamma E[X | x, l] \rangle^{*(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} B^{(l)T} \Gamma E[X | x, l] f(x, l, t) dx = B^{(l)T} \Gamma \hat{X}^{(l)}, \quad (44)$$

$$\langle K^{-1}u \rangle^{*(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}u(t) f(x, l, t) dx = K^{-1}u^{(l)}(t) \hat{p}_l, \quad (45)$$

$$\langle B^{(l)T} E[\psi | x, l] \rangle^{*(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} B^{(l)T} E[\psi | x, l] f(x, l, t) dx = B^{(l)T} \hat{\psi}^{(l)}, \quad (46)$$

其中 $\hat{p}_l = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, l, t) dx$, 为系统处于状态 l 的后验概率. 将式 (44), (46) 代入 (43), 通过化简可得

$$u^{(l)} = -\hat{p}_l^{-1} K B^{(l)T} \left[\Gamma \hat{X}^{(l)} - \frac{1}{2} \hat{\psi}^{(l)} \right] = -\hat{p}_l^{-1} K B^{(l)T} \hat{Z}^{(l)}, \quad (47)$$

其中 Z 与式 (18) 所定义的相同. 则有

$$\hat{Z}^{(l)} = E \left[-\frac{1}{2} \Psi + \Gamma X | Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k \right] = E[\tilde{Z}^{(l)} | Y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t_k]. \quad (48)$$

通过对式 (23) 两边求关于观测向量 Y 的条件期望可得

$$\hat{Z}^{(l)} = \tilde{P}^{(l)} \hat{X}^{(l)}. \quad (49)$$

故在时刻 t , 当 $l = i, X = x$ 时, 有

$$\hat{Z}^{(i)} = P_i \hat{X}^{(i)}. \quad (50)$$

从而, 最优控制向量

$$u^{(i)} = -K B^{(i)T} P_i \frac{\hat{X}^{(i)}}{\hat{p}_i}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (51)$$

对于状态估计 $\hat{X}^{(l)}$ 和结构估计 \hat{p}_l 可利用文献 [11] 的结果. 当结构变化与随机转移过程相互独立, 可得最简单的滤波方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}^{(l)} &= A^{(l)} \hat{X}^{(l)} + R^{(l)} C^T Q^{-1} (Y - C \hat{X}^{(l)}) + \\ &B^{(l)} u^{(l)} + \sum_{r=1}^s \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_l} v_{rl}(t) (\hat{X}^{(r)} - \hat{X}^{(l)}), \\ \hat{X}^{(l)}(t_0) &= m_0^{(l)}. \end{aligned} \quad (52)$$

协方差矩阵 $R^{(l)}$ 由下列方程确定:

$$\begin{aligned} \dot{R}^{(l)} &= H^{(l)} G H^{(l)T} + A^{(l)} R^{(l)} + R^{(l)} A^{(l)T} - \\ &R^{(l)} C^T Q^{-1} C R^{(l)} + \sum_{r=1}^s \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_l} v_{rl}(R^{(r)} - \\ &R^{(l)} + (\hat{X}^{(r)} - \hat{X}^{(l)})(\hat{X}^{(r)} - \hat{X}^{(l)})^T), \\ R^{(l)}(t_0) &= Q_0^{(l)}. \end{aligned} \quad (53)$$

而后验模态概率为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}}_l(t) &= -v_{ll}(t) \hat{p}_l(t) + \sum_{r=1, r \neq l}^s v_{lr}(t) \hat{p}_r(t) - \\ &\frac{1}{2} \hat{p}_l(t) \left[\hat{\rho}_0^{(l)}(\mathbf{y}, t) - \sum_{k=1}^s \hat{p}_k(t) \hat{\rho}_0^{(k)}(\mathbf{y}, t) \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0^{(s)}(\mathbf{y}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \hat{f}^{(s)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \\ &\sum_{i,j=1}^m \frac{Q^{ij}}{|Q(t)|} \left\{ \left[y_i - \sum_{q=1}^{n_{n_x}} c_{iq}^{(s)} \hat{x}_q^{(s)} \right] \times \right. \\ &\left. \left[y_j - \sum_{p=1}^{n_{n_x}} c_{jp}^{(s)} \hat{x}_p^{(s)} \right] + \sum_{p,q=1}^{n_{n_x}} c_{jp}^{(s)} c_{iq}^{(s)} R_{pq}^{(s)} \right\}, \end{aligned}$$

$|Q(t)|$ 为 $Q(t)$ 的行列式, Q_{ij} 为矩阵 $Q(t)$ 的元素, 而 Q^{ij} 为元素 Q_{ij} 的代数余子式.

注 1 当对结构随机线性跳变系统进行最优控制设计时, 可以将滤波与最优控制器设计分开进行, 类似于单结构系统.

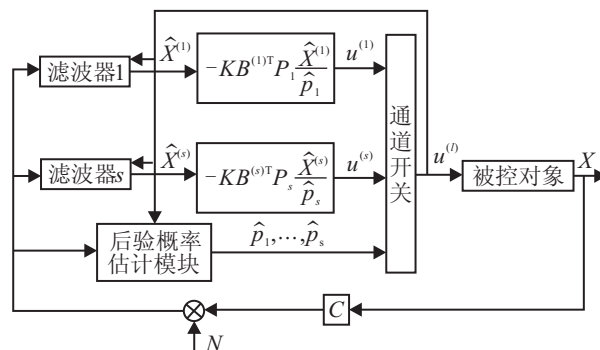


图 1 结构跳变线性系统的控制结构

如图 1 所示, 结构随机跳变系统控制具有 s 个并行链路, 为了计算这些滤波器与控制器的参数, 必须求解式 (34), (52) 和 (54), 且这些方程通过吸收和还原函数相联系.

4 仿真算例

假设被控对象由下式描述:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A^{(l)}(t)(X - X_p) + B^{(l)}u + V^{(l)}(t), \\ X(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (55)$$

其中: $A^{(1)}(t) = -0.03, B^{(1)}(t) = 5, A^{(2)}(t) = 0, B^{(2)}(t) = -5, H^{(1)}(t) = H^{(2)}(t) = 1, x_0 = 25, V^{(1)}(t)$ 的强度 $G_1 = 0.01, V^{(2)}(t)$ 的强度 $G_2 = 0.02$, 平衡点 $E[X_p] = 10$.

结构跳变由转移强度为 $v_{ij}(i, j = 1, 2)$ 的分散转移 Markov 过程组成. 其中: $v_{12} = v_{22} = 0.10, v_{21} = v_{11} = 0.05$.

观测方程为

$$Y = C^{(l)}(X - X_p) + N. \quad (56)$$

其中: $C^{(1)} = C^{(2)} = 1$, 噪声 N 的强度为 $Q = 0.04$.

代价函数定义为

$$I_0 = (X(t_k) - X_0)^2 + \int_{t_0}^{t_k} \left[L(X(t) - X_p)^2 + \frac{1}{K} u^2(t) \right] dt. \quad (57)$$

其中: $L = 2$, $K = 0.01$. 通过求最优控制向量 u , 使 \hat{I}_0 达到最小值.

由式 (51), 求得最优控制向量 $u(t)$ 为

$$u^{(1)} = -kB^{(1)}P^{(1)} \frac{\hat{X}^{(1)} - X_p}{\hat{p}_1}, \quad (58)$$

$$u^{(2)} = -kB^{(2)}P^{(2)} \frac{\hat{X}^{(2)} - X_p}{\hat{p}_2}. \quad (59)$$

其中: 系数矩阵 $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$ 由式 (34) 确定, 即

$$\dot{P}^{(1)} = -2P^{(1)}A^{(1)} + K\hat{p}_1^{-1}(P^{(1)})^2(B^{(1)})^2 - v_{21}P^{(2)} + v_{11}P^{(1)} - L, \quad P^{(1)}(t_k) = 1; \quad (60)$$

$$\dot{P}^{(2)} = K\hat{p}_2^{-1}(P^{(2)})^2(B^{(2)})^2 - v_{12}P^{(1)} + v_{22}P^{(2)} - L, \quad P^{(2)}(t_k) = 1. \quad (61)$$

系统的状态估计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}^{(1)} &= A^{(1)}(\hat{X}^{(1)} - X_p) + B^{(1)}u^{(1)} + \\ &R^{(1)}C^{(1)}Q^{-1}(Y - C^{(1)}(\hat{X}^{(1)} - X_p)) + \\ &\frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_1}v_{21}(\hat{X}^{(2)} - \hat{X}^{(1)}), \end{aligned}$$

$$\hat{X}^{(1)}(t_0) = m_0^{(1)}; \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}^{(2)} &= R^{(2)}C^{(2)}Q^{-1}(Y - C^{(2)}(\hat{X}^{(2)} - X_p)) + \\ &B^{(2)}u^{(2)} + \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}v_{12}(\hat{X}^{(1)} - \hat{X}^{(2)}), \end{aligned}$$

$$\hat{X}^{(2)}(t_0) = m_0^{(2)}. \quad (63)$$

估计误差的协方差矩为

$$\begin{aligned} \dot{R}^{(1)} &= G_1 + 2A^{(1)}R^{(1)} - (R^{(1)}C^{(1)})^2Q^{-1} + \\ &\frac{\hat{p}_2}{\hat{p}_1}v_{21}[R^{(2)} - R^{(1)} + (\hat{X}^{(2)} - \hat{X}^{(1)})^2], \\ R^{(1)}(t_0) &= Q_0^{(1)}; \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}^{(2)} &= G_2 - (R^{(2)}C^{(2)})^2Q^{-1} + \\ &\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}v_{12}[R^{(1)} - R^{(2)} + (\hat{X}^{(2)} - \hat{X}^{(1)})^2], \\ R^{(2)}(t_0) &= Q_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (65)$$

模态的后验概率估计 $\hat{p}^{(l)}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \left\{ v_{12} + \frac{\hat{p}_1}{2Q} [(Y_1 - C_1(\hat{X}^{(2)} - X_p))^2 + \right. \\ &R^{(2)}] \left. \right\} \hat{p}_2 - \left\{ v_{21} + \frac{\hat{p}_2}{2Q} [(Y_1 - \right. \\ &C_1(\hat{X}^{(1)} - X_p))^2 + R^{(1)}] \left. \right\} \hat{p}_1 = \\ &-v_{12}\hat{p}_1 + v_{21}\hat{p}_2 + \frac{\hat{p}_1\hat{p}_2}{2Q} \{ [(Y_1 - C_1(\hat{X}^{(2)} - \\ &X_p))^2 + R^{(2)}] - [(Y_1 - \\ &C_1(\hat{X}^{(1)} - X_p))^2 + R^{(1)}] \}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\hat{p}_2 = 1 - \hat{p}_1. \quad (67)$$

仿真结果如图 2~图 5 所示. 由图 2 可知, 实际状态估计正确, 且系统收敛于平衡点; 由图 3 和图 4 可知, 对 Markov 跳变系统模态的估计准确; 图 5 为控制量随时间的变化.

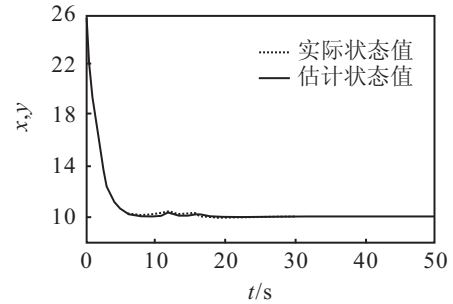


图 2 状态值及其估计

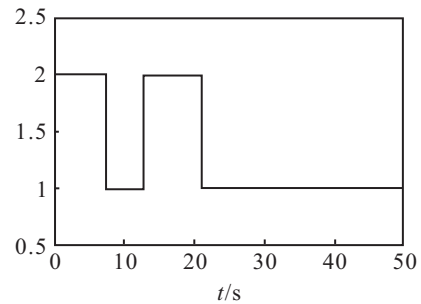


图 3 实际模态

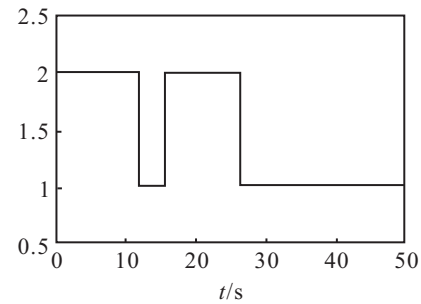


图 4 估计模态

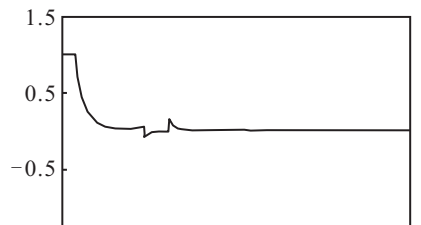


图 5 无约束控制量

5 结 论

本文研究了线性随机跳变系统的最优控制问题; 基于随机最大值原理, 推导了独立分散转移跳变系统在控制不受约束条件下完全信息和不完全信息两种情形的最优控制算法. 仿真实例表明了本文算法的正

确性. 值得指出的是, 该方法可通过与统计线性化方法结合而推广到控制受约束或非线性 Markov 跳变系统的控制中.

参考文献(References)

- [1] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete time Markov jump linear systems[M]. London: Springer-Verlag, 2005: 52-78.
- [2] 吴森堂. 结构随机跳变系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 131-154.
(Wu S T. Theory and application of systems with random changing structure[M]. Beijing: Science Press, 2007: 131-154.)
- [3] Stoica A, Yaesh I. Jump Markovian-based control of wing deployment for an uncrewed air vehicle[J]. J of Guidance, 2002, 25(2): 407-411.
- [4] Hu Shiguang, Fang Yangwang, Xiao Bingsong, et al. Near space hypersonic vehicle longitudinal motion control based on Markov jump system theory[C]. Proc of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. Ji'nan, 2010: 7068-7072.
- [5] 方洋汪, 胡诗国, 伍友利, 等. 随机跳变系统状态估计与控制研究进展[J]. 空军工程大学学报, 2010, 11(4): 31-36.
(Fang Y W, Hu S G, Wu Y L, et al. Progress on state estimate and control of stochastic jump system[J]. J of Air Force Engineering University, 2010, 11(4): 31-36.)
- [6] Ji Y, Chizech H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(7): 777-788.
- [7] Boukas E K, Liu Z K. Suboptimal regulators for a jump linear system with time-multiplied cost[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(1): 301-305.
- [8] Oswaldo L V Costal, Wanderlei L de Paulo. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems[J]. Automatica, 2007, 43(4): 587-597.
- [9] 方洋汪, 王洪强, 伍友利. 具有条件马尔科夫结构的离散随机系统最优控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(1): 99-102.
(Fang Y W, Wang H Q, Wu Y L. Optimal control for discrete stochastic system with conditional Markov structure[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(1): 99-102.)
- [10] 方洋汪. 随机系统最优控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 118-128.
(Fang Y W. Optimal control for stochastic systems[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 118-128.)
- [11] 方洋汪. 随机系统分析与应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006: 88-93.
(Fang Y W. Analysis and application of stochastic systems[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2006: 88-93.)
- [7] 章玲, 周德群, 李存芳. R-WGA 算子的构建及其在群决策分析中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1352-1357.
(Zhang L, Zhou D Q, Li C F. R-WGA operator and its application in group decision-making[J]. Control and Decision, 2007, 22(12): 1352-1357.)
- [8] 陈晓红. 复杂大群体决策方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
(Chen X H. Complex large group decision making method and application[M]. Beijing: Science Press, 2009.)
- [9] Queiroz S. Multiperson Choquet-compromise search on large combinatorial[C]. The 2nd IEEE Int Workshop on Soft Computation Applications. Gyula, 2007: 187-192.
- [10] 吴昭仪. 层级分析法群体决策整合模式之研究[D]. 台南: 成功大学工业与咨询管理学系, 2005.
(Wu S Y. A study on the group decision aggregation in AHP[D]. Tainan: Department of Industrial and Information Management, National Cheng Kung University, 2005.)
- [11] Bhatia P K. On measures of information energy[J]. Information Sciences, 1997, 97 (3/4): 233-240.
- [12] Sugeno M. Theory of fuzzy integrals and its application[D]. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [13] Grabisch M. K-order additive discrete fuzzy measures and their representation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 92(2): 167-199.
- [14] 武建章, 张强. 基于 2-可加模糊测度的多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(7): 1229-1237.
(Wu J Z, Zhang Q. Multicriteria decision making method based on 2-order additive fuzzy measures[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2010, 30(7): 1229-1237.)
- [15] Takahagi E. On Identification methods of λ -fuzzy measures using weights and λ [J]. Japanese J of Fuzzy Sets and Systems, 2000, 12(5): 665-676.
- [16] Mikenina L, Zimmermann H J. Improved feature selection and classification by the 2-additive fuzzy measure[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 107(2): 197-218.

(上接第395页)