

文章编号: 1001-0920(2013)03-0357-06

## 基于特征结构配置的二阶线性系统鲁棒容错控制设计

王国胜<sup>1</sup>, 武云丽<sup>2</sup>, 段广仁<sup>3</sup>

(1. 装甲兵工程学院 控制工程系, 北京 100072; 2. 北京控制工程研究所 空间智能控制技术国家重点实验室, 北京 100190; 3. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 研究基于特征结构配置的二阶线性系统鲁棒容错控制设计问题, 目的是重新设计状态反馈控制律, 使得故障闭环系统和正常闭环系统具有相同的特征值. 两闭环系统的特征向量依最小二乘法接近, 而且能通过极小化灵敏度指标提高系统的鲁棒性. 基于状态反馈特征结构配置的参数化结果, 将系统灵敏度指标优化问题转化为含有约束条件的优化问题, 并提出了鲁棒容错控制设计方法. 数值算例及其仿真结果验证了所提出设计方法的有效性.

**关键词:** 二阶线性系统; 特征结构配置; 容错控制; 鲁棒性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Robust fault-tolerant control design of second-order linear systems via eigenstructure assignment

WANG Guo-sheng<sup>1</sup>, WU Yun-li<sup>2</sup>, DUAN Guang-ren<sup>3</sup>

(1. Department of Control Engineering, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China; 2. National Key Laboratory of Science and Technology on Space Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China; 3. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: WANG Guo-sheng, E-mail: gswang@126.com)

**Abstract:** The robust fault-tolerant control design problem of second-order linear systems via eigenstructure assignment is investigated. The aim is to redesign a state feedback control law such that the fault closed-loop system has the same eigenvalues with the normal close-loop system, the eigenvectors of the fault closed-loop system are as close to those of the normal close-loop system as possible in terms of least squares, and the sensitivity is minimized to improve the system robustness. Based on the parameterized result of state feedback eigenstructure assignment, the optimal problem of sensitivity is changed into an optimal problem with some constraint conditions, and the robust fault-tolerant control design method is proposed. Finally, a numerical example and its simulation results show the effectiveness of the proposed design method.

**Key words:** second-order linear systems; eigenstructure assignment; fault-tolerant; robustness

### 0 引言

随着计算机、制造、材料等一系列先进技术的引入, 实际控制系统在尽可能拥有众多功能的同时变得越来越复杂, 使得系统的某些重要性能退化, 甚至导致系统不稳定. 容错控制系统能够使故障系统从损坏或者系统错误中恢复, 因此容错控制的研究越来越受到国内外学者的关注, 并提出了很多容错控制研究方法, 主要有线性二次型调节方法<sup>[1]</sup>、伪逆方法<sup>[2]</sup>、逆组件模态综合方法<sup>[3]</sup>、Lyapunov 方法<sup>[4]</sup>、LMI 法<sup>[5]</sup>和特征结构配置法<sup>[6-9]</sup>等.

为进一步提高控制系统的鲁棒性, 鲁棒容错控制

已逐渐成为容错控制研究领域中的一个热点. 文献[10]研究了线性定常系统的传感器和执行器具有时变故障的鲁棒容错控制问题, 利用  $L_2$  增益优化方法提出了依赖参数的鲁棒容错控制设计方法; 文献[11]研究了网络控制系统的鲁棒容错策略问题, 利用线性矩阵不等式方法给出了鲁棒容错控制器的参数化解; 文献[12]研究了具有 Markovian 跳跃型故障的手臂型机器人控制系统鲁棒容错控制问题, 提出了  $H_2$ 、 $H_\infty$  和混合  $H_2/H_\infty$  鲁棒容错控制器设计策略; 文献[13]研究了具有执行器失效和有界干扰的线性定常系统的鲁棒容错控制问题, 提出了直接自适应补偿鲁棒容

收稿日期: 2011-11-02; 修回日期: 2012-05-06.

基金项目: 空间智能控制技术国家重点实验室基金项目(9140C590102).

作者简介: 王国胜(1975-), 男, 副教授, 从事线性系统控制理论的研究; 段广仁(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事线性系统控制理论及其应用、鲁棒控制、容错控制等研究.

错控制方法. 本文将基于特征结构配置设计参数化方法<sup>[14-18]</sup>, 研究二阶线性系统的鲁棒容错设计问题.

## 1 问题描述

考虑一类二阶线性定常系统, 其动态方程可以表示为

$$\dot{q} + Aq + Cq = Bu. \quad (1)$$

其中:  $q \in \mathbf{R}^n$  和  $u \in \mathbf{R}^r$  分别为系统 (1) 的状态向量和输入向量;  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times r}$  和  $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统 (1) 的已知参数矩阵, 且满足下列假设条件.

**假设 1**  $\text{rank}(B) = r$ ;

**假设 2** 系统 (1) 是可控的, 即

$$\text{rank}[s^2 I_{n \times n} + sA + C \ B] = n, \forall s \in \mathbf{C}. \quad (2)$$

由于建模误差或外界干扰会导致系统 (1) 的参数发生变化, 此时系统 (1) 可写为

$$\ddot{q}_f + A_f \dot{q}_f + C_f q_f = B_f u_f. \quad (3)$$

其中:  $q_f \in \mathbf{R}^n$ ,  $u_f \in \mathbf{R}^m$  分别为系统 (1) 的状态向量和输入向量;  $A_f \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_f \in \mathbf{R}^{n \times m}$  和  $C_f \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统 (2) 的已知参数矩阵, 可看作系统 (1) 中矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times r}$  和  $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$  所对应的扰动后的矩阵, 且满足下列假设条件.

**假设 3**  $\text{rank}(B_f) = m$ ;

**假设 4** 系统 (2) 是可控的, 即

$$\text{rank}[s^2 I + sA_f + C_f \ B_f] = n, \forall s \in \mathbf{C}. \quad (4)$$

为方便起见, 文中称系统 (1) 为正常二阶线性系统, 系统 (3) 为故障二阶线性系统. 将如下状态反馈控制律

$$u = K_0 q + K_1 \dot{q}, \quad K_0, K_1 \in \mathbf{R}^{r \times n} \quad (5)$$

应用到系统 (1) 中, 可得到正常闭环二阶线性系统

$$\ddot{q} + (A - BK_1)\dot{q} + (C - BK_0)q = 0. \quad (6)$$

因非亏损矩阵的特征值对参数扰动不敏感, 故本文只考虑正常闭环系统 (6) 的特征值为互异且自共轭的情况. 记系统 (6) 的特征值为  $s_i \in \mathbf{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 其相应的特征向量为  $v_i \in \mathbf{C}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 则有

$$[s_i^2 I_{n \times n} + (A - BK_1)s_i + (C - BK_0)]v_i = 0. \quad (7)$$

将如下状态反馈控制律:

$$u_f = K_{0f} q_f + K_{1f} \dot{q}_f, \quad K_{0f}, K_{1f} \in \mathbf{R}^{m \times n} \quad (8)$$

应用到系统 (7) 中, 可得到故障闭环二阶线性系统

$$\ddot{q}_f + (A_f - B_f K_{1f})\dot{q}_f + (C_f - B_f K_{0f})q_f = 0. \quad (9)$$

记系统 (9) 的特征值为  $s_{if} \in \mathbf{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 其相应特征向量为  $v_{if} \in \mathbf{C}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 则有

$$[s_{if}^2 I_{n \times n} + (A_f - B_f K_{1f})s_{if} + (C_f - B_f K_{0f})]v_{if} = 0. \quad (10)$$

注意到, 系统 (9) 可以转化为如下等价的一阶线

性系统:

$$\dot{z}_f = A_{ef} z_f. \quad (11)$$

其中

$$z_f = \begin{bmatrix} q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}, \quad A_{ef} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ B_f K_{0f} - C_f & B_f K_{1f} - A_f \end{bmatrix}. \quad (12)$$

记

$$V_f = [v_{1f} \ v_{2f} \ \cdots \ v_{2nf}], \\ A_f = \text{diag}(s_{1f}, s_{2f}, \dots, s_{2nf}), \quad (13)$$

则式 (10) 可表示为

$$V_f A_f^2 + (A_f - B_f K_{1f})V_f A_f + (C_f - B_f K_{0f})V_f = 0. \quad (14)$$

为便于描述本文所考虑的鲁棒容错控制设计问题, 首先给出如下引理. 引理 1 对系统 (9) 和 (11) 都适用.

**引理 1**<sup>[18]</sup> 给定系统 (9) 和 (10), 则存在矩阵  $V_f$ ,  $V_f \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$ , 满足

$$A_{ef} \begin{bmatrix} V_f \\ V_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_f \\ V_f' \end{bmatrix} A_f \quad (15)$$

的充要条件是式 (14) 和下式同时成立:

$$V_f' = V_f A_f. \quad (16)$$

基于上面的叙述和引理 1, 本文所考虑的基于状态反馈特征结构配置的二阶线性系统鲁棒容错控制设计问题可描述如下(简记为问题 RRCD).

**问题 RRCD:** 给定满足假设 1~假设 4 的正常二阶线性系统 (1) 和故障二阶线性系统 (3), 并假设正常二阶线性系统 (1) 可通过状态反馈控制律 (5) 使正常闭环二阶线性系统 (6) 具有一组互异且自共轭复数  $s_i \in \mathbf{C}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 及其相应的特征向量  $v_i \in \mathbf{C}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . 重新设计一个状态反馈控制律 (8), 使得故障闭环二阶线性系统 (9) 和正常闭环二阶线性系统 (6) 的特征结构尽可能地接近, 即

$$s_i = s_{if}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (17)$$

$$\min J_i = \min \|v_i - v_{if}\|_2^2, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (18)$$

成立; 同时能够提高系统鲁棒性, 即最小化如下的系统灵敏度指标:

$$J(V_f, A_f) = \left\| \begin{bmatrix} V_f \\ V_f A_f \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} V_f \\ V_f A_f \end{bmatrix}^{-1} \right\|_2. \quad (19)$$

## 2 正常二阶线性系统的状态反馈特征结构配置

记

$$A = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_{2n}], \quad V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_{2n}], \quad (20)$$

则系统(7)可变为

$$VA^2 + (A - BK_1)VA + (C - BK_0)V = 0. \quad (21)$$

再记

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V \\ VA \end{bmatrix}, K = [K_0 \ K_1], W = K\tilde{V}, \quad (22)$$

则可将式(21)改写为

$$VA^2 + AVA + CV = BW. \quad (23)$$

因系统(1)可控, 对矩阵  $[s^2I + sA + C \ B]$  实施一系列矩阵初等变换, 可得到满足下式的多项式矩阵  $N(s) \in \mathbf{R}^{n \times r}[s]$  和  $D(s) \in \mathbf{R}^{r \times r}[s]$ :

$$[s^2I + sA + C]^{-1}B = N(s)D^{-1}(s). \quad (24)$$

基于上述推导, 通过状态反馈控制律(5)可使得正常二阶线性系统(1)具有期望的特征值  $s_i \in \mathbf{C}$  和特征向量  $v_i \in \mathbf{C}^n$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 的特征结构配置问题, 转化为矩阵方程(1)的矩阵  $V \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$  和  $W \in \mathbf{C}^{r \times 2n}$  的求解问题, 继而可通过式(23)中第3式求解增益矩阵  $K \in \mathbf{R}^{r \times 2n}$ . 可将矩阵方程(23)看作著名的 Sylvester 矩阵方程的推广形式, 这里将其称作广义二阶 Sylvester 矩阵方程. 下面的定理给出了广义二阶 Sylvester 矩阵方程(23)的求解结果, 其详细求解过程可参见文献[16-17].

**定理 1** 给定满足假设1和假设2的正常二阶线性系统(1)及一组互异自共轭复数  $s_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \dots, 2n$ , 则广义二阶 Sylvester 矩阵方程(23)中的矩阵  $V \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$  和  $W \in \mathbf{C}^{r \times 2n}$  的列向量可参数化表示如下:

$$v_i = N(s_i)g_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n; \quad (25)$$

$$w_i = D(s_i)g_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (26)$$

其中  $g_i \in \mathbf{C}^r$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 是一组自由参量.

由引理1可知, 矩阵  $\tilde{V}$  是与系统(6)等价的一阶线性系统特征向量矩阵, 因此它是非奇异的. 基于定理1中式(25)和(26), 根据式(22)中第3式, 并通过下式可计算得到状态反馈增益阵  $K \in \mathbf{R}^{r \times 2n}$  的参数化表达式:

$$K = W\tilde{V}^{-1}. \quad (27)$$

其中矩阵  $\tilde{V}$  为非奇异矩阵, 可通过自由参量  $g_i \in \mathbf{C}^r, i = 1, 2, \dots, 2n$ , 表示成如下约束条件:

约束 C1:

$$\det \begin{bmatrix} N(s_1)g_1 & \cdots & N(s_{2n})g_{2n} \\ s_1 N(s_1)g_1 & \cdots & s_{2n} N(s_{2n})g_{2n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

为了确保由式(27)得到的增益阵  $K \in \mathbf{R}^{r \times 2n}$  是实矩阵, 需满足通过自由参量  $g_i \in \mathbf{C}^r$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 给出的如下约束条件:

约束 C2:  $s_i = \bar{s}_j \Leftrightarrow g_i = \bar{g}_j, i, j = 1, 2, \dots, 2n$ .

### 3 故障二阶线性系统的状态反馈特征结构配置

记

$$\tilde{V}_f = \begin{bmatrix} V_f \\ V_f A_f \end{bmatrix}, K_f = [K_{0f} \ K_{1f}], W_f = K_f \tilde{V}_f, \quad (28)$$

则式(14)变为

$$V_f A_f^2 + A_f V_f A_f + C_f V_f = B_f W_f. \quad (29)$$

系统(3)可控, 对矩阵  $[s^2I + sA_f + C_f \ B_f]$  实施一系列矩阵初等变换, 可得到满足下式的多项式矩阵  $N_f(s) \in \mathbf{R}^{n \times m}[s]$  和  $D_f(s) \in \mathbf{R}^{m \times m}[s]$ :

$$[s^2I + sA_f + C_f]^{-1}B_f = N_f(s)D_f^{-1}(s). \quad (30)$$

基于上述推导, 通过状态反馈控制律(8)可使得故障二阶线性系统(2)具有期望的特征值  $s_{if} \in \mathbf{C}$  和特征向量  $v_{if} \in \mathbf{C}^n$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 的特征结构配置问题转化为矩阵方程(29)的矩阵  $V_f \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$  和  $W_f \in \mathbf{C}^{m \times 2n}$  的求解问题, 继而通过式(28)中第3式可求解增益矩阵  $K \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$ . 方程(29)同样为广义二阶 Sylvester 矩阵方程, 参照定理1, 可通过下述定理给出方程(29)以及故障二阶线性系统的状态反馈特征结构配置问题中增益矩阵  $K \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$  的求解结果.

**定理 2** 给定满足假设3和假设4的故障二阶线性系统(3)以及一组互异自共轭复数  $s_{if} \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \dots, 2n$ , 则广义二阶 Sylvester 矩阵方程(29)中的矩阵  $V_f \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$  和  $W_f \in \mathbf{C}^{m \times 2n}$  的列向量可参数化表示如下:

$$v_{if} = N_f(s_{if})g_{if}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n; \quad (31)$$

$$w_{if} = D_f(s_{if})g_{if}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (32)$$

此外, 状态反馈增益矩阵  $K \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$  可以参数化表示为

$$K_f = W_f \tilde{V}_f^{-1}. \quad (33)$$

其中  $g_{if} \in \mathbf{C}^m$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 是满足下述条件的自由参量:

约束 C3:

$$\det \begin{bmatrix} N_f(s_{1f})g_{1f} & \cdots & N_f(s_{2nf})g_{2nf} \\ s_{1f} N_f(s_{1f})g_{1f} & \cdots & s_{2nf} N_f(s_{2nf})g_{2nf} \end{bmatrix} \neq 0;$$

约束 C4:

$$s_{if} = \bar{s}_{jf} \Leftrightarrow g_{if} = \bar{g}_{jf}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n.$$

### 4 求解问题 RRCD

由定理1和定理2可知, 正常二阶线性系统(1)和故障二阶线性系统(3)均可控, 从而正常闭环二阶线性系统(6)和故障闭环系统(9)的所有特征值均可

由状态反馈控制律进行任意配置. 不妨假设正常闭环二阶线性系统(6)和故障闭环二阶线性系统(9)具有相同特征值, 即  $s_i = s_{if}, i = 1, 2, \dots, 2n$ . 这样, 显然问题 RRCD 中条件(17)成立, 因此解决问题 RRCD 的主要任务是设计满足条件(18)和(19)的状态反馈控制律(8).

将式(25)和(31)代入(18), 可得

$$J_i = \|N(s_i)g_i - N_f(s_i)g_{if}\|_2^2, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (34)$$

通过正交投影方法, 可得到

$$g_{if} = [(N_f(s_i))^H N_f(s_i)]^{-1} (N_f(s_i))^H N(s_i)g_i, \quad (35)$$

其中  $(\cdot)^H$  表示矩阵的共轭转置.

记

$$\Sigma_i = [(N_f(s_i))^H N_f(s_i)]^{-1} N_f(s_i)N(s_i), \quad (36)$$

则式(35)可简记为

$$g_{if} = \Sigma_i g_i, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (37)$$

将式(37)代入(31)和(32), 可得

$$v_{if} = N_f(s_i)\Sigma_i g_i, i = 1, 2, \dots, 2n; \quad (38)$$

$$w_{if} = D_f(s_i)\Sigma_i g_i, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (39)$$

基于式(38)和(39)给出的矩阵  $V_f \in \mathbf{C}^{m \times 2n}$  和  $W_f \in \mathbf{C}^{m \times 2n}$  的参数化表达式, 由式(33)可得到矩阵  $K_f \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$  的参数化表达式为

$$K_f = W_f \tilde{V}_f^{-1}. \quad (40)$$

其中

$$W_f = [w_{1f} \ w_{2f} \ \cdots \ w_{2nf}],$$

$$\tilde{V}_f = \begin{bmatrix} v_{1f} & v_{2f} & \cdots & v_{2nf} \\ v_{1f}s_1 & v_{2f}s_2 & \cdots & v_{2nf}s_{2n} \end{bmatrix}.$$

为了保证式(40)给出的状态反馈增益矩阵  $K_f$  为实阵, 自由参量  $g_i \in \mathbf{C}^r$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 需同时满足约束 C1 ~ 约束 C4, 其中约束 C2 与 C4 显然等价, 而约束 C1、C2 和 C3 可分别写为

约束 C1':

$$\det \begin{bmatrix} N(s_1)g_1 & \cdots & N(s_{2n})g_{2n} \\ s_1 N(s_1)g_1 & \cdots & s_{2n} N(s_{2n})g_{2n} \end{bmatrix} \neq 0;$$

约束 C2':

$$s_i = \bar{s}_j \Leftrightarrow g_i = \bar{g}_j, i, j = 1, 2, \dots, 2n;$$

约束 C3':

$$\det \begin{bmatrix} N_f(s_1)\Sigma_1 g_1 & \cdots & N_f(s_{2n})\Sigma_{2n} g_{2n} \\ s_1 N_f(s_1)\Sigma_1 g_1 & \cdots & s_{2n} N_f(s_{2n})\Sigma_{2n} g_{2n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

上述推导内容已经解决了问题 RRCD 中前 2 个条件(17)和(18), 下面只需解决条件(19)即可. 基于式(38)给出的矩阵  $V_f \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$  的参数化表达式, 指标(19)可进一步参数化表示为

$$J(g_i, s_i, i = 1, 2, \dots, 2n) =$$

$$\left\| \begin{bmatrix} N_f(s_1)\Sigma_1 g_1 & \cdots & N_f(s_{2n})\Sigma_{2n} g_{2n} \\ s_1 N_f(s_1)\Sigma_1 g_1 & \cdots & s_{2n} N_f(s_{2n})\Sigma_{2n} g_{2n} \end{bmatrix} \right\|_2 \times \left\| \begin{bmatrix} N_f(s_1)\Sigma_1 g_1 & \cdots & N_f(s_{2n})\Sigma_{2n} g_{2n} \\ s_1 N_f(s_1)\Sigma_1 g_1 & \cdots & s_{2n} N_f(s_{2n})\Sigma_{2n} g_{2n} \end{bmatrix}^{-1} \right\|_2. \quad (41)$$

综合定理 1、定理 2 和上述推导, 问题 RRCD 的求解依赖于下述关于指标(41)的含有约束条件的极小化问题的解:

$$\min_{g_i \in \mathbf{C}^r, s_i \in \mathbf{C}} J(g_i, s_i, i = 1, 2, \dots, 2n),$$

$$\text{s.t. 约束 C1', C2' 和 C3' 成立.} \quad (42)$$

将由极小化问题(42)求解得到的常数值  $g_i \in \mathbf{C}^m$  和  $s_i \in \mathbf{C}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) 代入式(38)和(39), 可得到常数阵  $V_f \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$  和  $W_f \in \mathbf{C}^{m \times 2n}$ . 基于式(40)即可得到满足问题 RRCD 中条件(17)~(19)的状态反馈控制律(8)的增益矩阵  $K_f \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$ . 综上, 可给出解决问题 RRCD 的定理如下.

**定理 3** 给定满足假设 1 和假设 2 的正常二阶线性系统(1), 满足假设 3 和假设 4 的故障二阶线性系统(3)以及一组互异自共轭复数  $s_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ , 则问题 RRCD 有解的充要条件是极小化问题(42)有解. 此时, 基于极小化问题(42)的一组解  $g_i \in \mathbf{C}^m$  和  $s_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \dots, 2n$ , 由式(40)可计算得到  $K_f \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$ , 此即为问题 RRCD 中状态反馈控制律(8)的增益阵.

## 5 算例分析

考虑形如式(1)所示的正常二阶线性系统, 其参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -2.5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 5 & -25 & 20 \\ 0 & 20 & -20 \end{bmatrix};$$

同时考虑形如式(3)的故障二阶线性系统, 其参数矩阵为

$$A_f = \begin{bmatrix} -2.4 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -2.4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 0 \\ 5 & -25 & 20 \\ 0 & 20 & -25 \end{bmatrix}.$$

1) 容易验证上述 2 个系统均可控, 故可依据定理 3 继续如下容错控制设计步骤.

2) 计算满足式(24)的多项式矩阵为

$$N(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{s}{40} + \frac{s^2}{100} & -4 \\ -\frac{1}{20} - \frac{s}{200} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} D^{11}(s) & 4s^2 - 10s - 40 \\ \frac{(s+10)^2}{100} & 20 - s^2 + 2s \end{bmatrix},$$

$$D^{11}(s) = \frac{29s^2}{100} - \frac{33s}{40} - \frac{9}{4} + \frac{s^3}{20} - \frac{s^4}{100}.$$

计算满足式(30)的多项式矩阵为

$$N_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{99} - \frac{25}{99} - \frac{4s}{165} & -4 \\ -\frac{s}{198} - \frac{5}{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_f(s) =$$

$$\begin{bmatrix} D_f^{11}(s) & \frac{40s^2}{9} - \frac{32s}{3} - \frac{200}{3} \\ \frac{s^2}{99} + \frac{20s}{99} + \frac{100}{99} & s - s^2 + 25 \end{bmatrix},$$

$$D_f^{11}(s) =$$

$$\frac{3449s^2}{8910} - \frac{910s}{891} - \frac{3500}{891} - \frac{10s^4}{891} + \frac{16s^3}{891}.$$

3) 假设待配置的特征值为

$$-8 \leq s_1 = \alpha_1 \leq -3, \quad -12 \leq s_2 = \alpha_2 \leq -9,$$

$$s_3 = \bar{s}_4 = \alpha_3 + \alpha_4 i, \quad -14 \leq \alpha_3 \leq -13,$$

$$s_5 = \bar{s}_6 = \alpha_5 + \alpha_6 i, \quad -20 \leq \alpha_5 \leq -15.$$

对应的自由参数为

$$g_1 = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{bmatrix},$$

$$g_3 = \bar{g}_4 = \begin{bmatrix} g_{13} + g_{14}i \\ g_{23} + g_{24}i \end{bmatrix}, \quad g_5 = \bar{g}_6 = \begin{bmatrix} g_{15} + g_{16}i \\ g_{25} + g_{26}i \end{bmatrix}.$$

不妨假设其余参数均处于  $[-10 \ 10]$  区间内. 按照上述设定特征值和自由参数, 约束  $C2'$  自然满足. 根据式(38)和(39), 可以计算矩阵  $V_f \in C^{3 \times 6}$  和  $W_f \in C^{2 \times 6}$  参数化表达式.

4) 基于步骤3)中各量的参数化表示形式, 可计算出灵敏度指标(41)的参数化表达式. 利用 Matlab 中 `Fmincon` 函数对极小化问题(42)进行求解, 得到一组  $s_i, g_i \in C^2 (i = 1, 2, \dots, 6)$  的常值为

$$s_1 = -3, \quad s_2 = -9,$$

$$s_3 = \bar{s}_4 = -13.0001 - 10i,$$

$$s_5 = \bar{s}_6 = -18.3318 - 7.148i,$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} -9.8959 \\ 0.3293 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1.5668 \\ 0.2505 \end{bmatrix},$$

$$g_3 = \bar{g}_4 = \begin{bmatrix} 0.1324 - 0.226i \\ 0.176 + 0.0565i \end{bmatrix},$$

$$g_5 = \bar{g}_6 = \begin{bmatrix} 0.0044 - 0.0045i \\ 0.0289 + 0.0002i \end{bmatrix}.$$

取上述优化参数时, 灵敏度指标(41)的值为 159.0331. 将上述参数代入式(40), 可得到

$$K_f =$$

$$\begin{bmatrix} -444.34 & -38.54 & 10.65 & -45.4 & 139.57 & -7.72 \\ 24.62 & 783.97 & -339.85 & -0.01 & 177.71 & -39.61 \end{bmatrix}.$$

为进一步验证鲁棒容错设计方法的有效性, 由式(25)~(27)可得到状态反馈(5)中的增益矩阵为

$$K =$$

$$\begin{bmatrix} -395.32 & -23.1 & 8.01 & -41 & 128.19 & -7.13 \\ 24.49 & 782.01 & 335.35 & -0.03 & 178.71 & -40.66 \end{bmatrix}.$$

将上述增益矩阵

$$K = [K_0 \ K_1], \quad K_f = [K_{0f} \ K_{1f}]$$

分别代入正常二阶系统(1)和故障二阶线性系统(3), 可得到对应的闭环系统, 简记为

$$S1: \ddot{q} + (A - BK_1)\dot{q} + (C - BK_0)q = 0,$$

$$S2: \ddot{q}_f + (A_f - B_f K_{1f})\dot{q}_f + (C_f - B_f K_{0f})q_f = 0,$$

$$S3: \ddot{q}_f + (A_f - B_f K_1)\dot{q}_f + (C_f - B_f K_0)q_f = 0.$$

其中: S1和S2的特征值为  $-3, -9, -13.0001 \pm 10i$  和  $-18.3318 \pm 7.148i$ ; 闭环系统S3的特征值为  $-3.0167, -10.7335, -12.5836 \pm 8.3486i$  和  $-16.423 \pm 8.5293i$ . 由此可以看出鲁棒容错设计方法的有效性. 在输入  $100[\sin t \ \cos t]^T$  下对3个系统进行仿真分析, S1与S2、S1与S3的3个状态之间的误差曲线如图1~图3所示.

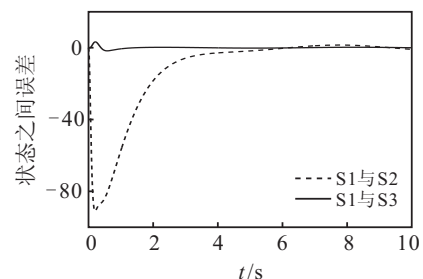


图1 S1与S2、S1与S3之间第1个状态之间误差曲线

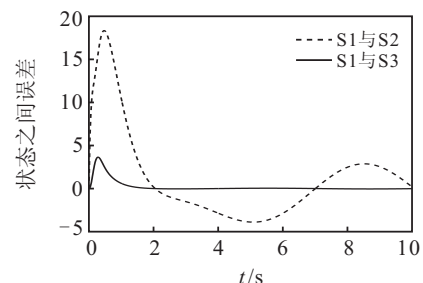


图2 S1与S2、S1与S3之间第2个状态之间误差曲线

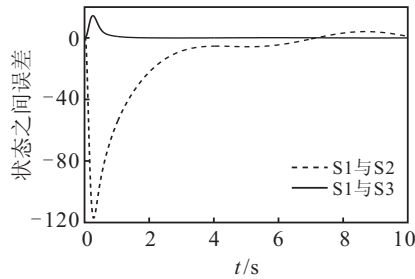


图 3 S1 与 S2、S1 与 S3 之间第 3 个状态之间误差曲线

从误差仿真曲线可以看出, 系统 S3 与系统 S1 之间的 3 个状态响应分别比系统 S2 与系统 S1 之间的 3 个状态响应的差距小, 表明所提出的二阶线性系统的鲁棒容错设计方法是有效的。

## 6 结 论

随着控制系统的复杂程度越来越高, 系统产生故障所导致的后果也越来越严重, 因此, 当控制系统发生故障时, 在提升故障诊断技术手段的同时进行容错控制设计, 恢复控制系统的重要性能是非常必要的。为此, 本文基于二阶线性系统的状态反馈特征结构配置参数化结果, 提出了能够使故障闭环控制系统和正常闭环控制系统具有相同的特征值, 所对应的特征向量接近, 而且能够提高系统灵敏度的鲁棒容错控制设计方法。该方法只涉及二阶线性系统的参数矩阵运算, 仅依赖于含有约束条件的优化问题求解, 便于工程应用。

### 参考文献(References)

- [1] Looze D P, Weiss J L, Barrett N M. An automatic redesign approach for restructurable control systems[J]. IEEE Control System Magazine, 1985, 5(2): 1621-1627.
- [2] Gao Z, Artsaklis P J. Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems[J]. Int J of Control, 1991, 53(2): 520-528.
- [3] Takewaki I. Inverse component-mode synthesis method for redesign of large structural systems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 166(3): 201-209.
- [4] Parks P C. Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, AC-11(3): 362-367.
- [5] Chang W, Park J B, Lee H J, et al. LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems[J]. IEE Proc Control Theory and Applications, 2002, 149(4): 297-302.
- [6] Jiang J. Design of reconfigurable control systems[J]. Int J of Control, 1994, 59(2): 395-401.
- [7] Ren Z, Tang X J, Chen J. Reconfigurable control system design by output feedback eigenstructure assignment[J]. J of Control Theory and Applications, 2002, 19(3): 356-362.
- [8] Wang G S, Liang B, Duan G R. Reconfiguring second-order dynamic systems via state feedback eigenstructure assignment[J]. Int J of Control, Automation, and Systems, 2005, 3(1): 109-116.
- [9] Wang G S, Liang B, Duan G R. Parameterisation of reconfiguring second-order linear systems via eigenstructure assignment[J]. Int J of Modeling, Identification and Control, 2008, 3(2): 124-130.
- [10] Cai X J, Wu F. A robust fault tolerant control approach for multi-systems with actuator and sensor faults[C]. Chinese Control and Decision Conf. Guilin, 2009: 890-895.
- [11] Huo Z H, Zheng Y, Xu C. A robust fault-tolerant control strategy for networked control systems[J]. J of Network and Computer Applications, 2011, 34(2): 708-714.
- [12] Adriano A G, Marco H T. A fault-tolerant manipulator robot based on  $H_2$ ,  $H_\infty$ , and mixed  $H_2/H_\infty$  Markovian controls[J]. IEEE ASME Trans on Mechatronics, 2009, 14(2): 257-263.
- [13] Jin X Z, Yang G H. Robust adaptive fault-tolerant compensation control with actuator failures and bounded disturbances[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(3): 305-309.
- [14] Duan G R, Liu G P. Complete parametric approach for eigenstructure assignment in a class of second-order linear systems[J]. Automatica, 2002, 38(4): 725-729.
- [15] Wang G S, Wang H Q, Duan G R. On the robust solution to a class of perturbed second-order sylvester equation[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2009, 16(1): 439-449.
- [16] Wang G S, Lv Q, Duan G R. On the parametric solution to the second-order Sylvester matrix equation  $EVF^2 - AVF - CV = BW$ [J]. Mathematic Problems in Engineering, 2007, 3(1): 1-16.
- [17] Wang G S, Chang T Q, Liang B. A parametric solution of second-order vibration matrix equations and its control applications[C]. Proc of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. Ji'nan, 2010: 3342-3346.
- [18] Duan G R. Two parametric approaches for eigenstructure assignment in second-order linear systems[J]. J of Control Theory and Application, 2003, 1(1): 59-64.