

基于增量谐波平衡的参激系统非线性识别法¹⁾

窦苏广* 叶敏*²⁾ 张伟†

* (浙江大学航空航天学院力学系, 杭州 310027)

† (北京工业大学机电学院, 北京 100022)

摘要 将增量谐波平衡法应用到非线性系统的建模和参数识别中, 针对 Mathieu-Duffing 方程, 推导了利用增量谐波平衡原理识别参数激励非线性系统参数的方法. 该方法改进了增量谐波平衡方法的推导过程, 通过数值模拟对比研究了谐波平衡非线性识别 (harmonic balance nonlinearity identification, HBNID) 和增量谐波平衡非线性识别 (incremental harmonic balance nonlinearity identification, IHBNID) 的效果, 验证了增量谐波平衡非线性识别的有效性. 结果表明, 增量谐波平衡非线性识别的计算效率较高, 计算精度和抗噪能力都优于谐波平衡非线性识别.

关键词 非线性识别, 增量谐波平衡, 参数激励, 非线性系统

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)02-0332-05

引 言

关于非线性系统识别方法的综述可以参见文献 [1~3]. 非线性系统识别方法通常可以分为参数法和非参数法. 谐波平衡非线性识别法 (harmonic balance nonlinearity identification, HBNID) 是参数识别的有效方法. Casas 等^[4] 针对单自由度系统提出谐波平衡非线性识别法, 研究了存在周期极限环响应的非线性自激振动系统, 而 Yasuda 等^[5] 研究了由外在激励产生的稳态周期响应的非线性振动系统识别问题. Yuan 和 Feeny^[6] 将 Yasuda 等的研究扩展到混沌系统, 通过从混沌系统中提取不稳定周期轨线, 使用 HBNID 识别系统参数. Thothadri 等^[7,8] 将 HBNID 扩展到多自由度流体结构系统的参数识别中, 并进一步提出了基于分岔理论和 HBNID 的系统识别法, 应用该方法建立了一个单自由度流体-弹性系统实验模型. 作者在之前的研究中发现: 当不考虑系统噪声时, HBNID 通过增加谐波数可达到一定的识别精度; 然而, 在实际系统中不可避免地存在测量噪声, 由于噪声的影响, 当谐波数超过一定值时, 识别结果将严重偏离真值, 识别精度下降.

增量谐波平衡法是由 Lau 等^[9] 为了求解非线性弹性系统的周期运动而提出的. 它是一种半数值、

半解析的方法, 可以有效地计算系统稳定和不稳定的周期解, 特别是求解强非线性振动系统的有效方法^[9~12]. 但是如果系统的响应较复杂, 需要较多的谐波项才能保证算法稳定收敛. 谐波项越多, 增量谐波平衡方程矩阵元素的计算越复杂. 本文提出了增量谐波平衡非线性识别 (incremental harmonic balance nonlinearity identification, IHBNID) 算法, 同时改进了增量谐波平衡方程的推导过程, 将响应展开为复数形式的傅立叶级数, 结合指数形式的运算, 从而简化了增量谐波平衡方程矩阵元素显式表达式的推导过程和具体形式, 易于编程计算. 同时, 在迭代过程中控制低阶主谐波的系数不变, 使部分高阶谐波系数和待定参数根据残差进行自适应调整, 较好地控制了算法的收敛性. 文中利用 IHBNID 算法研究了 Mathieu-Duffing 方程, 通过数值模拟, 对比了 HBNID 和 IHBNID 的效果, 特别是测量噪声对参数识别的影响, 并进行了误差分析. IHBNID 较好地解决了噪声影响识别精度的问题.

1 Mathieu-Duffing 系统识别方程

对于非线性动力学系统

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (1)$$

2008-12-23 收到第 1 稿, 2009-08-18 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10672141).

2) E-mail: hyemin@zju.edu.cn

其中, $f(x, \dot{x}, t)$ 可以是自治项或含时变项.

通常 $f(x, \dot{x}, t)$ 可以分为线性项 (线性刚度、线性阻尼) 和非线性项两部分. 线性项可以通过实验得到, 或作为参数识别项. 本文主要讨论非线性项的建模和参数识别, 假设非线性项可以用一组基函数的线性组合充分表征, 取如下的一组基函数 $\{f_i(x, \dot{x}, t) | i = 1, \dots, M\}$, $f(x, \dot{x}, t)$ 可以近似表达为

$$\hat{f}(x, \dot{x}, t) = c\dot{x} + kx + \sum_{i=1}^M \beta_i f_i(x, \dot{x}, t) \quad (2)$$

则式 (1) 可写为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \sum_{i=1}^M \beta_i f_i(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (3)$$

在 IIBNID 中是通过实验获得系统响应和激励的采样序列, 并由此识别系统的未知参数.

研究 Mathieu-Duffing 振子

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} - (\alpha + \lambda \sin(\Omega t + \varphi_0))x + \gamma x^3 = 0 \quad (4)$$

由式 (2) 知

$$\left. \begin{aligned} c = 2\xi, \quad k = -\alpha, \quad \beta_1 = \lambda, \quad \beta_2 = \gamma \\ f_1(x, \dot{x}, t) = -\sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x, \quad f_2(x, \dot{x}, t) = x^3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

应用增量过程, 将 x 和 β_i 表示为

$$x = x_0 + \Delta x, \quad \beta_i = \beta_{i0} + \Delta \beta_i \quad (6)$$

取初始参数值 $\{\beta_{i,0} | i = 1, \dots, M\}$ 为零值. 根据实验数据确定位移的初始值 x_0 , 即当系统进入稳态周期响应时, 测量系统在 $[t_0, t_0 + T]$ 上的位移响应 x_0 . 取 $\omega = \Omega/\mu$, (μ 为整数), 周期为 $T = 2\pi/\omega$, 将其展开为复数形式的傅立叶级数, 并写成如下矩阵形式

$$x_0 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_0 \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X} = [e^{j(-N)\omega t} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad e^{jN\omega t}] \\ \mathbf{A}_0 = [a_{-N} \quad \dots \quad a_0 \quad \dots \quad a_N]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

\mathbf{A}_0 的元素是各阶傅立叶系数, 第 k 阶傅立叶系数 a_k 通过对位移响应的数据序列进行数值积分变换得到

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x} \cdot e^{-jk\omega t} dt \quad (9)$$

其中 \tilde{x} 是实验中测量采集的位移响应序列.

记位移增量

$$\left. \begin{aligned} \Delta x = \mathbf{X} \cdot \Delta \mathbf{A} \\ \Delta \mathbf{A} = [\Delta a_{-N} \quad \dots \quad \Delta a_0 \quad \dots \quad \Delta a_N]^T \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

参数增量

$$\Delta \beta = [\Delta \lambda \quad \Delta \gamma] \quad (11)$$

将式 (6) 代入式 (3) 后进行 Taylor 展开, 略去高阶项, 并在 $[t_0, t_0 + T]$ 上进行 Galerkin 积分, 得增量方程

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{P} \Delta \beta = \mathbf{R} \quad (12)$$

将式 (5) 代入 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{R}$, 即有

$$\mathbf{K} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}^T (\ddot{\mathbf{X}} + 2\xi \dot{\mathbf{X}} + (-\alpha - \lambda_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) + 3\gamma_0 x_0^2) \mathbf{X}) dt \quad (13)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{T} \int_0^T -\mathbf{X}^T \cdot (\ddot{x}_0 + 2\xi \dot{x}_0 - (\alpha + \lambda_0 \sin(\Omega t + \varphi_0))x_0 + \gamma_0 x_0^3) dt \quad (14)$$

$$\mathbf{P} = \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}^T \sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x_0 dt, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}^T \cdot x_0^3 dt \right] \quad (15)$$

为了提高计算效率, 给出 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{R}$ 元素的显式表达式. 首先求出 $x_0^2, x_0^3, \sin(\Omega t + \varphi_0)$ 和 $\sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x_0$ 的傅立叶系数. 记 $l, m, n = -N, -N+1, \dots, N-1, N$. x_0^2, x_0^3 的傅立叶级数为

$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= \sum_{k=-N}^N a_{1k} \cdot e^{jk\omega t} \\ a_{1k} &= \sum_{m,n=-N}^N a_m a_n \delta_{m+n}^k \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0^3 &= \sum_{k=-N}^N a_{2k} \cdot e^{jk\omega t} \\ a_{2k} &= \sum_{l,m,n=-N}^N a_l a_m a_n \delta_{l+m+n}^k \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中, a_l, a_m 和 a_n 分别为位移信号的第 l 阶、第 m 阶和第 n 阶傅立叶系数. δ 为两变量的 Kronecker 符号, 定义如下

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (18)$$

根据实验数据计算简谐激励项 $\sin(\Omega t + \varphi_0)$ 和参数激励项 $\sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x_0$ 的傅立叶系数 q_k 和 p_k .

$$\left. \begin{aligned} \sin(\Omega t + \varphi_0) &= \sum_{k=-N}^N q_k e^{jk\omega t} \\ q_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\tilde{F}(t)}{\rho} e^{-jk\omega t} dt \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中 $\tilde{F}(t)$ 为实验采集的激振力信号, ρ 为激振力的振幅

$$\left. \begin{aligned} \sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x_0 &= \sum_{k=-N}^N p_k e^{jk\omega t} \\ p_k &= \sum_{m,n=-N}^N a_m q_n \delta_{m+n}^k \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

记 $\bar{m} = N + m + 1, \bar{n} = N + n + 1$, 可以给出矩阵 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{R}$ 元素的显式表达式, 化简后得

$$\mathbf{K}(\bar{m}, \bar{n}) = b_n \delta_{\bar{m}+\bar{n}}^0 + \sum_{l=-N}^N c_l \delta_{l+\bar{m}+\bar{n}}^0 \quad (21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} b_n &= -(n\omega)^2 + jn\omega \cdot 2\xi - \alpha \\ c_l &= -\lambda_0 q_l + 3\gamma_0 a_{1l} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中, q_l 为单位简谐激励信号 $\sin(\Omega t + \varphi_0)$ 的第 l 阶傅立叶系数.

\mathbf{R} 的元素 $\mathbf{R}(\bar{m}, 1)$ 化简后如下

$$\mathbf{R}(\bar{m}, 1) = -[(-l\omega)^2 + jl\omega \cdot 2\xi - \alpha] a_l - \lambda_0 p_l + \gamma_0 a_{2l}] \delta_{l+\bar{m}}^0 \quad (23)$$

其中 p_l 为 $\sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x_0$ 的第 l 阶傅立叶系数. 矩阵 \mathbf{P} 化简后的元素计算如下

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{m}, 1) &= -\frac{1}{T} \int_0^T e^{jm\omega t} \cdot \sin(\Omega t + \varphi_0) \cdot x_0 dt = \\ &\quad -p_l \delta_{l+\bar{m}}^0 \\ \mathbf{P}(\bar{m}, 2) &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{jm\omega t} \cdot x_0^3 dt = a_{2l} \delta_{l+\bar{m}}^0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

将 $\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{R}$ 代入式 (12) 进行迭代, 在式 (12) 中有 $2N + M + 1$ 个未知数 $\{\Delta a_k, k = -N, \dots, N; \Delta \beta_i, i = 1, \dots, M\}$. 其中, 选择不少于 M 个主谐波系数的增量 Δa_k 为零, 其余谐波系数的增量作为调协量和 $\Delta \beta_i$ 由方程 (12) 求出. 由式 (10) 得到 Δx , 由式 (6) 得到 x 和 β_i , 以此替代初值 x_0 和 β_{i0} , 进入

下一步的迭代. 如此反复, 直到 $\|\mathbf{R}\|$ 足够小. 迭代停止时, β_i 的值即为待识别的非线性项参数值 $[\lambda, \gamma]$.

为了将 IHBNID 和 HBNID 的效果进行对比, 采用 HBNID 可以得到识别方程

$$-(k\omega)^2 + jk\omega \cdot 2\xi - \alpha a_k - \lambda p_k + \gamma a_{2k} = 0 \quad (25)$$

依次取 $k = -N, \dots, N$, 可以得到 $(2N + 1)$ 个线性方程, 其中含有 2 个未知参数, 应用最小二乘法可以识别出待定参数.

2 数值模拟

通过 Runge-Kutta 法求解微分方程, 模拟 Mathieu-Duffing 系统 (4) 的响应, 可以获得时间历程数据. 参数取值 $\xi = 0.125, \alpha = 1.0, \lambda = 4.6, \gamma = 1.0, \Omega = 2.0$, 给定初值 $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$, 步长为 0.001. 在实际的测量系统中, 不可避免地存在着测量噪声. 因此, 假定噪声信号为高斯白噪声, 其幅度和真实信号成正比. 记 s^* 为真实信号, s 为含噪声信号, g 为均值为零的单位高斯白噪声信号, 则

$$s = s^* \cdot (1 + e \cdot g) \quad (26)$$

其中 e 反映了噪声的大小.

考虑识别参数 λ 和 γ . 给定参数初始值 $\lambda_0 = \gamma_0 = 0$, 构造增量方程, 选择 $a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, a_{\pm 3}$ 作为主谐波系数, 令其增量为零, 求解其余的谐波系数增量和参数增量, 反复迭代直到算法稳定收敛. HBNID 和 IHBNID 的识别结果见表 1. 从表中 IHBNID 的

表 1 参数 λ 和 γ 的识别结果 ($\lambda^* = 4.6, \gamma^* = 1$)

Table 1 Identification results of parameters λ and γ

($\lambda^* = 4.6, \gamma^* = 1$)

	e	0.00		0.01		0.05	
		N	IHBNID	HBNID	IHBNID	HBNID	IHBNID
λ	5	4.6008	4.6038	4.6013	4.6054	4.6019	4.6166
	10	4.6003	4.6005	4.6008	4.6021	4.6013	4.6170
	15	4.6003	4.6005	4.6008	4.6023	4.6013	4.6374
	20	4.6003	4.6005	4.6008	4.6025	4.6013	4.6529
	25	4.6003	4.6005	4.6008	4.6036	4.6013	4.6639
	30	4.6003	4.6005	4.6008	4.6058	4.6013	4.6901
γ	5	1.0006	1.0069	1.0003	1.0070	1.0002	1.0085
	10	1.0004	1.0007	1.0001	1.0008	1.0001	1.0047
	15	1.0004	1.0007	1.0001	1.0008	1.0001	1.0110
	20	1.0004	1.0007	1.0001	1.0009	1.0001	1.0154
	25	1.0004	1.0007	1.0001	1.0012	1.0001	1.0183
	30	1.0004	1.0007	1.0001	1.0019	1.0001	1.0263

结果表明：无论位移信号是否含有测量噪声，当谐波阶数大于 10 后，即使增加谐波数，识别参数也保持稳定。图 1 和图 2 给出 HBNID 和 IHBNID 对于

不同水平的测量噪声、谐波数与识别参数精度的关系曲线。由图可见，IHBNID 的精度受噪声影响较小，而 HBNID 明显受噪声影响，使识别精度下降。

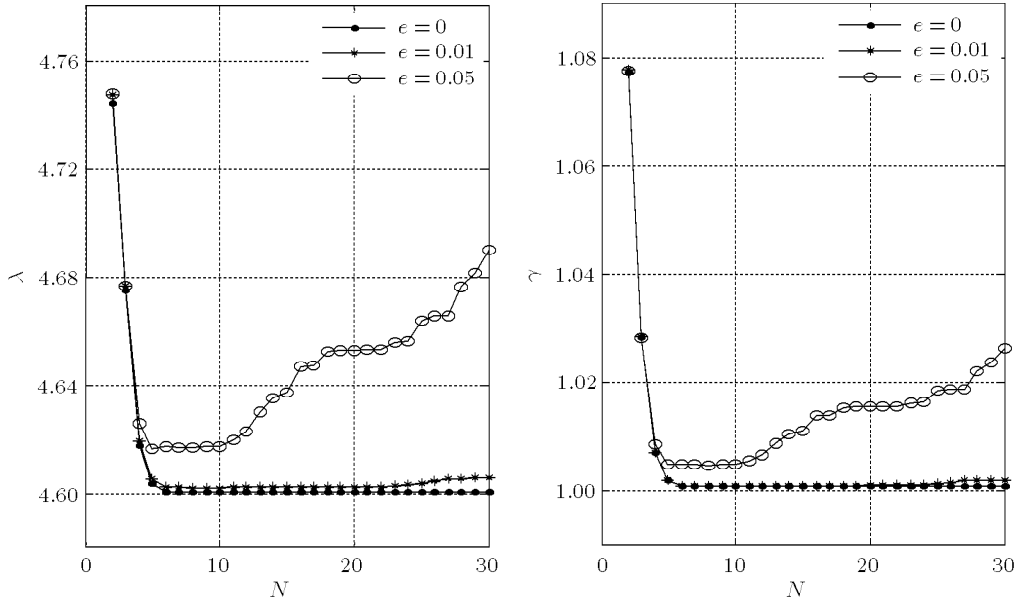


图 1 HBNID 识别参数 λ 和 γ 时测量噪声的影响

Fig.1 Effects of the measurement noise on the parameters λ and γ by using the HBNID method

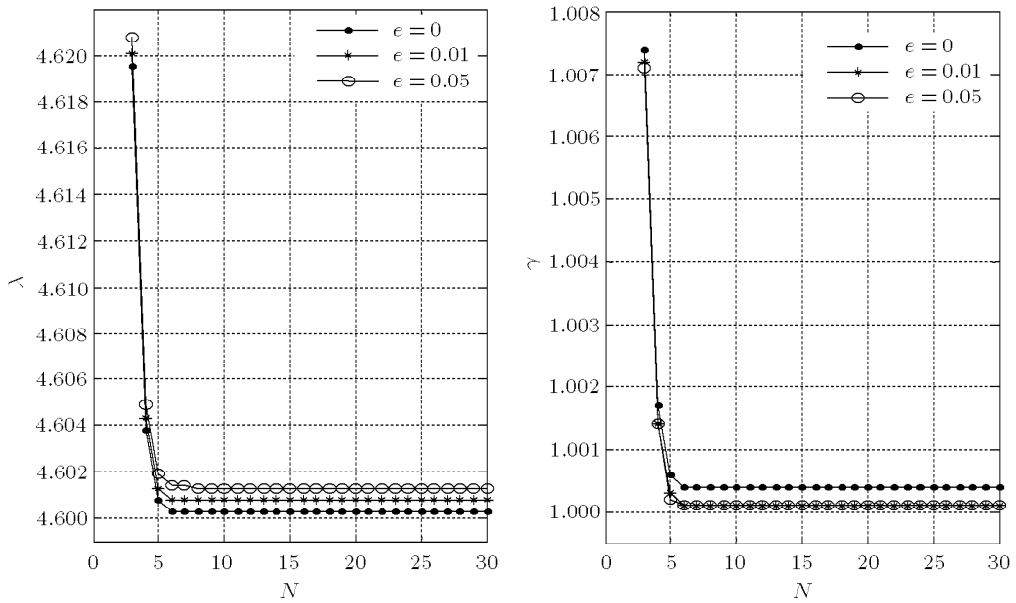


图 2 IHBNID 识别参数 λ 和 γ 时测量噪声的影响

Fig.2 Effects of the measurement noise on the parameters λ and γ by using the IHBNID method

3 结 论

增量谐波平衡参数识别模型的特点是：(1) 选择位移信号傅立叶级数的低阶主谐波分量的系数保持不变，而允许高阶谐波的系数根据残差进行自适

应调整，则能较好地控制算法的收敛性；(2) 当系统存在噪声时，如果谐波数 N 大于某个阈值，识别结果仍保持稳定；(3) 数值计算表明，参数初始值可在较大范围选择，不会对算法的收敛产生影响；(4)IHBNID 方法比 HBNID 在抵抗噪声影响上表现

出更优越的效果.

参 考 文 献

- 1 Ljung L. System Identification: Theory for the user. New Jersey: Prentice-Hall, 1987
- 2 Billings SA. Identification of nonlinear systems—A survey. In: Proceedings of IEEE, Part D. 1980, 127(1): 272~285
- 3 Haber R, Unbehauen H. Structure identification of nonlinear dynamic systems - A survey in input/output approaches, *Automatica*, 1990, 26(4): 651~677
- 4 Casas RA, Jacobson CA, Rey GJ, et al. Harmonic balance methods for nonlinear feedback identification. In: Proceeding of the Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Allerton IL, September 1997
- 5 Yasuda K, Kawamura S, Watanabe K. Identification of nonlinear multi-degree-of-freedom systems. *JSME International Journal*, 1988, 31(1): 8~15
- 6 Yuan CM, Feeny BF. Parametric identification of chaotic systems. *Journal of Vibration and Control*, 1998, 4(4): 405~426
- 7 Thothadri M, Casas RA, Moon FC, et al. Nonlinear system identification of Multi-Degree-of-Freedom systems. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32(3): 307~322
- 8 Thothadri M, Moon FC. Nonlinear system identification of systems with periodic limit-cycle response. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 39(1-2): 63~77
- 9 Lau SL, Cheung YK. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic system. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1981, 48: 959~964
- 10 Cheung YK, Chen SH, Lau SL. Application of the incremental harmonic balance method to cubic nonlinearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 140(2): 273~286
- 11 Lau SL. The incremental harmonic balance method and its application to nonlinear vibrations. In: Proceeding of International Conference on Structure Dynamics, Vibration, Noise and Control, Hong Kong, 1995. 50~57
- 12 Shen JH, Lin KC, Chen SH, et al. Bifurcation and route-to-chaos analyses for Mathieu-Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 52(4): 403~414

(责任编辑: 何漫丽)

NONLINEARITY SYSTEM IDENTIFICATION METHOD WITH PARAMETRIC EXCITATION BASED ON THE INCREMENTAL HARMONIC BALANCE METHOD¹⁾

Dou Suguang* Ye Min^{*,2)} Zhang Wei[†]

*(School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

†(College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract In this paper, the incremental harmonic balance for nonlinearity identification (IHBNI) is presented for the modeling and parametric identification of nonlinear systems. The effects of harmonic balance nonlinearity identification (HBNID) and IHBNI are also studied and compared by using the numerical simulation. Considering the Mathieu-Duffing equation as an example, the effectiveness of the IHBNI can be verified. With the aid of the new method, the derivation procedures of the incremental harmonic balance method are simplified. The results show that the IHBNI is highly efficient for computation, and its performances excel in those of the HBNID, such as the computation accuracy and the noise resistance.

Key words system modelling, nonlinearity identification, incremental harmonic balance, parameter excitation, nonlinear systems

Received 23 December 2008, revised 18 August 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10672141).

2) E-mail: hyemin@zju.edu.cn