多对一双方匹配市场中的最优化*

李建荣[1,†]

摘要 在双方市场中定义的博弈概念，可以使市场同方参与者的收益同时达到最大. 这种最优化存在的理论依据是选择匹配的稳定性. 用博弈论的分析与证明方法研究多对一双方匹配市场中的最优化. 在替代偏好和LAD(Law of Aggregate Demend)偏好下，证明由企业作选择的选择函数一定是个稳定匹配，由工人做选择的选择函数也是一个稳定匹配.

关键词 匹配博弈，稳定匹配，替代偏好
中图分类号 O225，F224.32
2010 数学分类号 91B68

Optimization in many-to-one two-sided matching market*

LI Jianrong[1,†]

Abstract The game-theoretic solutions defined in two-sided market allow the interests of agents on the same side of the market to be simultaneously maximized. The theoretic basis of such kind of optimization is the stability of the selection matching. This paper uses game-theoretic method to study the optimization in many-to-one two-sided matching market. Under the presence of substitutable and LAD(Law of Aggregate Demand) preferences, we prove that the selections made by firms produce a stable matching, so do the selections made by workers.

Keywords matching game, stable matching, substitutable preference
Chinese Library Classification O225, F224.32
2010 Mathematics Subject Classification 91B68

0 引 言

博弈论的研究模型涉及多个利益相冲突的决策者. 因为多个目标收益一般难以同时达到最大，所以在博弈论的研究中极度缺乏运筹与管理科学其它领域所取得的最优化结论；而且，博弈模型的理论分析一般不注重确定“最优”结果，而是首先注重确定在一些恰当定义下的稳定结果，如纳什均衡. 于是，在以双方匹配市场为研究对象的一类重要的博弈理论-匹配理论中研究最优化及其路径问题，就显得尤为重要与迫切.

2012年诺贝尔经济学奖授予美国匹配博弈理论学家埃尔文 • 罗斯 (Alvin E. Roth) 与罗伊德 • 夏普利 (Lloyd S. Shapley)，使匹配博弈理论成为近期国际与国内同行高度关注的一个热点问题. 巧合的是，文献 [1] 证明了 Roth[2]关于多对一双方匹配市场中的最优化

收稿日期：2013年5月8日
* 基金项目：国家自然科学基金 (No. 71301056)，广东省自然科学基金 (No. S2013040016469)
1. 华南师范大学数学科学学院，广州 510631；School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China
† 通讯作者 Corresponding author, Email: jrli77@163.com

及其路径问题的结论都是不正确的；该文以严密的推理、严谨的论证，分析了 Roth 的错误之处、错误的原因，及这些错误造成的理论与实证研究上的缺陷. 因为双方市场中的最优化及其路径问题在最优化理论、市场机制设计与市场管理领域都有广泛应用，该文在运筹与管理类国际一流学术期刊 Mathematics of Operations Research 上刊发后，立刻引起了国际同行的高度重视与关注，使该问题成为近期国际同行高度关注、博弈论学界急切想要解决的一个具有挑战性的前沿问题. 鉴于此，本文研究了多对一双方匹配市场中的最优化问题. 这是本文的创作缘由.

在双方市场中定义的博弈概念 (如匹配、稳定匹配等)可以使市场同方参与者 (如企业或工人) 的收益同时达到最大[3]，这种最优化存在的理论依据是选择匹配的稳定性. 给定两个不同的稳定匹配，让每一个企业 (工人) 从它 (他) 在这两个匹配下的匹配对象的并集中选出它 (他) 最偏好的对象来，这一选择的结果被称为这两个稳定匹配的选择函数[2]. Roth[2]在替代偏好下证明了：由企业作选择的选择函数是个稳定匹配；由工人作选择的选择函数不一定是个稳定匹配. 但由多对一匹配的定义，由工人作选择的选择函数一定是个匹配. 于是，我们称选择函数为选择匹配.

Blair[4]指出，由企业作选择的选择匹配的稳定性在多对多市场不一定成立. 因为在多对多市场中，工人与企业具有对称的地位，所以由工人作选择的选择匹配的稳定性在多对多市场也不一定成立. Martínez et al [5]在 q_F 可分离偏好下，直接引用 Roth 的结论，研究了由工人作选择的多对一选择匹配的稳定性. Echenique 和 Oviedo [6]声称，如果每一个工人被他在两个不同稳定匹配下的匹配对象选中，那么由企业作选择的多对多选择匹配是稳定的.

由企业作选择的多对一选择匹配的稳定性自 Roth [2]提出后，历经 28 年，Li[1]指出 Roth 的结论是不正确的. Li从选择匹配的构造入手，分析了选择匹配的基本属性，指出 Roth 的证明忽略了选择匹配的一个重要性质，从而存在严重的逻辑漏洞；并以具体实例表明 Roth 的结论不一定成立. 因为 Martínez et al [4]关于由工人作选择的选择匹配稳定性的证明建立在 Roth 的结论之上，Li的结论显示他们的成果有待重新考证. Li还论证了，在替代偏好下，一个工人要么被他不偏好的那个企业选中，要么失业[1]. 所以，Echenique 和 Oviedo[6]的假设是不成立的. 于是，Li[1]昭示了双方市场选择匹配的稳定性成为匹配理论研究中的一个缺口、一个有待解决的问题.

本文首先从选择匹配的定义入手，剖析了选择匹配的三个基本性质 (引理 2.1)，然后分析了多对一匹配的自然属性：一个多对一匹配对应了工人集合的一个分割. 利用这些性质，在替代偏好和 LAD 偏好[7]下证明了，由企业作选择的选择函数一定是个稳定匹配 (定理 2.1). 在这一部分的分析论证中，本文分析问题的视角和切入点，超越了 Roth [2]. 而且，本文还证明了，由工人作选择的选择函数也一定是个稳定匹配 (定理 2.2). 因此，本文不仅修正了 Roth [2]关于选择匹配稳定性的结论，还把它推广到了市场双方. 这不仅完善了多对一匹配市场的最优化研究，还为进一步研究优化路径打下了良好的理论基础. 这是本文的边际贡献.

本文余下部分的组织结构如下：第 1 节给出了模型的预备知识，模型使用的基本符号和基本概念；第 2 节给出了本文的主要结论；第 3 节对本文研究进行总结.

1 模 型

本文研究多对一的双方市场，市场的一方由机构组成，如企业、学校等；另一方由个体组成，如工人、学生等. 为了叙述的便利，我们采用既有文献惯用的称呼，称机构一方为企业，称个体一方为工人. 一个企业可以招聘多个工人，一个工人最多只能到一家企业工作.

市场由n个企业和m个工人组成，分别用两个不相交的集合$F=\{f_1,\cdots,f_n\}$和$W=\{w_1,\cdots,w_m\}$表示，称他们为博弈的参与者. 称W的任意一个子集S为一个工人联盟. 博弈规则是：任何一对参与者只要他们互相愿意与对方匹配就可以发生匹配；每一个参与者有拒绝接受一个匹配对象的权利 (博弈规则体现了自愿和自由精神).

每一个企业$f\in F$在所有工人联盟集合$2^W=\{S|S\subseteq W\}$上有一个完备的、具有传递性的和严格的偏好$P(f)$，具有如下形式：$P(f)=S_1,S_2,\emptyset,S_3,\cdots$，表示如果让$f$在全体工人中作选择，那么$f$的第一选择是聘用$S_1$中的所有工人；如果$S_1$中有工人拒绝$f$，即$S_1$对$f$是不可获得，那么$f$将选择聘用$S_2$中的所有工人；如果$S_2$也不可获得，那么$f$将选择不招聘任何工人，即便其他工人联盟，如$S_3$，是可获得. 称$f$偏好$S_1$于$S_2$，偏好$S_2$于$\emptyset$，偏好$\emptyset$于$S_3$等等.

为了简化论证，本文假定工人不关心谁将是他们的同事，即本文不考虑同事效应[8−12]. 在此假设下，每一个工人$w\in W$在所有企业上有一个完备的、具有传递性的和严格的偏好$P(w)$. 用$P=\{P(f_1),\cdots,P(f_n),P(w_1),\cdots,P(w_m)\}$表示所有参与者偏好集合，称为偏好束.

给定偏好束P，对每一个企业$f\in F$和任意两个工人联盟S，$S'\subseteq W$，用$SP(f)S'$表示f偏好S于S'；用$SR(f)S'$表示f对S的偏好不少于对S'的偏好，即$SP(f)S'$或f对S和S'的偏好是无差异的. 对每一个工人$w\in W$和任意两个企业$f,f'\in F$，用$fP(w)f'$ 表示w偏好f于f'，用$fR(w)f'$表示w对f 的偏好不少于对f'的偏好. 对$S\subseteq W$，如果$SR(f)\emptyset$，称S是企业f的一个可接受的对象，否则称为是不可接受的对象. 对$f\in F$，如果$fR(w)\emptyset$，称f是工人w的一个可接受的对象，否则称为是不可接受的对象.

如果一个参与者在任意两个不同对象上的偏好都不是无差异的，就称他具有严格偏好. 于是，如果企业f具有严格偏好$P(f)$，那么对$S,S'\subseteq W$，$S\neq S'$ 意味着 $SP(f)S'$ 或 $S'P(f)S$.

每一个参与者在他自己的偏好下参与市场活动，反复交往后市场的产出是一些匹配关系的形成. 一个匹配准确地刻画了一个企业招聘了哪些工人，一个工人到哪家企业工作，以及哪些企业和哪些工人没有发生匹配，具体定义如下.

定义 1.1 一个匹配μ是从集合$F\cup W$到由$F\cup W$ 的所有子集构成集合的一个映射，满足对所有企业$f\in F$和工人$w\in W$，有：

(1) $\mu(w)\in F\cup\{\emptyset\}$;

(2) $\mu(f)\subseteq W$;

(3) $f=\mu(w)\Leftrightarrow w\in\mu(f)$.

对于 $k\in F\cup W$，如果 $\mu(k)=\emptyset$，我们称 k 未发生匹配，否则称 k 发生了匹配. 条件 (1) 表明每一个工人最多只能与一个企业发生匹配；条件 (2) 表明一个企业可以招聘多个

工人；条件 (3) 表明匹配的“双方”特性：如果一个企业是一个工人的匹配对象，那么这个工人一定在这个企业的匹配对象中，即一个工人到一家企业工作意味着这家企业聘用了这个工人。

下面来考虑，在我们研究的市场中，哪些匹配可能发生，哪些匹配不可能发生. 这一问题体现了博弈规则的重要作用. 博弈规则规定：来自市场双方的参与者只有互相接受对方才可以发生匹配，即我们的博弈不强迫任何一个参与者强行匹配. 如果一个匹配将一个企业与一个它不可接受的工人联盟匹配，则这个匹配不可能发生，因为这个企业将拒绝接受这一匹配，我们的博弈规则也允许它这样做. 必须强迫一个参与者接受他不可接受对象的匹配，称为个体非理性匹配；每一个参与者的匹配对象都是可接受的匹配，称为个体理性匹配. 于是，如果 μ 是个体理性匹配，则对所有的参与者 $k \in F \cup W$，$\mu(k)R(k)\emptyset$.

给定偏好束 P 和工人联盟 S，每一个企业 f 都能够决定它在 S 中最偏好哪一群工人，用 $C_f(S)$ 表示，称为 f 在 S 中的选择集，即 $C_f(S) \subseteq S$ 且对任意的 $S' \subseteq S$，$C_f(S)R(f)S'$. 对任意一个企业来说，当偏好是严格的时侯，它在任意一个工人联盟上的选择集都是唯一的.

给定偏好束 P 和匹配 μ，如果存在一个工人 w 满足 $\emptyset P(w)\mu(w)$ （即 w 的匹配对象是不可接受的)，称μ被一个工人阻碍；如果存在一个企业 f 满足 $C_f(\mu(f)) \neq \mu(f)$，称μ 被一个企业阻碍；如果存在一对工人–企业(w,f)满足$w \notin \mu(f)$，但$w \in C_f(\mu(f) \cup \{w\})$且$fP(w)\mu(w)$，称$\mu$被一对工人–企业阻碍.

定义 1.2 *给定偏好束 P，如果一个匹配μ不被任何一个个体阻碍，也不被任何一对工人–企业阻碍，称μ是P的一个稳定匹配.*

注意，由定义知，稳定匹配是一个相对概念：μ 在偏好束P下是稳定匹配，在另一个偏好束P'下不一定是稳定匹配. 因此，在分析稳定匹配性质时，一定是局限在一个给定的偏好束下讨论 (这一点被很多文献忽略了). 基于此，偏好就是策略，不同策略下的稳定匹配一般不具可比性，但参与者的确在不同稳定匹配 (包括同一策略束下的不同稳定匹配和不同策略束下的不同稳定匹配) 中作着选择，这表明每一个参与者都有一“参考”策略，即他的真实偏好，其它偏好则是典型的策略了. 正因此，匹配理论是博弈理论.

还要注意，稳定匹配一定是个体理性匹配，个体理性匹配一定不会被一个工人阻碍，但可能被一个企业阻碍，因为在我们的定义框架下，可能存在$C_f(\mu(f)) \neq \mu(f)$，但$\mu(f)R(f)\emptyset$.

替代偏好是匹配理论研究中一个基本偏好假设，由 Kelso 和 Crawford [13]引入，具体定义如下.

定义 1.3 *给定偏好束P，对任意一个工人联盟S及工人$w \in S$，如果$w \in C_f(S)$，那么对任意的$S' \subseteq S$，$w \in C_f(S' \cup \{w\})$，称企业f的偏好$P(f)$是替代偏好.*

于是，如果企业f具有替代偏好，那么它视选择集中的工人为替代品而非互补品，即使选择集中有工人拒绝它，也不会影响它对选择集中其他工人的选择. 由替代偏好的定义直接有如下两个性质成立，它们有助于读者理解下文证明，我们把它们作为注给出.

注 1.1 如果企业f具有替代偏好$P(f)$，那么对任意的S, $S' \subseteq W$,

$$C_f(S \cup S') = C_f(C_f(S) \cup S') = C_f(C_f(S) \cup C_f(S')).$$

因为 $C_f(C_f(S)\cup S')\subseteq S\cup S'$，由选择集 $C_f(\bullet)$ 的定义有 $C_f(S\cup S')R(f)C_f(C_f(S)\cup S')$. 假设存在工人 $w\in C_f(S\cup S')$，但 $w\notin C_f(C_f(S)\cup S')$. 因为 $C_f(S)\cup S'\subseteq S\cup S'$，于是由替代偏好的定义有 $w\notin C_f(S)\cup S'$，从而 $w\notin C_f(S)$ 且 $w\notin S'$. 因为 $S\subseteq S\cup S'$，且假设 $w\in C_f(S\cup S')$，则再次由替代偏好的定义有 $w\notin S$. 因此 $w\notin S\cup S'$，这与假设 $w\in C_f(S\cup S')$ 矛盾. 所以 $C_f(S\cup S')\subseteq C_f(C_f(S)\cup S')$. 因为 f 具有严格偏好，从而 $C_f(S\cup S')=C_f(C_f(S)\cup S')$. 直接应用这一结论有 $C_f(C_f(S)\cup S')=C_f(C_f(S)\cup C_f(S'))$.

注意到，我们并不要求 $S\cap S'=\emptyset$，所以有可能 $S\cap S'\neq\emptyset$. 注 1.1 表明，一个企业在一个工人联盟上的“选择”可以“逐步”完成；可以把一个大的工人联盟分割成若干个小的工人联盟，先在小的工人联盟上进行选择，然后在选择出来的工人联盟上进行选择.

注 1.2 如果企业f具有替代偏好$P(f)$，$w\in S$但$w\notin C_f(S)$，那么$w\notin C_f(C_f(S)\cup\{w\})$.

由注 1.1 有 $C_f(C_f(S)\cup\{w\})=C_f(S\cup\{w\})$. 如果 $w\in S$，那么 $C_f(C_f(S)\cup\{w\})=C_f(S)$，而这意味着：如果 $w\notin C_f(S)$ 那么 $w\notin C_f(C_f(S)\cup\{w\})$.

本文将证明，当企业具有 LAD 偏好时，选择函数是稳定匹配，其定义如下.

定义 1.4 给定偏好束P, 如果对任意一个工人联盟S和所有的$S'\subseteq S$, 企业f在S和S'上的选择集$C_f(S)$和$C_f(S')$满足: $|C_f(S')|\leqslant|C_f(S)|$, 称$f$的偏好$P(f)$是LAD偏好[7].

LAD 偏好表明，给定一组工人，企业在工人联盟选择集中工人数目随着可供选择工人的增加而弱增加.

LAD 偏好与替代偏好没有关联. 比如在一个具有两个企业和四个工人的市场上，$F=\{f_1,\ f_2\}$ 是企业集合，$W=\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4\}$ 是工人集合. 因为我们只关注那些参与者可接受的对象，所以在具体描述一个参与者的偏好时，只把那些参与者可接受的对象列出来. 企业的偏好如下：

$P(f_1)=\{w_1,w_2,w_4\}$, $\{w_2,w_3,w_4\}$, $\{w_2,w_3\}$,

$P(f_2)=\{w_3\}$, $\{w_2,w_3\}$, $\{w_3,w_4\}$, $\{w_2,w_4\}$, $\{w_2\}$, $\{w_4\}$.

企业 f_1 的偏好 $P(f_1)$ 是 LAD 偏好，但不是替代偏好，因为 $w_1\in C_{f_1}(W)$ 但 $w_1\notin C_{f_1}(\{w_1\})$ $(=\emptyset)$. 企业 f_2 的偏好 $P(f_2)$ 是替代偏好，但不是 LAD 偏好，因为 $\{w_2,w_4\}\subseteq\{w_2,w_3,w_4\}$，但 $C_{f_2}(\{w_2,w_3,w_4\})=\{w_3\}$，$C_{f_2}(\{w_2,w_4\})=\{w_2,w_4\}$，于是 $|C_{f_2}(\{w_2,w_3,w_4\})|\leqslant|C_{f_2}(\{w_2,w_4\})|$.

2 选择匹配的稳定性

本节在替代偏好这个基本假设下，研究选择匹配的稳定性. 假设所有企业的偏好都是替代偏好，这一假设应用于本节余下部分，不再复述.

给定偏好束P和两个不同的稳定匹配μ_1,μ_2. 让每一个企业$f\in F$从它在这两个匹配下的匹配对象的并集$\mu_1(f)\cup\mu_2(f)$中，选出它最偏好的工人联盟来，即$C_f(\mu_1(f)\cup\mu_2(f))$. 这样选择的结果，是一个从集合$F\cup W$到由$F\cup W$的所有子集构成集合的一个映射，用$\lambda(\mu_1,\mu_2)$表示它. 即对每一个企业$f\in F$：$\lambda(\mu_1,\mu_2)(f)=C_f(\mu_1(f)\cup\mu_2(f))$；对每一个工人$w\in W$，将$w$与那些选择了他的企业对应，即$\lambda(\mu_1,\mu_2)(w)=\{f:w\in C_f(\mu_1(f)\cup\mu_2(f))\}$.

称 $\lambda(\mu_1,\mu_2)$ 为由企业做选择的稳定匹配 μ_1 和 μ_2 的选择函数. 注意到，当 $\mu_1=\mu_2$ 时，$\lambda(\mu_1,\mu_2)=\mu_1$，于是 $\lambda(\mu_1,\mu_2)$ 是一个稳定匹配. 当 $\mu_1\neq\mu_2$ 时，$\lambda(\mu_1,\mu_2)$ 不一定是

稳定匹配，甚至不一定是个匹配；因为可能存在一个特别优秀的工人，被两个匹配下的企业同时选择，由多对一匹配的定义有，这时的 $\lambda(\mu_1,\mu_2)$ 不是一个匹配.

在不至于引起混淆的情况下，为了表达的简便，用λ表示$\lambda(\mu_1,\mu_2)$. 因为企业具有替代偏好，首先分析λ是一个匹配，即不存在一个工人同时被两个不同的企业选中.

假设工人w在μ_1和μ_2下的匹配对象不同(这里包含两种可能：一种是w在两个匹配下分别与两个不同的企业发生了匹配；另一种是w只在一个匹配下发生了匹配，在另一种匹配下未发生匹配), 即$\mu_1(w)\neq\mu_2(w)$. 因为w具有严格偏好，不失一般性，令$\mu_1(w)P(w)\mu_2(w)$. 因为μ_2是稳定匹配，所以w在μ_2下的匹配对象是可接受的，即$\mu_2(w)R(w)\emptyset$. 于是由偏好的传递性有$\mu_1(w)P(w)\emptyset$，这表明w在μ_1下发生了匹配. 令企业f是w在μ_1下的匹配对象，即$f=\mu_1(w)$；则由假设有$fP(w)\mu_2(w)$. 因为μ_2是稳定匹配，(w,f)不能阻碍μ_2，所以$w\notin C_f(\mu_2(f)\cup\{w\})$. 因$f=\mu_1(w)$，由匹配的定义有$w\in\mu_1(f)$. 因为$f$具有替代偏好 $P(f)$，于是$w\notin C_f(\mu_1(f)\cup\mu_2(f))$ (否则由替代偏好定义有$w\in C_f(\mu_2(f)\cup\{w\})$，矛盾)，即$w\notin\lambda(f)$.

上述分析表明，如果一个工人在两个不同稳定匹配下的匹配对象不同，那么他不会被他偏好的那个对象选中 (引理2.1(2)). 因此一个工人在选择函数λ下不可能同时被两个不同的企业选中，所以λ是一个匹配. 因为μ_1 和μ_2是稳定匹配，所以每一个工人在μ_1和μ_2下的匹配对象都是可接受的，从而在λ 下的匹配对象也是可接受的，因此λ不会被任何一个工人个体阻碍. 由λ的定义有，λ不会被任何一个企业阻碍. 于是，λ是一个个体理性的匹配且不被任何个体阻碍(引理2.1(1)). 引理2.1(2) 表明，如果一个工人只在两个稳定匹配中的一个下发生了匹配，那么他在选择函数λ下一定未发生匹配，即如果一个工人在λ 下发生了匹配，那么他在两个稳定匹配下都发生了匹配 (引理2.1(3)). 因为下文将使用到这些结论，我们把它们作为引理列出. 在引理列出之前，先来分析匹配的一个自然属性.

给定一个匹配 μ，令 $M(\mu)=\{w|\mu(w)\in F\}$ 表示在 μ 下发生了匹配的工人集合，则 $M(\mu)=\cup_{f\in F}\,\mu(f)$. 因为在一个多对一匹配下，一个工人最多只能与一个企业发生匹配，从而两个不同企业的匹配对象的交集为空集，于是 $|M(\mu)|=\sum_{f\in F}|\mu(f)|$.

引理 2.1 *给定偏好束P，令μ_1和μ_2是P的两个稳定匹配，λ是它们的选择函数. 则*

(1) λ是一个个体理性的匹配且不被任何个体阻碍;

(2) λ不会将一个工人与他在μ_1和μ_2下偏好的那个对象匹配;

(3) $M(\lambda)\subseteq M(\mu_1)\cap M(\mu_2)$.

Li[1]证明了，在替代偏好下，λ 不一定是稳定匹配. Li分析并举证了，λ 的不稳定源自于存在如下可能：存在两个不同的稳定匹配 μ_1、μ_2 和一个工人 w，w 在 μ_1 和 μ_2 下均发生了匹配，即 $w\in M(\mu_1)\cap M(\mu_2)$；但在 λ 下未发生匹配，即 $w\notin M(\lambda)$；结合引理2.1(3) 有 $M(\lambda)\subsetneq M(\mu_1)\cap M(\mu_2)$. 只要这种可能存在，$\lambda$ 的稳定性就不能保证. 下面的引理表明，在 LAD 偏好下，不存在这种可能，即 $M(\lambda)=M(\mu_1)\cap M(\mu_2)$.

引理 2.2 *当企业具有 LAD 偏好时，如果一个工人在两个稳定匹配下都发生了匹配，那么他在这两个匹配的选择函数 λ 下也发生了匹配.*

证明 给定偏好束 P，令 μ_1 和 μ_2 是 P 的两个稳定匹配，λ 是它们的选择函数.

对每一个企业 $f\in F$，由 λ 的定义有 $\lambda(f)=C_f(\mu_1(f)\cup\mu_2(f))$. 因为 μ_i 是稳定匹配，由稳定匹配的定义有 $C_f(\mu_i(f))=\mu_i(f)$，$i=1,2$. 因为 f 具有 LAD 偏好且

$\mu_i(f) \subseteq \mu_1(f) \cup \mu_2(f)$，所以 $|\lambda(f)| \geqslant |\mu_i(f)|$. 于是

$$\sum_{f \in F} |\lambda(f)| \geqslant \sum_{f \in F} |\mu_i(f)|,$$

即

$$|M(\lambda)| \geqslant |M(\mu_i)|.$$

由引理 2.1(3) 有 $M(\lambda) \subseteq M(\mu_1) \cap M(\mu_2)$，从而 $|M(\lambda)| \leqslant |M(\mu_1) \cap M(\mu_2)| \leqslant |M(\mu_i)|$. 于是 $|M(\lambda)| = |M(\mu_1) \cap M(\mu_2)| = |M(\mu_i)|$，$i = 1, 2$. 从而 $M(\lambda) = M(\mu_1) = M(\mu_2)$，命题得证.

由引理 2.2 的证明直接有如下推论.

推论 2.1 当企业具有 LAD 偏好时，令 μ_1 和 μ_2 是偏好束 P 的两个稳定匹配，λ 是它们的选择函数，那么 $M(\lambda) = M(\mu_1) = M(\mu_2)$.

推论 2.1 表明，如果一个工人在一个稳定匹配下发生了匹配，那么他在所有稳定匹配下都发生了匹配. 于是，如果一个工人在一个稳定匹配下发生了匹配，但在涉及这个匹配的选择函数下却未发生匹配，那么这个选择函数就不一定是稳定匹配，Li[1]正是从这一思路上构造反例，推翻了 Roth[2]的经典结论. 推论 2.1 修补了 Roth 证明中的逻辑漏洞.

下面我们给出本文的一个主要结论.

定理 2.1 当企业具有 LAD 偏好时，由企业做选择的两个稳定匹配的选择函数是一个稳定匹配.

证明 给定偏好束 P，令 μ_1 和 μ_2 是 P 的两个稳定匹配，λ 是它们的选择函数. 由引理 2.1(1) 有，λ 是一个个体理性匹配且不被任何个体阻碍. 下面证明 λ 不被任何一对工人–企业阻碍.

假设存在一对工人-企业 (w, f) 满足 $w \notin \lambda(f)$，但 $w \in C_f(\lambda(f) \cup \{w\})$ 且 $fR(w)\emptyset$ (否则 f 对 w来说是不可接受的，则 (w, f) 不能阻碍 λ). 因为 $\lambda(f) = C_f(\mu_1(f) \cup \mu_2(f))$ 且 f 具有替代偏好，所以 $w \notin \mu_1(f) \cup \mu_2(f)$ (否则，因假设 $w \notin \lambda(f)$，则由注 1.2 有 $w \notin C_f(\lambda(f) \cup \{w\})$，与假设矛盾) 且 $C_f(\lambda(f) \cup \{w\}) = C_f(\mu_1(f) \cup \mu_2(f) \cup \{w\})$ (见注 1.1). 因假设 $w \in C_f(\lambda(f) \cup \{w\})$，于是由替代偏好定义有 $w \in C_f(\mu_1(f) \cup \{w\})$ 且 $w \in C_f(\mu_2(f) \cup \{w\})$. 因为 μ_1 和 μ_2 是稳定匹配，(w, f) 不能阻碍 μ_1 和 μ_2，所以 $\mu_1(w)P(w)f$ 且 $\mu_2(w)P(w)f$. 因为由假设有 $fR(w)\emptyset$，所以由偏好的传递性有 $\mu_1(w)P(w)\emptyset$ 和 $\mu_2(w)P(w)\emptyset$. 即 w 在 μ_1 和 μ_2 下都发生了匹配. 于是由推论 2.1 得，w 在 λ 下也发生了匹配. 再由 λ 的定义有 $\lambda(w) = \mu_1(w)$ 或 $\mu_2(w)$. 于是 $\lambda(w)P(w)f$，从而 (w, f) 不能阻碍 λ，λ 是一个稳定匹配.

下面分析由工人做选择的两个稳定匹配的选择函数. 给定偏好束 P 和两个稳定匹配 μ_1, μ_2. 让每一个工人 $w \in W$ 从他在这两个匹配下的匹配对象 $\mu_1(w)$ 和 $\mu_2(w)$ 中，选出他最偏好的企业来. 这样选择的结果，是一个从集合 $F \cup W$ 到由 $F \cup W$ 的所有子集构成集合的一个映射，我们用 $\nu(\mu_1, \mu_2)$ 表示它. 即对每一个工人 $w \in W$：如果 $\mu_1(w)P(w)\mu_2(w)$，那么 $\nu(\mu_1, \mu_2)(w) = \mu_1(w)$，否则 $\nu(\mu_1, \mu_2)(w) = \mu_2(w)$；对每一个企业 $f \in F$，将 f 与那些选择了它的工人对应，即 $\nu(\mu_1, \mu_2)(f) = \{w : f = \nu(w)\}$.

称 $\nu(\mu_1,\mu_2)$ 为由工人做选择的稳定匹配 μ_1 和 μ_2 的选择函数. 在不至于引起混淆的情况下，为了表达的简便，我们用 ν 表示 $\nu(\mu_1,\mu_2)$. 注意到，当 $\mu_1=\mu_2$ 时，$\nu=\mu_1$，于是 ν 是一个稳定匹配. 当 $\mu_1\neq\mu_2$ 时，因为每一个工人只能选择一个企业，由多对一匹配的定义有，ν 是一个匹配. Roth [2]在替代偏好下证明了，ν 不一定是稳定匹配. 下面证明，在 LAD 偏好下，ν 一定是个稳定匹配. 首先，有如下引理.

引理 2.3 给定偏好束 P，令 μ_1 和 μ_2 是 P 的两个稳定匹配，对每一个企业 $f\in F$，下式成立

$$C_f(\nu(f)\cup\mu_i(f))=\mu_i(f),\ i=1,2.$$

证明 先对 $i=1$ 进行论证.

假设存在一个企业 f 不满足上式，即 $C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))\neq\mu_1(f)$. 因为 f 具有严格偏好且 $\mu_1(f)\subseteq\nu(f)\cup\mu_1(f)$，所以由选择集 $C_f(\bullet)$ 的定义有 $C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))P(f)\mu_1(f)$. 因为 μ_1 是稳定匹配，f 在 μ_1 下的匹配对象是可接受的，即 $\mu_1(f)R(f)\emptyset$. 由偏好的传递性有 $C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))P(f)\emptyset$. 于是 $C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))\neq\emptyset$. 因此存在一个工人 w 满足：$w\in C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))$ 但 $w\notin\mu_1(f)$ (则 $f\neq\mu_1(w)$). 因为 $w\in\nu(f)\cup\mu_1(f)$ 但 $w\notin\mu_1(f)$，于是 $w\in\nu(f)$，即 $f=\nu(w)$. 由选择函数 ν 的定义有 $f=\mu_2(w)$ 且 $fP(w)\mu_1(w)$. 因为 μ_1 是稳定匹配，(w,f) 不能阻碍 μ_1，所以 $w\notin C_f(\mu_1(f)\cup\{w\})$. 因为 $w\in\nu(f)$ 且 f 具有替代偏好，所以由替代偏好的定义有 $w\notin C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))$，这与 $w\in C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))$ 的假设相矛盾. 于是对所有的企业 $f\in F$，$C_f(\nu(f)\cup\mu_1(f))=\mu_1(f)$.

类似可以证明，对所有的企业 $f\in F$，$C_f(\nu(f)\cup\mu_2(f))=\mu_2(f)$.

引理 2.3 表明，对每一个企业 $f\in F$，对所有的工人 $w\in\mu_1(f)\cup\mu_2(f)$，由替代偏好的定义有 $w\in C_f(\nu(f)\cup\{w\})$. 因为由 ν 的定义有 $\nu(f)\subseteq\mu_1(f)\cup\mu_2(f)$，所以对所有的工人 $w\in\nu(f)$，$w\in C_f(\nu(f))$，即 $C_f(\nu(f))=\nu(f)$. 于是 ν 不被任何一个企业阻碍. 因为 μ_1 和 μ_2 是稳定匹配，每一个工人 $w\in W$ 在 μ_1 和 μ_2 下的匹配对象都是可接受的；而 w 在 ν 下的匹配对象是 w 在 $\mu_1(w)$ 和 $\mu_2(w)$ 中择优选出的，所以 $\nu(w)$ 是可接受的；从而 ν 不被任何一个工人阻碍. 于是有如下推论.

推论 2.2 由工人做选择的两个稳定匹配的选择函数 ν 是一个个体理性匹配，且不被任何个体阻碍.

如果一个工人 w 在选择函数 ν 下发生了匹配，因为 $\nu(w)$ 是 w 在 $\mu_1(w)$ 和 $\mu_2(w)$ 中择优选出的，所以 w 一定在 μ_1 或 μ_2 下发生了匹配，即 $M(\nu)\subseteq M(\mu_1)\cup M(\mu_2)$. 由推论 2.1 有 $M(\mu_1)=M(\mu_2)$，所以 $M(\nu)\subseteq M(\mu_i)$，$i=1,2$. 反之，如果一个工人 w 在 μ_1 或 μ_2 下发生了匹配，由 ν 的择优性知，w 在 ν 下一定发生了匹配，即 $M(\mu_i)\subseteq M(\nu)$，$i=1,2$. 于是 $M(\nu)=M(\mu_i)$，从而 $|M(\nu)|=|M(\mu_i)|$，即

$$\sum\nolimits_{f\in F}|\nu(f)|=\sum\nolimits_{f\in F}|\mu_i(f)|,\quad i=1,2.$$

对每一个企业 $f\in F$，当 f 具有 LAD 偏好时，引理 2.3 给出 $C_f(\nu(f)\cup\mu_i(f))=\mu_i(f)$, $i=1,2$. 由推论 2.2, 有 $C_f(\nu(f))=\nu(f)$. 于是由 LAD 偏好的定义有 $|\mu_i(f)|\geqslant|\nu(f)|$. 但由上一段的推导有 $\sum_{f\in F}|\nu(f)|=\sum_{f\in F}|\mu_i(f)|$，从而 $|\mu_i(f)|=|\nu(f)|$，$i=1,2$

(否则，存在一个企业 $f' \in F$，$|\mu_i(f')| > |\nu(f')|$；但对所有其它的企业 $f \in F$，$|\mu_i(f)| \geqslant |\nu(f)|$；于是 $\sum_{f\in F}|\nu(f)| > \sum_{f\in F}|\mu_i(f)|$，矛盾). 结合引理2.2 有如下推论.

推论 2.3 如果企业 $f \in F$ 具有 LAD 偏好，那么

$$|\lambda(f)| = |\nu(f)| = |\mu_1(f)| = |\mu_2(f)|.$$

下面我们给出本文的另一个主要结论.

定理 2.2 当企业具有 LAD 偏好时，由工人做选择的两个稳定匹配的选择函数 ν 是一个稳定匹配.

证明 给定偏好束 P，令 μ_1 和 μ_2 是 P 的两个稳定匹配，ν 是它们的选择函数. 由推论 2.2，我们只需要证明不存在一对工人-企业阻碍 ν.

假设存在一对工人-企业 (w,f) 满足 $fP(w)\nu(w)$. 由 ν 的定义有 $\nu(w)R(w)\mu_1(w)$ 和 $\nu(w)R(w)\mu_2(w)$，则由偏好的传递性有 $fP(w)\mu_1(w)$ 且 $fP(w)\mu_2(w)$. 因为 μ_1 和 μ_2 是稳定匹配，(w,f) 不能阻碍 μ_1 和 μ_2，所以 $w \notin C_f(\mu_1(f)\cup\{w\})$ 且 $w \notin C_f(\mu_2(f)\cup\{w\})$. 从而 $C_f(\mu_1(f)\cup\{w\}) = C_f(\mu_1(f))$ 和 $C_f(\mu_2(f)\cup\{w\}) = C_f(\mu_2(f))$. 因为 μ_1 和 μ_2 是稳定匹配，f 不能阻碍 μ_1 和 μ_2，所以 $C_f(\mu_1(f)) = \mu_1(f)$ 且 $C_f(\mu_2(f)) = \mu_2(f)$. 从而 $C_f(\mu_1(f)\cup\{w\}) = \mu_1(f)$ 且 $C_f(\mu_2(f)\cup\{w\}) = \mu_2(f)$. 于是

$$\begin{aligned}C_f(\nu(f)\cup\mu_i(f)) &= C_f(\nu(f)\cup C_f(\mu_i(f)\cup\{w\}))\\ &= C_f(\nu(f)\cup\mu_i(f)\cup\{w\})\\ &= \mu_i(f), \qquad i=1,2.\end{aligned}$$

其中，第一个等号由上段式子得，第二个等号由替代性得 (见注 1.1)，最后一个等号由引理 2.3 得. 于是 $C_f(\nu(f)\cup\mu_i(f)\cup\{w\}) = \mu_i(f)$，$i=1,2$. 所以对所有 $w' \in \mu_1(f)\cup\mu_2(f)$，由替代偏好的定义有 $w' \in C_f(\nu(f)\cup\{w'\}\cup\{w\})$. 因为 $\nu(f) \subseteq \mu_1(f)\cup\mu_2(f)$，所以对所有的 $w'' \in \nu(f)$，$w'' \in C_f(\nu(f)\cup\{w\})$，即 $\nu(f) \subseteq C_f(\nu(f)\cup\{w\})$.

因为 $\nu(f) \subseteq \nu(f)\cup\{w\} \subseteq \nu(f)\cup\mu_i(f)\cup\{w\}$；由推论 2.2 有 $C_f(\nu(f)) = \nu(f)$；由上段证明有 $C_f(\nu(f)\cup\mu_i(f)\cup\{w\}) = \mu_i(f)$，$i=1,2$；而 f 具有 LAD 偏好，所以由 LAD 偏好的定义有 $|\mu_i(f)| \geqslant |C_f(\nu(f)\cup\{w\})| \geqslant |\nu(f)|$，$i=1,2$. 于是结合推论 2.3 有 $|C_f(\nu(f)\cup\{w\})| = |\nu(f)|$. 而由上段证明有 $\nu(f) \subseteq C_f(\nu(f)\cup\{w\})$，所以 $C_f(\nu(f)\cup\{w\}) = \nu(f)$. 于是 $w \notin C_f(\nu(f)\cup\{w\})$，从而 (w,f) 不能阻碍 ν，ν 是一个稳定匹配.

3 总 结

本文研究了多对一市场选择匹配的稳定性. 在替代偏好和 LAD 偏好下证明了，由企业做选择和由工人做选择的选择匹配是稳定的. 定理 2.1 修正了 Roth 关于由企业作选择的选择匹配稳定性的错误结论，定理 2.2 将选择匹配的稳定性推广到工人一方. 因此，本文不仅修补了匹配博弈理论中一个理论研究的缺陷，还完善了该理论研究.

选择匹配的稳定性不仅自然地解释了市场双方各存在一个最优稳定匹配；同时还揭示了市场同方参与者之间在竞争的同时存在合作的可能. 这不仅有利于我们对市场机制的理解，也有利于市场机制设计和市场管理. 同时，本文的结论不仅适用于如劳动力市场、学校招生市场、房地产市场和婚姻市场这些典型的双方市场，还适用于公司的岗位–员工匹配管理.

本文的定理 2.1 和定理 2.2，隐含了稳定匹配集合满足格结构，那么在稳定匹配集合上选择“恰当”的二元偏序关系，研究它的格结构是后继的一个研究方向. 因为多对多市场是多对一市场的一般化，在多对多市场中工人与企业具有完全对称的地位，一个工人可以同时到多家企业工作，从而工人的偏好比多对一市场中的复杂，那么能否将选择匹配的稳定性推广到多对多市场是另一个后继的研究方向.

参 考 文 献

[1] Li J. A note on Roth's consensus property of many-to-one matching [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2013, **38**(2): 389-392.

[2] Roth A. Conflict and coincidence of interest in job matching: some new results and open questions [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1985, **10**(3): 379-389.

[3] Roth A. Stability and polarization of interests in job matching [J]. *Econometrica*, 1984, **52**(1): 47-57.

[4] Blair C. The lattice structure of the set of pairwise-stable matchings with multiple partners [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1988, **13**(4): 619-628.

[5] Martínez R, Massó J, Neme A, et al. On the lattice structure of the set of stable matchings for a many-to-one model [J]. *Optimization*, 2001, **50**(5-6): 439-457.

[6] Echenique F, Oviedo J. A theory of stability in many-to-many matching markets [J]. *Theoretical Economics*, 2006, **1**(2): 233-273.

[7] Hatfield J W, Milgrom P. Matching with contracts [J]. *American Economic Review*, 2005, **95**(4): 913-935.

[8] Dutta B, Massó J. Stability of matchings when individuals have preferences over colleagues [J]. *Journal of Economic Theory*, 1997, **75**(2): 464-475.

[9] Echenique F, Yenmez M B. A solution to matching with preferences over colleagues [J]. *Games and Economic Behavior*, 2007, **59**(1): 46-71.

[10] Kominers S D. Matching with preferences over colleagues solves classical matching [J]. *Games and Economic Behavior*, 2010, **68**(2): 773-780.

[11] Pycia M. Stability and preference alignment in matching and coalition formation [J]. *Econometrica*, 2012, **80**(1): 323-362.

[12] Li J. F-lexicographic preferences and stable matching [J]. *South China Journal of Economics*, 2012, **30**(5): 54-60.

[13] Kelso A S, Crawford V P. Job matching, coalition formation, and gross substitutes [J]. *Econometrica*, 1982, **50**(6): 1483-1504.