

文章编号 1004-924X(2013)08-2031-07

## 耦合场中小尺寸碳纳米管的组合扭转屈曲行为

姚小虎\*, 陈 达, 孙玉刚, 欧智成, 李函洲

(华南理工大学 土木与交通学院 工程力学系, 广东 广州 510641)

**摘要:**针对小尺寸碳纳米管在多物理场耦合作用下的组合扭转屈曲问题,提出了基于非局部理论耦合场作用下的力学模型,并研究了该模型的组合扭转屈曲行为。首先,采用连续弹性壳模型,引进热-电-力多场耦合作用下的本构关系,通过引入非局部弹性理论来考虑小尺寸碳纳米管的尺度效应;然后针对多壁碳纳米管层间范德华力和周边弹性介质的影响,建立了基于非局部理论多场耦合作用下碳纳米管的屈曲控制方程。最后,在轴力组合扭转载荷及温度与电压变化影响的工况下,研究了各因素对碳纳米管组合扭转屈曲行为的影响。得到的结果显示了小尺寸碳纳米管组合扭转屈曲行为在多场耦合作用下的响应,揭示了各物理场与组合扭转屈曲行为的关系;同时指出非局部理论下的屈曲载荷与经典理论下的屈曲载荷比值总小于1,说明经典理论高估了小尺寸碳纳米管的组合扭转屈曲行为。

**关键词:**碳纳米管;扭转屈曲;多场耦合;尺度效应

**中图分类号:** TB383; O343.9 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20132108.2031

## Combined torsional buckling of small size carbon nanotubes in multi-field coupling

YAO Xiao-hu\*, CHEN Da, SUN Yu-gang, OU Zhi-cheng, LI Han-zhou

(Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering and Transportation,  
South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

\* Corresponding author, E-mail: yaoxh@scut.edu.cn

**Abstract:** For the combining torsional buckling of small size Carbon Nanotubes (CNTs) in the multi-field coupling condition, a mechanical model was established in a couple field based on nonlocal theory and the combining torsional buckling behavior of the model was studied. Firstly, the constitutive relation was introduced under thermo-electro-mechanical loadings by using an elastic shell model of continuum mechanics. Then, the nonlocal elasticity theory was induced to discuss the scale effect of the small size carbon nanotubes, meanwhile, in consideration of the van der Waals forces and the effect of surrounded elastic medium, the generalized governing equation of buckling for CNTs was established in the multi-field coupling based on nonlocal theory. With applied torque and torsion-related axial load, as well as changed temperatures and voltage loads, the influences of different factors on the combined torsional buckling behaviors was calculated numerically. Finally, the conclusion demonstrates the response of the combined torsional buckling of small size CNTs in the multi-field coupling

**收稿日期:** 2013-03-16; **修订日期:** 2013-04-15.

**基金项目:** 广东省优秀博士学位论文资助项目 (No. sybzzxm201023); 华南理工大学中央高校基金重点资助项目 (No. 2012ZZ0103)

condition, and reveals the relation between combined torsional buckling of small size CNTs and each field. Moreover, it shows that the ratio of critical buckling load between nonlocal and local theories is always smaller than 1, which indicates that the torsional buckling of small size CNTs is overestimated in classical theory.

**Key words:** carbon nanotubes; torsional buckling; multi-field coupling; scale effect

## 1 引言

纳米技术是当今热门的科研领域,而碳纳米管的发现是该领域最有意义的突破之一。作为纳米复合材料及纳米器件的基础单元,碳纳米管因其优越的力学、光学、热学、电学性能及其在新奇纳米尺度器件里的潜在应用而受到广泛关注。完美结构、小尺度、低密度、高硬度和高强度等性质使得碳纳米管能够广泛应用于材料增强、场发射平板显示器、传感器和纳米电子等领域。在相关纳米结构设计中,碳纳米管的屈曲行为是其关键的研究项目之一,因此大多数的研究者都把重点放在研究碳纳米管的屈曲力学行为上。研究碳纳米管屈曲力学行为的方法包括实验观察、原子模拟及连续介质模型等方法。由于碳纳米管的尺寸限制,碳纳米管力学行为的实验观察非常困难。而在研究较长的碳纳米管时,其原子系统比较大,此时,原子级模拟所要的计算成本较高,这使得原子模拟方法在实际应用中受到了一定的限制。因此,基于连续介质力学的方法近年来成为研究碳纳米管力学性能的主要方法之一。因为碳纳米管纳米器件使用中常常会受到扭转载荷,尽管对碳纳米管的扭转屈曲稳定性的研究<sup>[1-7]</sup>已经有相当长的时间,但仍有一些新问题没有解决,例如经典理论研究方法是否适合小尺寸碳纳米管的研究;用经典理论研究小尺寸碳纳米管的力学性能,其得到的结论是否与实际有所偏差等。因此,扭转屈曲稳定性仍是研究者的重点研究领域之一。

作为纳米复合材料和纳米元器件基本单元的碳纳米管,其工作环境往往是复杂多变的,大多数工作环境处于多场耦合作用下,因此,研究碳纳米管扭转屈曲力学行为需要考虑多物理场条件下的受载工况。Sun<sup>[8]</sup>等已经推导出多场耦合作用下基于连续弹性壳模型的碳纳米管屈曲控制方程,并且在研究不同因素对碳纳米管屈曲行为的影响方面得到了丰富的结果,例如温度或者电压的变

化对碳纳米管屈曲行为的影响。

为了更精确、更好地预测小尺寸碳纳米管组合扭转屈曲行为,本文结合已有的工作及非局部理论来得到一个新的修正连续弹性壳模型,并分析了多物理场及尺度效应对小尺寸碳纳米管组合扭转屈曲行为的影响。

## 2 非局部弹性理论

非局部弹性理论是由 Eringen<sup>[9]</sup>提出的,它指出弹性体内某一参考点  $x$  的应力不仅取决于  $x$  点的应变,而且与体内所有其它点的应变相关,这与经典连续弹性理论不同。因此该理论能够用来考虑原子间长程力之间的影响,即尺度效应。非局部弹性理论已经被许多研究者应用于考虑尺度效应的碳纳米管静态和动态行为的研究<sup>[10]</sup>中。Ghorbanpour Arani 等<sup>[11]</sup>考虑尺度效应对双壁碳纳米管进行了热屈曲的研究。Ansari 等<sup>[12]</sup>基于非局部弹性理论与多壁弹性壳模型,研究了温度变化下碳纳米管的轴压屈曲问题。Narendar<sup>[13]</sup>等人基于非局部弹性梁理论对单壁碳纳米管进行了热屈曲的研究。Khademolhosseini<sup>[14]</sup>等人研究了基于非局部连续弹性壳模型单壁碳纳米管扭转行为下的尺度影响。通过对该模型的分子动力学模拟研究,得到的结论表明经典的弹性壳模型高估了单壁碳纳米管的临界扭转屈曲载荷,且发现当单壁碳纳米管的直径小于 1.5 nm 时,经典理论模型已不再适用。

Eringen<sup>[9]</sup>提出的非局部线性本构方程可以写成以下微分形式:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{t}_{ij} = \boldsymbol{c}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}, \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{t}_{ij}$  和  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  分别是非局部应力张量和经典应力张量,  $\boldsymbol{c}_{ijkl}$  是经典刚度张量,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}$  是经典应变张量。  $e_0$  是与每种材料相对应的常数,需要通过相关的实验或分子模拟获得。  $a$  是内部特征长度,对于碳纳米管的原子结构而言,  $a$  一般选取 C-C 键的长度,其值为 0.142 nm。

### 3 单壁碳纳米管弹性壳体模型

为简化分析无限小屈曲变形,采用各向同性弹性壳模型来研究单壁碳纳米管,假设其杨氏模量为  $E$ ,泊松比为  $\nu$ ,中面半径为  $R$ ,厚度为  $t$ ,并且设  $x(u)$ 、 $y(v)$ 和  $z(w)$ 分别代表弹性壳中面轴向、环向和径向坐标轴。因此基于非局部理论下的平衡方程为:

$$D \nabla^4 w = [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \cdot \left[ \frac{N_x}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q \right], \quad (2)$$

其中:  $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$ 是有效弯曲刚度,  $N_x$ 、 $N_y$ 和  $N_{xy}$ 代表单位长度的内力,  $q$ 是向内的径向压力。与经典弹性圆柱壳控制方程推导过程相似,可以得到关于由于屈曲而引起的附加位移  $W$ 的修正屈曲控制方程:

$$D \nabla^8 W + \frac{Et \partial^4 W}{R^2 \partial x^4} - [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \cdot \nabla^4 \left[ N_x^0 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + 2N_{xy}^0 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + N_y^0 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right] = [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \nabla^4 P(x, y), \quad (3)$$

其中:  $P$ 代表由无限小屈曲变形引起的向内径向压力的增量,  $N_x^0$ 、 $N_y^0$ 和  $N_{xy}^0$ 代表前屈曲状态下的单位长度的内力。把上述方程用于碳纳米管的每层管上,可以得到该系统的控制方程组,该方程组可用于研究许多类型的碳纳米管屈曲力学行为。通过该方程组可以分析不同的载荷条件,如单一载荷工况、组合载荷工况和热-电-力多场耦合载荷工况。

### 4 多壁碳纳米管屈曲控制方程

$N$ 层多壁碳纳米管可以看成是由一系列的同轴圆柱壳组合而成的,相邻两层管间作用着范德华力。如图 1 所示,并假设每一层管有相同的弹性性质。对于内层管,压力增量  $P_{i(i+1)}$ 是在屈曲过程中由第  $(i+1)$ 层管对第  $i$ 层产生的范德华力。根据牛顿第三定律,无论在前屈曲状态下,还是后屈曲状态下,两相邻管之间的范德华力总有大小相等且方向相反,即:

$$P_{(i+1)} R_{i+1} = -P_{i(i+1)} R_i, \quad i=1, 2, \dots, (N-1), \quad (4)$$

其中:  $R_i$ 代表第  $i$ 层管的半径。

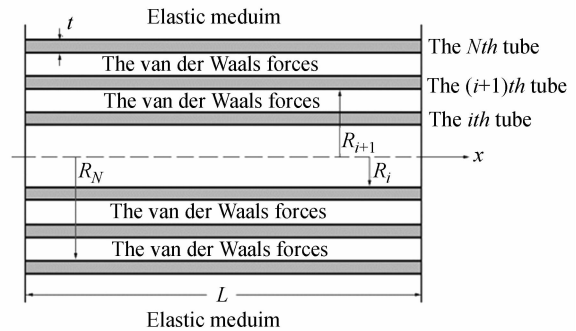


图 1 多壁碳纳米管层间范德华力  
Fig. 1 The van der Waals forces for MWCNTs

在任意点处两相邻管间由无限小屈曲变形引起的范德华力可以近似成一个关于位移增量的线性函数。因此范德华力可以表示为:

$$P_{i(i+1)}(x, y) = c(W_{i+1} - W_i), \quad (5)$$

其中:根据 Saito<sup>[15]</sup>等人给出的数据,常数采用以下取值:

$$c = \frac{320 \times 10^{-3}}{0.16 d^2} = 9.918\ 667 \times 10^{19} \text{ J/m}^3, \quad d = 1.42 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

结合式(4)与式(5),由多壁碳纳米管各层屈曲而引起的压力增量为:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{12} = c(W_2 - W_1) \\ &\dots\dots \\ P_i &= P_{i(i+1)} + P_{i(i-1)} = c \left[ \begin{matrix} W_{i+1} - W_i - \\ (W_i - W_{i-1}) R_{i-1}/R_i \end{matrix} \right] \dots\dots \\ &i=2, 3, \dots, (N-1) \\ P_N &= P_{N(N-1)} + P_N^{\text{Base}} = c \left[ \begin{matrix} W_{N-1} \\ -W_N \end{matrix} \right] R_{N-1}/R_N - kW_N, \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $P_N^{\text{Base}}$ 代表最外层管与周围弹性介质之间的相互压力,两者的关系可以看成是一个弹性系数为  $k$ 的弹簧模型,该系数由最外层碳纳米管半径与周围弹性介质的材料特性决定。

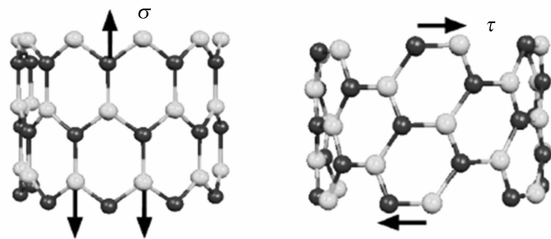
结合式(6)和(3),对于多壁碳纳米管,可以得到  $N$ 个耦合的屈曲控制方程:

$$D \nabla^8 W_1 + \frac{Et \partial^4 W_1}{R_1^2 \partial x^4} - [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \nabla^4 \cdot \left[ N_{x1}^0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + 2N_{xy1}^0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} + N_{y1}^0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right] = [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] c (\nabla^4 W_2 - \nabla^4 W_1) \dots\dots$$

$$\begin{aligned}
 & D \nabla^8 W_i + \frac{Et \partial^4 W_i}{R_i^2 \partial x^4} - [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \cdot \\
 & \nabla^4 \left[ N_{xi}^0 \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + 2N_{xyi}^0 \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} + N_{yi}^0 \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right] = \\
 & [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] c \\
 & \left[ \nabla^4 W_{i+1} - \right. \\
 & \left. \nabla^4 W_i - (\nabla^4 W_i - \nabla^4 W_{i-1}) R_{i-1} / R_i \right] \dots \dots \\
 & i = 2 \dots (N-1) \\
 & D \nabla^8 W_N + \frac{Et \partial^4 W_N}{R_N^2 \partial x^4} - [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \cdot \\
 & \nabla^4 \left[ N_{xN}^0 \frac{\partial^2 W_N}{\partial x^2} + 2N_{xyN}^0 \frac{\partial^2 W_N}{\partial x \partial y} + N_{yN}^0 \frac{\partial^2 W_N}{\partial y^2} \right] = [1 \\
 & - (e_0 a)^2 \nabla^2] [c (\nabla^4 W_{N-1} - \nabla^4 W_N) R_{N-1} / R_N - k \\
 & \nabla^4 W_N]. \tag{7}
 \end{aligned}$$

### 5 载荷分析

单壁碳纳米管可以看成由石墨烯片沿手性向量方向卷曲而成,根据不同的手性角,可以分成 3 种不同类型碳纳米管:锯齿型、扶手椅型和螺旋型碳纳米管。如图 2 所示,Sai 和 Mele<sup>[16]</sup>指出锯齿型纳米管表现出纵向的单轴应变(拉伸或者压缩)的压电反应,而扶手椅型纳米管则表现出与扭矩耦合的电偶极子力矩,并且与扭矩是线性耦合的。另外,与高度对称的锯齿型和扶手型不同,螺旋型纳米管则表现出与单轴应变和扭矩共同耦合的线性压电反应。这些从氮化硼纳米管(BNNTs)得到的压电反应特性都可以很自然地引入到碳纳米管的性质。



(a) 锯齿型氮化硼管 (b) 扶手椅型氮化硼管  
(a) Ziazag BNT (b) Armchair BNT

图 2 电场下氮化硼管的响应

Fig. 2 Response of BNNT to applied voltage

因为最终的目标是研究组合扭转载荷屈曲行为,为了更清晰地了解环向电场对碳纳米管的屈曲行为的响应,所以将选取扶手椅型碳纳米管结

构来研究。因此,当处于热-电-力多场下时,每层管的前屈曲状态单位长度内力可以表达为:

$$\begin{aligned}
 & N_x^0 = N_{xM}^0 + N_{xT}^0, N_y^0 = N_{yM}^0 + N_{yT}^0, \tag{8} \\
 & N_{xy}^0 = N_{xyM}^0 + N_{xyE}^0 \\
 & N_{xT}^0 = - \frac{Et(\alpha_1 + \nu\alpha_2)}{1 - \nu^2} T, \\
 & N_{yT}^0 = - \frac{Et(\alpha_2 + \nu\alpha_1)}{1 - \nu^2} T, N_{xyE}^0 = - h_2 \int_{-t/2}^{t/2} E_y dz, \tag{9}
 \end{aligned}$$

其中:下标 M、T 和 E 分别代表力场、温度场和电场; $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别代表轴向和环向的热膨胀系数。另外, $h$  和  $E_y$  分别是压电系数和环向方向的电场强度。假设每一层管的切应力是相同的,即有:

$$N_{xyMi}^0 = N_{xyM}^0 = T_i / (2\pi R_i^2), \tag{10}$$

其中: $T_i$  表示第  $i$  层管受到的扭矩。注意到相对于轴向载荷,扭矩是最主要的机械载荷,因此可以假设:

$$N_{xMi} = \gamma N_{xyM}, N_{yMi} = -\nu N_{xMi} = -\nu \gamma N_{xyM}. \tag{11}$$

### 6 临界屈曲条件

考虑简支边界条件,屈曲模态可以假设为:

$$W_i = f_i \sin \left[ \frac{m\pi}{L} x - \frac{ny}{r_i} \right] \quad (i=1, 2, \dots, N), \tag{12}$$

其中: $m$  和  $n$  分别代表轴向和环向的波数。把载荷表达式(8)和屈曲模态式(12)代入耦合屈曲控制方程组(7),可以得到:

$$M(m, n)_{N \times N} [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N]^T = 0. \tag{13}$$

根据  $f_i$  取得非零解的条件,可以得到临界屈曲条件为:

$$|M(m, n)_{N \times N}| = 0. \tag{14}$$

### 7 数值结果与讨论

通过求解式(14),并代入一般情况下各参数的数值,可以求解出小尺寸碳纳米管组合扭转临界屈曲载荷的数值解,然后可以分别展示不同因素对临界屈曲载荷  $N_{xyM}^0$  的影响。在计算中用到的具有代表性的参数如下: $Et = 360 \text{ J/m}^2$ ,  $t = 0.066 \text{ nm}$ ,  $\nu = 0.34$ ,  $D = 0.85 \text{ eV} = 1.36 \times 10^{-19} \text{ J}$ ,  $h = 0.35 \text{ C/M}^2$ .  $\alpha_1 = -1.6 \times 10^{-6}$  和  $\alpha_2 = -0.5 \times 10^{-6}$  对应室温或低温环境,  $\alpha_1 = 1.1 \times 10^{-6}$  和  $\alpha_2 = 0.8 \times 10^{-6}$  对应高温环境。

以轴向压缩( $\gamma = -0.02$ )和扭矩一起加载为例,并设高温环境下温度改变量为 50 K,加载的电压为 100 V,得到的相应关系如图 3 和图 4 所示。图 3 为当环向波数  $n=10$  时,临界屈曲载荷在不同载荷条件下与轴向波数的  $m$  关系。可以发现当多场耦合条件不变时,临界屈曲载荷只取决于屈曲模态,也就是取决于屈曲模态式中  $m$  和  $n$  两参数。进一步,可以发现正值电压的加载与负值温度的变化可以加强碳纳米管扭转屈曲稳定性,相反,负值电压的加载与正值温度的变化却减小了临界屈曲载荷。同样的,对于轴向载荷的影响,数值结果表明轴向压缩( $\gamma < 0$ )趋向于使碳纳米管不稳定,而轴向拉伸( $\gamma > 0$ )却增加了临界载荷。

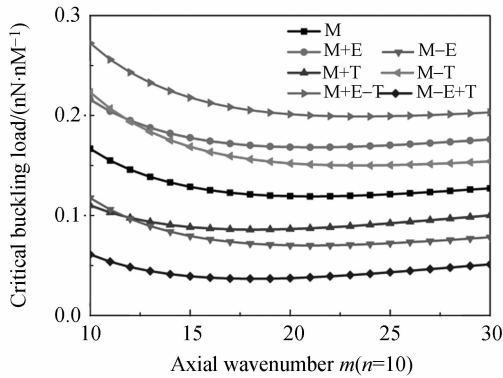


图 3 不同载荷条件下的临界屈曲载荷分布

Fig. 3 Distribution of critical buckling load in different loading conditions

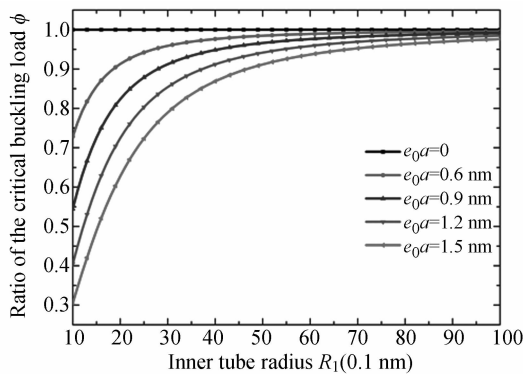


图 4 不同尺度效应下临界屈曲载荷比值分布

Fig. 4 Distribution of ratio of critical buckling load with changing nonlocal parameters

图 4 通过变化非局部参数  $e_0 a$ , 得到非局部临界屈曲载荷与经典临界屈曲载荷的比值  $\phi$  与双壁

碳纳米管内半径  $R_1$  的关系曲线簇,揭示了尺度效应对临界屈曲载荷的影响。其中  $R_2 = R_1 + 0.34$ ,  $e_0 a = 0$  时表示不考虑尺度效应。从图 4 可以看出,当  $e_0 a = 0$  时,得到的结果退化成经典理论得到的结果,所以其与经典理论临界屈曲载荷的比值恒为 1。当  $e_0 a \neq 0$  时,取不同的  $e_0 a$ ,  $\phi$  始终比 1 要小,说明经典理论在小尺寸碳纳米管组合扭转屈曲行为研究中是高估的。从曲线的前部份来看,  $R_1$  小于 1.5 nm, 经典理论临界载荷与非局部理论临界载荷相差 15% 以上,  $\phi$  是比 1 小得多或比较小的,说明此时采用非局部理论得到的组合扭转临界屈曲载荷比利用经典弹性理论得到的组合扭转临界屈曲载荷要小很多,表明小尺度效应显著。在该尺度范围内,经典理论下的扭转临界屈曲载荷是偏大很多的,经典理论已经不适合运用在该尺度范围。从曲线的后部份来看,  $R_1$  大于 1.5 nm,  $\phi$  开始接近 1, 说明此时非局部理论下的组合扭转临界屈曲载荷与经典理论下组合扭转临界屈曲载荷是相近的,表明尺度效应已经不再显著,在该尺度范围,经典理论分析不会产生太大的误差。文献[14]也通过对单壁碳纳米管的分子动力学模拟研究,证明了经典的弹性壳模型是高估了单壁碳纳米管的临界扭转屈曲载荷,并且发现当单壁碳纳米管的直径小于 1.5 nm 时,经典理论模型已经不再适用,这一结论与本文结论基本一致。Hao<sup>[17]</sup>等人研究了多壁碳纳米管在温度场下扭转屈曲的尺度影响,通过数值分析得到的结论证明了经典理论临界剪切屈曲载荷是高估的,这也与本文结论相似。Mohammadimehr<sup>[18]</sup>等人运用非局部理论研究了双壁碳纳米管的扭转屈曲行为,发现经典理论的临界屈曲载荷是高估的,小尺度效应在碳纳米管的扭转屈曲行为中不可忽略,再次与本文结论吻合。

## 8 结 论

本文理论研究了在多场耦合作用下考虑尺度效应的碳纳米管组合扭转屈曲行为和各因素对组合扭转临界屈曲载荷的影响,特别是基于非局部理论的尺度效应对其的影响,揭示了各物理场与其屈曲行为的关系。研究发现非局部理论下的临界屈曲载荷与经典理论下的临界屈曲载荷比值  $\phi$  总是小于 1, 说明经典理论在小尺寸碳纳米管组

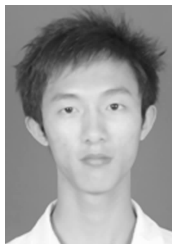
合扭转屈曲行为研究中是高估的,而且在  $R_1$  小于 1.5 nm 时,尺度效应显著,其影响不能被忽

略。这些结论对碳纳米管相关纳米结构器件的设计等具有一定的指导意义。

#### 参考文献:

- [1] HAN Q, LU G. Torsional buckling of a double-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2003, 22(6): 875-883.
- [2] WANG X, YANG H K, DONG K. Torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes [J]. *Materials Science and Engineering: A*, 2005, 404(1-2): 314-322.
- [3] HAN Q, YAO X H, LI L F. Theoretical and numerical study of torsional buckling of multiwall carbon nanotubes [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2006, 13(4): 329-337.
- [4] YANG H K, WANG X. Torsional buckling of multi-wall carbon nanotubes embedded in an elastic medium [J]. *Composite Structures*, 2007, 77(2): 182-192.
- [5] YAO X H, HAN Q. Torsional buckling of a double-walled carbon nanotube under the action of coupled thermo-mechanical load [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(8): 5056-5062.
- [6] ZHANG L C, SHEN H S. Buckling and post buckling of single-walled carbon nanotubes under combined axial compression and torsion in the thermal environments [J]. *Physical Review B*, 2007, 75(4):045408.
- [7] YAO X H, HAN Q. Buckling analysis of multi-walled carbon nanotubes under torsional load coupling with temperature change [J]. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 2006, 128(3):419-427.
- [8] SUN Y G, YAO X H, HAN Q. Combined torsional buckling of double-walled carbon nanotubes with axial load in the multi-field coupled condition [J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2011, 54(9): 1059-1065.
- [9] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves [J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9):4703-4710.
- [10] ARASH B, WANG Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes [J]. *Computational Material Science*, 2012, 51(1): 303-313.
- [11] GHORBANPOUR A A, MOHAMMADIMEHR M, SAIDI A R, *et al.*. Thermal buckling analysis of double-walled carbon nanotubes considering the small-length effect [J]. *Mechanical Engineering Science*, 2011, 225(1):248-256.
- [12] ANSARI R, ROUHI H, SAHMANI S. Thermal effect on axial buckling behavior of multi-walled carbon nanotubes based on nonlocal shell model [J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2011, 44(2):373-378.
- [13] NARENDAR S, GOPALAKRISHNAN S. Critical buckling temperature of single-walled carbon nanotubes embedded in a one-parameter elastic medium based on nonlocal continuum mechanics [J]. *Physica E Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2011, 43(6):1185-1191.
- [14] KHADEMOLHOSSEINI F, RAJAPAKSE R K N D, NOJEH A. Torsional buckling of carbon nanotubes based on nonlocal elasticity shell models [J]. *Computational Material Science*, 2010, 48(4): 736-742.
- [15] SAITO R, MATSUO R, KIMURA T, *et al.*. Anomalous potential barrier of double-wall carbon nanotube [J]. *Chemical Physics Letters*, 2001, 348(3-4):187-193.
- [16] SAI N, MELE E J. Microscopic theory for nanotube piezoelectricity [J]. *Physical Review B*, 2003, 68(24): 241405(R).
- [17] HAO M J, GUO X M, WANG Q. Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids* 2010, 29(1): 49-55.
- [18] MOHAMMADIMEHR M, SAIDI A R, GHORBANPUR A A, *et al.*. Torsional buckling of a DWCNT embedded on winkler and pasternak foundations using nonlocal theory [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2010, 24(6): 1289-1299.

## 作者简介:



陈 达(1989—),男,广东肇庆人,硕士研究生,2011年于华南理工大学获学士学位,主要从事纳米力学、计算力学等方面的研究。E-mail: d. cd@mail.scut.edu.cn



孙玉刚(1988—),男,河南洛阳人,硕士研究生,2010年于华南理工大学获学士学位,主要从事纳米力学、计算力学等方面的研究。Email: sunyugang@yeah.net



欧智成(1987—),男,广东广州人,博士研究生,2010年于华南理工大学获学士学位,主要从事可变形电子结构,有限元仿真等方面的研究,E-mail: o. zc@foxmail.com



李函洲(1990—),男,重庆涪陵人,2012年于华南理工大学获得学士学位,主要从事纳米力学、水利工程等方面的研究。E-mail: ahrimanleo@sina.cn

## 导师简介:



姚小虎(1974—),男,山西朔州人,副教授,博士生导师,1997年、2002年于太原理工大学分别获得学士、硕士学位,2007年于华南理工大学获得博士学位,主要从事纳米力学、复合材料力学、冲击动力学和大型复杂结构力学行为的仿真分析方面的研究。E-mail: yaohx@scut.edu.cn.

(版权所有 未经许可 不得转载)