

文章编号: 1001-0920(2013)08-1165-08

对区间二型模糊集的EKM降型法的改进

王建辉, 纪雯, 方晓柯, 顾树生

(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

摘要: 二型模糊集的质心计算称为降型, 目前的降型方法大多计算成本较高, 其中EKM(Enhanced Karnik-Mendel)法可计算区间二型模糊集的质心. 然而, 由于EKM算法中求取切换点的初始化方法还不完善, 计算时间较长, 使其在实际应用中受到一定限制. 对此, 提出一种新的改进EKM法, 对原有方法进行了两处改进: 更改切换点的初始化和改进查找切换点的方法. 所提出的方法可实现向上和向下搜索, 计算量大大减小, 降型更有效. 仿真结果验证了新的改进EKM法的有效性.

关键词: 区间二型模糊集; 降型; EKM法; 新的改进EKM法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Improvement of enhanced Karnik-Mendel algorithm for interval type-2 fuzzy sets

WANG Jian-hui, JI Wen, FANG Xiao-ke, GU Shu-sheng

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Correspondent: JI Wen, E-mail: jw161@163.com)

Abstract: Type reduction is the work of computing the centroid of a type-2 fuzzy set. At present, most of type reduction methods have high computational cost. The enhanced Karnik-Mendel(EKM) algorithm can compute the centroid of an interval type-2 fuzzy set efficiently. However, the initialization of the switch point in the EKM algorithm is not a good one, and the computation time is long, which makes a limit on the application in real system. In view of these problems, a novel improved EKM algorithm is developed for improving the EKM algorithm. The proposed algorithm provides two improvements on the EKM algorithm. Firstly, the initialization conditions of switch points are changed. Then, the method of searching for switch points is improved, in which can search upward and downward. The number of computations involved is greatly reduced and type reduction can be done much more efficiently. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: interval type-2 fuzzy sets; type reduction; enhanced Karnik-Mendel(EKM); novel improved EKM algorithm

0 引言

在模糊系统中, 一型模糊集已广泛地应用于各个领域^[1-3], 其不确定性用 $[0, 1]$ 之间的数字表示. 然而, 一型模糊集的隶属度函数是完全精确的. 二型模糊集^[4]是一型模糊集的扩展, 其隶属函数是一型模糊集. 二型模糊集因其维数的扩展和自由度的提高已受到学者的广泛关注, 在实际系统应用中取得了很多成果, 如自动控制^[5-6]、模式识别^[7-8]、数据分类^[9-10]、函数逼近^[11]、医学应用^[12]等. 但是, 由于二型模糊集的结构复杂, 计算量大, 这些应用中绝大多数是采用二型模糊集的简化——区间二型模糊集, 其隶属度值为一确

定区间而非函数.

降型用于计算二型模糊集的质心, 是二型模糊推理中的主要运算. 二型模糊系统是由二型模糊集表示的二型模糊规则组成. 通常, 二型模糊系统的输出为二型模糊集. 因此, 需要对其进行降型处理, 将其降型为一型模糊集, 然后通过解模糊化将一型模糊集转化为精确值. 目前越来越多的学者关注于二型模糊系统研究. 然而, 与解模糊化相比降型更耗时, 因此, 高效的降型方法非常重要.

目前, 降型方法主要有以下几种: Liu^[13]提出的利用 α 截集将二型模糊集分解为区间二型模糊集合,

收稿日期: 2012-10-21; 修回日期: 2013-03-04.

基金项目: 辽宁省科技计划项目(2010020176-301); 沈阳市基金项目(F10-2D5-1-57).

作者简介: 王建辉(1957-), 女, 教授, 博士生导师, 从事复杂控制系统的建模与控制、网络环境下先进控制技术的应用等研究; 纪雯(1983-), 女, 博士生, 从事人工智能的研究.

并应用 Karnik-Mendel (KM) 算法对各个区间二型模糊集合进行降型. Coupland 等^[14]提出的基于几何的解模糊化方法, 其速度快于基于降型的方法, 但其模糊集合的形式具有一定的局限性. Lucas 等^[15]计算每个垂直面的质心, 并将计算所获得的质心集合相结合, 形成降型集. Tan 等^[16]引入一个等价一型模糊集的概念, 利用等价一型模糊集的集合代替二型模糊集, 使得降型简化为如何选取等价一型模糊集合. Wu 等^[17]利用 α 截面表示法和区间二型模糊集的有用特性, 提出了一种计算二型模糊集质心的快速方法, 使得所涉及的计算量大大减小. Wu 等^[18]提出的改进 KKM 法 (EKM), 降低了降型计算成本. 然而, EKM 法存在求取切换点的初始化方法不够完善和迭代速度较慢的不足. 对此, 本文对 EKM 法加以改进, 提出一种新的改进 EKM 法, 仿真结果表明了该方法的有效性.

1 基础知识

1.1 二型模糊集

连续论域 X 上的二型模糊集 \tilde{A} 可以表示为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u) = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / u \right] / x. \quad (1)$$

其中: $\mu_{\tilde{A}}(x, u) \in [0, 1]$ 是集合的三维隶属度函数; $u \in J_x$ 是主隶属度值, $J_x \subseteq [0, 1]$ 是 u 的范围; $\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / u$ 是次隶属度函数; $\mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u)$ 表示论域中的元素 (x, u) 与其隶属度 $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ 之间的对应关系; $\int \int$ 表示所有 x 和 u 的并集. 如果论域 X 是离散的, 则用 \sum 取代 \int .

1.2 区间二型模糊集

在二型模糊集合中, 若对于 $\forall x \in X$ 及 $u \in J_x$, 次隶属度值均为 1, 则称 \tilde{A} 为区间二型模糊集, 即

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} 1 / (x, u) = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} 1 / u \right] / x. \quad (2)$$

若 X 是离散集合, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$; $\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}}(x_N)$ 分别为 $[\underline{f}(x_1), \bar{f}(x_1)], [\underline{f}(x_2), \bar{f}(x_2)], \dots, [\underline{f}(x_N), \bar{f}(x_N)]$ 等区间, $\underline{f}(x_i), \bar{f}(x_i)$ 分别为 x_i 的下隶属度函数和上隶属度函数, 则区间二型模糊集 \tilde{A} 的质心 $C_{\tilde{A}}$ 为

$$C_{\tilde{A}} = 1 / [c, \bar{c}]. \quad (3)$$

其中

$$c = \frac{\sum_{i=1}^L x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N x_i \underline{f}(x_i)}{\sum_{i=1}^L \bar{f}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{f}(x_i)}, \quad (4)$$

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^R x_i \underline{f}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N x_i \bar{f}(x_i)}{\sum_{i=1}^R \underline{f}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N \bar{f}(x_i)}, \quad (5)$$

$$x_L \leq c < x_{L+1}, \quad (6)$$

$$x_R \leq \bar{c} < x_{R+1}, \quad (7)$$

L 和 R 分别称为 c 和 \bar{c} 的左切换点和右切换点. 若 X 为连续论域, 则在求解质心之前需先对论域进行采样处理.

1.3 EKM 算法

由 1.2 节可知, 区间二型模糊集的质心计算 (降型) 即是 c 和 \bar{c} 的计算. 目前已有很多降型算法, 其中 Wu 等^[18]提出的 EKM (Enhanced Karnik-Mendel) 法可有效计算区间二型模糊集的质心. c 和 \bar{c} 的计算过程分别如以下算法 1 和算法 2 所示.

算法 1 利用 EKM 计算 c .

Step 1: 设 $k = [N/2.4]$ (最靠近 $N/2.4$ 的整数);

Step 2: 计算

$$a = \sum_{i=1}^k x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \underline{f}(x_i);$$

Step 3: 计算

$$b = \sum_{i=1}^k \bar{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \underline{f}(x_i);$$

Step 4: 查找 k' , 使其满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$;

Step 5: while $k' \neq k$;

Step 6: 计算 $s = \text{sign}(k' - k)$;

Step 7: 更新

$$a \leftarrow a + s \sum_{i=\min\{k', k\}+1}^{\max\{k', k\}} x_i (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 8: 更新

$$b \leftarrow b + s \sum_{i=\min\{k', k\}+1}^{\max\{k', k\}} (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 9: 更新 $k \leftarrow k'$;

Step 10: 查找 k' , 使其满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$;

Step 11: end while;

Step 12: 返回 $c = a/b$ 和 $L = k$.

算法 2 利用 EKM 计算 \bar{c} .

Step 1: 设 $k = [N/1.7]$ (最靠近 $N/1.7$ 的整数);

Step 2: 计算

$$a = \sum_{i=1}^k x_i \underline{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \bar{f}(x_i);$$

Step 3: 计算

$$b = \sum_{i=1}^k \underline{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \bar{f}(x_i);$$

Step 4: 查找 k' , 使其满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$;

Step 5: while $k' \neq k$;

Step 6: 计算 $s = \text{sign}(k' - k)$;

Step 7: 更新

$$a \leftarrow a - s \sum_{i=\min\{k',k\}+1}^{\max\{k',k\}} x_i(\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 8: 更新

$$b \leftarrow b - s \sum_{i=\min\{k',k\}+1}^{\max\{k',k\}} (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 9: 更新 $k \leftarrow k'$;

Step 10: 查找 k' , 使其满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$;

Step 11: end while;

Step 12: 返回 $\bar{c} = a/b$ 和 $R = k$.

2 EKM 法的改进

在 EKM 法中, 查找满足条件的 k' 时, 总是从下标为 1 开始向上搜索, 这样使得每次迭代过程的比较时间较长; 同时, EKM 法的初始化方法不够完善. 针对这些不足, 本文对 EKM 法进行改进, 提出一种新的改进 EKM 法用于降型处理. 首先给出区间二型模糊集的几个重要性质.

2.1 区间二型模糊集的性质

性质 1 对于一给定的正整数 k , 如果 $x_k > \underline{c}(k)$, 则 $k > L$.

证明 用反证法证明. 假设对于一给定的正整数 k , 如果 $x_k > \underline{c}(k)$, 则有 $k \leq L$ 成立.

1) 如果 $k = L$, 则有 $x_k = x_L$, 由式 (6) 可知, $x_k = x_L \leq \underline{c} = \underline{c}(L)$, 其与已知条件 $x_k > \underline{c}(k)$ 相矛盾.

2) 如果 $k < L$, 则由 1.2 节可知 $x_k < x_L$, 由式 (6) 可知 $x_k < x_L \leq \underline{c} = \underline{c}(L)$. 又因为 $\underline{c}(L)$ 是 $\underline{c}(k)$ 的最小值, 则有 $\underline{c}(L) \leq \underline{c}(k)$, 所以可得 $x_k \leq \underline{c}(k)$, 其与已知条件 $x_k > \underline{c}(k)$ 相矛盾.

综上所述, 对于一给定的正整数 k , 如果 $x_k > \underline{c}(k)$, 则 $k > L$. \square

性质 2 对于一给定的正整数 k , 如果 $x_{k+1} \leq \underline{c}(k)$, 则 $k < L$.

证明 首先假设对于一给定的正整数 k , 如果 $x_{k+1} \leq \underline{c}(k)$, 则有 $k \geq L$ 成立. 若要证明该假设不成立, 则需要证明当 $k \geq L$ 时, 有 $x_{k+1} > \underline{c}(k)$ 成立. 下面利用归纳法进行证明.

1) 如果 $k = L$, 则有 $x_{k+1} = x_{L+1}$, 由式 (6) 可知, 有 $x_{k+1} > \underline{c}(k) = \underline{c}(L)$ 成立.

2) 假设 $\underline{c}(k) < x_{k+1}$ 成立, 令

$$a = \sum_{i=1}^k x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \underline{f}(x_i),$$

$$b = \sum_{i=1}^k \bar{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \underline{f}(x_i),$$

$$\Delta = \bar{f}(x_{k+1}) - \underline{f}(x_{k+1}),$$

则有

$$\underline{c}(k) = \frac{a}{b} < x_{k+1} = \frac{x_{k+1}\Delta}{\Delta}, \quad (8)$$

$$\frac{a + x_{k+1}\Delta}{b + \Delta} < x_{k+1}. \quad (9)$$

又因

$$\frac{a + x_{k+1}\Delta}{b + \Delta} = \underline{c}(k+1), \quad (10)$$

且 $x_{k+1} < x_{k+2}$, 所以由式 (9) 可知, $\underline{c}(k+1) < x_{k+2}$ 成立.

由 1) 和 2) 可知, 如果 $k \geq L$, 则有 $x_{k+1} > \underline{c}(k)$ 成立, 这与原假设已知条件 $x_{k+1} \leq \underline{c}(k)$ 相矛盾. 因此可得对于一给定的正整数 k , 如果 $x_{k+1} \leq \underline{c}(k)$, 则 $k < L$. \square

性质 3 对于一给定的正整数 k , 如果 $x_k > \bar{c}(k)$, 则 $k > R$.

性质 3 的证明过程与性质 2 的证明相似, 此略.

性质 4 对于一给定的正整数 k , 如果 $x_{k+1} \leq \bar{c}(k)$, 则 $k < R$.

性质 4 的证明与性质 1 的证明相似, 此略.

2.2 新的改进 EKM 法

在算法 1 中, 左切换点的初始化条件为 $k = [N/2.4]$, 其中 $[N/2.4]$ 在数学意义上表示不超过 $N/2.4$ 的最大整数, 这与算法 1 中表示最靠近 $N/2.4$ 的整数不一致; 而且, 当 N 分别等于 6、18、30、42、54、66 时, 对应的 $N/2.4$ 等于 2.5、7.5、12.5、17.5、22.5、27.5. 则据算法 1 可知, 对应的 $[N/2.4]$ 的值可能为 2 或 3、7 或 8、12 或 13、17 或 18、22 或 23、27 或 28, 即 $[N/2.4]$ 的值不能确定. 为此, 本文将 EKM 法中算法 1 和算法 2 的切换点的初始化条件改为

$$k = \text{Round}(N/2.4, 0), \quad (11)$$

$$k = \text{Round}(N/1.7, 0), \quad (12)$$

其中 $\text{Round}(x, 0)$ 表示对 x 进行四舍五入取整, 可简称为 $\text{Round}(x)$. 则式 (11) 和 (12) 可分别写成

$$k = \text{Round}(N/2.4), \quad (13)$$

$$k = \text{Round}(N/1.7). \quad (14)$$

此时, 式 (13) 和 (14) 可以保证初始值为一确定值.

同时, 在 EKM 算法中, 查找满足条件的 k' 时, 总是从下标为 1 开始向上搜索, 这样使得每次迭代过程

的比较时间较长. 为此 Wu 等^[17]提出了改进的 EKM 法并取得了一定的效果, 但该算法的比较时间仍然较长. 因此, 本文据区间二型模糊集本身特性, 对 EKM 法的查找切换点的方法进行了改进, 从当前值开始查找, 向上或向下搜索以找到满足条件的 k' .

通过对 EKM 法的初始条件和查找切换点的方法等两处改进, 形成了一种新的改进 EKM 法, 该方法可实现向上和向下搜索, 并减少了计算时的比较次数, 其基本算法如后面的算法 3 和算法 4 所示. 下面对新的改进 EKM 法进行详细说明.

1) 计算 \underline{c} . 首先按式 (13) 对 k 进行初始化, 然后查找满足条件的 k' . 为了减少比较时间, 在查找 k' 时先将当前值 $\underline{c}(k)$ 与 x_k 和 x_{k+1} 进行比较, 可能有 $x_k > \underline{c}(k)$ 、 $x_{k+1} \leq \underline{c}(k)$ 、 $x_k \leq \underline{c}(k) < x_{k+1}$ 三种情况.

① 当 $x_k > \underline{c}(k)$ 时, 由性质 1 可知 $k > L$. 此时判断当前值 $\underline{c}(k)$ 与 $x_{\text{Round}(k/2)}$ 和 $x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 的关系, 可能有 $x_{\text{Round}(k/2)} > \underline{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}(k/2)+1} \leq \underline{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}(k/2)} \leq \underline{c}(k) < x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 三种情形.

i) 当 $x_{\text{Round}(k/2)} > \underline{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}(k/2) - 1$ 开始向下搜索至 1, 以查找满足 $x_{k'} \leq \underline{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

ii) 当 $x_{\text{Round}(k/2)+1} \leq \underline{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}(k/2) + 1$ 开始向上搜索至 $k - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq \underline{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

iii) 当 $x_{\text{Round}(k/2)} \leq \underline{c}(k) < x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 时, $L = \text{Round}(k/2)$.

② 当 $x_{k+1} \leq \underline{c}(k)$ 时, 由性质 2 可知 $k < L$. 此时判断当前值与 $x_{\text{Round}((k+N)/2)}$ 和 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 的关系, 可能有 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} > \underline{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1} \leq \underline{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} \leq \underline{c}(k) < x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 三种情形.

i) 当 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} > \underline{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}((k+N)/2) - 1$ 开始向下搜索至 $k + 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq \underline{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

ii) 当 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1} \leq \underline{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}((k+N)/2) + 1$ 开始向上搜索至 $N - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq \underline{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

iii) 当 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} \leq \underline{c}(k) < x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 时, $L = \text{Round}((k+N)/2)$.

③ 当 $x_k \leq \underline{c}(k) < x_{k+1}$ 时, $L = k$.

本文所提出的用于计算 \underline{c} 的算法如算法 3 所示.

算法 3 利用新的改进 EKM 法计算 \underline{c} .

Step 1: 设 $k = \text{Round}(N/2.4)$;

Step 2: 计算

$$a = \sum_{i=1}^k x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \underline{f}(x_i);$$

Step 3: 计算

$$b = \sum_{i=1}^k \bar{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \underline{f}(x_i);$$

Step 4: 如果 $x_k > a/b$ 且 $x_{\text{Round}(k/2)} > a/b$ 时, 则转 Step 5;

Step 5: 从 $\text{Round}(k/2) - 1$ 开始向下搜索至 1, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 6: 如果 $x_k > a/b$ 且 $x_{\text{Round}(k/2)+1} \leq a/b$ 时, 则转 Step 7;

Step 7: 从 $\text{Round}(k/2) + 1$ 开始向上搜索至 $k - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 8: 如果 $x_k > a/b$ 且 $x_{\text{Round}(k/2)} \leq a/b < x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 时, 则转 Step 9;

Step 9: 返回 $\underline{c} = a/b$, $L = \text{Round}(k/2)$, 转 Step 18;

Step 10: 如果 $x_{k+1} \leq a/b$ 且 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} > a/b$ 时, 则转 Step 11;

Step 11: 从 $\text{Round}((k+N)/2) - 1$ 开始向下搜索至 $k + 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 12: 如果 $x_{k+1} \leq a/b$ 且 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1} \leq a/b$ 时, 则转 Step 13;

Step 13: 从 $\text{Round}((k+N)/2) + 1$ 开始向上搜索至 $N - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 14: 如果 $x_{k+1} \leq a/b$ 且 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} \leq a/b < x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 时, 则转 Step 15;

Step 15: 返回 $\underline{c} = a/b$ 和 $L = \text{Round}((k+N)/2)$, 转 Step 18;

Step 16: 如果 $x_k \leq a/b < x_{k+1}$ 时, 则转 Step 17;

Step 17: 返回 $\underline{c} = a/b$ 和 $L = k$, 转 Step 18;

Step 18: 计算 $s = \text{sign}(k' - k)$;

Step 19: 更新

$$a \leftarrow a + s \sum_{i=\min\{k',k\}+1}^{\max\{k',k\}} x_i (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 20: 更新

$$b \leftarrow b + s \sum_{i=\min\{k',k\}+1}^{\max\{k',k\}} (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 21: 更新 $k \leftarrow k'$;

Step 22: 从 k 开始向下搜索至 1, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' ;

Step 23: while $k' \neq k$;

Step 24: 更新

$$a \leftarrow a - \sum_{i=k'+1}^k x_i (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 25: 更新

$$b \leftarrow b - \sum_{i=k'+1}^k (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 26: 更新 $k \leftarrow k'$;

Step 27: 从 k 开始向下搜索至 1, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' ;

Step 28: end while;

Step 29: 返回 $\underline{c} = a/b$ 和 $L = k$, 终止计算.

至此, 完成了 \underline{c} 的计算.

2) 计算 \bar{c} . 首先按式 (14) 对 k 进行初始化, 然后查找满足条件的 k' . 为了减少比较时间, 在查找 k' 时先将当前值 $\bar{c}(k)$ 与 x_k 和 x_{k+1} 进行比较, 可能有 $x_k > \bar{c}(k)$ 、 $x_{k+1} \leq \bar{c}(k)$ 、 $x_k \leq \bar{c}(k) < x_{k+1}$ 三种情况.

① 当 $x_k > \bar{c}(k)$ 时, 由性质 3 可知 $k > R$. 此时判断当前值 $\bar{c}(k)$ 与 $x_{\text{Round}(k/2)}$ 和 $x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 的关系, 可能有 $x_{\text{Round}(k/2)} > \bar{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}(k/2)+1} \leq \bar{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}(k/2)} \leq \bar{c}(k) < x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 三种情形.

i) 当 $x_{\text{Round}(k/2)} > \bar{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}(k/2) - 1$ 开始向下搜索至 1, 以查找满足 $x_{k'} \leq \bar{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

ii) 当 $x_{\text{Round}(k/2)+1} \leq \bar{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}(k/2) + 1$ 开始向上搜索至 $k - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq \bar{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

iii) 当 $x_{\text{Round}(k/2)} \leq \bar{c}(k) < x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 时, $R = \text{Round}(k/2)$.

② 当 $x_{k+1} \leq \bar{c}(k)$ 时, 由性质 4 可知 $k < R$. 此时判断当前值与 $x_{\text{Round}((k+N)/2)}$ 和 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 的关系, 可能有 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} > \bar{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1} \leq \bar{c}(k)$ 、 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} \leq \bar{c}(k) < x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 三种情形.

i) 当 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} > \bar{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}((k+N)/2) - 1$ 开始向下搜索至 $k + 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq \bar{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

ii) 当 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1} \leq \bar{c}(k)$ 时, 从 $\text{Round}((k+N)/2) + 1$ 开始向上搜索至 $N - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq \bar{c}(k) < x_{k'+1}$ 的 k' ;

iii) 当 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} \leq \bar{c}(k) < x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 时, $R = \text{Round}((k+N)/2)$.

③ 当 $x_k \leq \bar{c}(k) < x_{k+1}$ 时, $R = k$.

本文所提出的用于计算 \bar{c} 的算法如算法 4 所示.

算法 4 利用新的改进 EKM 法计算 \bar{c} .

Step 1: 设 $k = \text{Round}(N/1.7)$;

Step 2: 计算

$$a = \sum_{i=1}^k x_i \underline{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \bar{f}(x_i);$$

Step 3: 计算

$$b = \sum_{i=1}^k \underline{f}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \bar{f}(x_i);$$

Step 4: 如果 $x_k > a/b$ 且 $x_{\text{Round}(k/2)} > a/b$ 时, 则转 Step 5;

Step 5: 从 $\text{Round}(k/2) - 1$ 开始向下搜索至 1, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 6: 若 $x_{\text{Round}(k/2)+1} \leq a/b < x_k$, 则转 Step 7;

Step 7: 从 $\text{Round}(k/2) + 1$ 开始向上搜索至 $k - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 8: 如果 $x_k > a/b$ 且 $x_{\text{Round}(k/2)} \leq a/b < x_{\text{Round}(k/2)+1}$ 时, 则转 Step 9;

Step 9: 返回 $\bar{c} = a/b$, $R = \text{Round}(k/2)$, 转 Step 18;

Step 10: 如果 $x_{k+1} \leq a/b$ 且 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} > a/b$ 时, 则转 Step 11;

Step 11: 从 $\text{Round}((k+N)/2) - 1$ 开始向下搜索至 $k + 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 12: 如果 $x_{k+1} \leq a/b$ 且 $x_{\text{Round}((k+N)/2)+1} \leq a/b$ 时, 则转 Step 13;

Step 13: 从 $\text{Round}((k+N)/2) + 1$ 开始向上搜索至 $N - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' , 转 Step 18;

Step 14: 如果 $x_{k+1} \leq a/b$ 且 $x_{\text{Round}((k+N)/2)} \leq a/b < x_{\text{Round}((k+N)/2)+1}$ 时, 则转 Step 15;

Step 15: 返回 $\bar{c} = a/b$ 和 $R = \text{Round}((k+N)/2)$, 转 Step 18;

Step 16: 如果 $x_k \leq a/b < x_{k+1}$ 时, 则转 Step 17;

Step 17: 返回 $\bar{c} = a/b$ 和 $R = k$, 转 Step 18;

Step 18: 计算 $s = \text{sign}(k' - k)$;

Step 19: 更新

$$a \leftarrow a - s \sum_{i=\min\{k',k\}+1}^{\max\{k',k\}} x_i (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 20: 更新

$$b \leftarrow b - s \sum_{i=\min\{k',k\}+1}^{\max\{k',k\}} (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 21: 更新 $k \leftarrow k'$;

Step 22: 从 k 开始向上搜索至 $N - 1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' ;

Step 23: while $k' \neq k$;

Step 24: 更新

$$a \leftarrow a - \sum_{i=k+1}^{k'} x_i (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 25: 更新

$$b \leftarrow b - \sum_{i=k+1}^{k'} (\bar{f}(x_i) - \underline{f}(x_i));$$

Step 26: 更新 $k \leftarrow k'$;

Step 27: 从 k 开始向上搜索至 $N-1$, 以查找满足 $x_{k'} \leq a/b < x_{k'+1}$ 的 k' ;

Step 28: end while;

Step 29: 返回 $\bar{c} = a/b$ 和 $R = k$, 终止计算.

下面给出一个例子来说明新的改进 EKM 法与 EKM 法和改进 EKM 法不同. 假设 \tilde{A} 为集合 X 上的二型模糊集, 其中 $X = \{x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 10\}$. 其对应的区间分别为

$$[\underline{f}(x_1), \bar{f}(x_1)] = [0.1083, 0.1191],$$

$$[\underline{f}(x_2), \bar{f}(x_2)] = [0.4852, 0.5337],$$

$$[\underline{f}(x_3), \bar{f}(x_3)] = [0.8000, 0.8800],$$

$$[\underline{f}(x_4), \bar{f}(x_4)] = [0.4852, 0.5337],$$

$$[\underline{f}(x_5), \bar{f}(x_5)] = [0.1213, 0.1456],$$

$$[\underline{f}(x_6), \bar{f}(x_6)] = [0.0271, 0.0325].$$

由上可知 $N = 6$. 下面给出用 EKM 法、改进 EKM 法和新的改进 EKM 法计算 \underline{c} 和 \bar{c} 的不同.

1) EKM 法计算如下.

① 计算 \underline{c} .

首先对 k 进行初始化, 得 $k = [N/2.4] = [6/2.4] = 2$, 则有

$$a = \sum_{i=1}^2 x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=3}^6 x_i \underline{f}(x_i) = 8.4200,$$

$$b = \sum_{i=1}^2 \bar{f}(x_i) + \sum_{i=3}^6 \underline{f}(x_i) = 2.0864.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.0357 < x_4$, 则有 $k' = 3$. 此时进行 4 次比较, 分别是 a/b 与 x_1, x_2, x_3, x_4 进行比较. 因 $k' > k$, 故 $s = 1$. 此时进行一次迭代, a, b 和 k 分别更新为

$$a = 8.4200 + x_3(\bar{f}(x_3) - \underline{f}(x_3)) = 8.7400,$$

$$b = 2.0864 + (\bar{f}(x_3) - \underline{f}(x_3)) = 2.1664,$$

$$k = 3.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.0343 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 4 次比较, 分别是 a/b 与 x_1, x_2, x_3, x_4 进行比较. 因 $k' = k = 3$, 故 $\underline{c} = 4.0343, L = 3$, 终止计算.

② 计算 \bar{c} .

首先对 k 进行初始化, 得 $k = [N/1.7] = [6/1.7] = 4$, 则有

$$a = \sum_{i=1}^4 x_i \underline{f}(x_i) + \sum_{i=5}^6 x_i \bar{f}(x_i) = 8.5714,$$

$$b = \sum_{i=1}^4 \underline{f}(x_i) + \sum_{i=5}^6 \bar{f}(x_i) = 2.0568.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.1673 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时

进行 4 次比较, 分别是 a/b 与 x_1, x_2, x_3, x_4 进行比较. 因 $k' < k$, 故 $s = -1$. 此时进行一次迭代, a, b 和 k 分别更新为

$$a = 8.5714 + x_4(\bar{f}(x_4) - \underline{f}(x_4)) = 8.8624,$$

$$b = 2.0568 + (\bar{f}(x_4) - \underline{f}(x_4)) = 2.1053,$$

$$k = 3.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.2096 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 4 次比较, 分别是 a/b 与 x_1, x_2, x_3, x_4 进行比较. 因 $k' = k = 3$, 故 $\bar{c} = 4.2096, R = 3$, 终止计算.

利用 EKM 法计算 \underline{c} 和 \bar{c} 共需比较次数为 $4 + 4 + 4 + 4 = 16$.

2) 改进 EKM 法计算如下.

① 计算 \underline{c} .

首先对 k 进行初始化, 得 $k = [N/2.4] = [6/2.4] = 2$, 则有

$$a = \sum_{i=1}^2 x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=3}^6 x_i \underline{f}(x_i) = 8.4200,$$

$$b = \sum_{i=1}^2 \bar{f}(x_i) + \sum_{i=3}^6 \underline{f}(x_i) = 2.0864.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.0357 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' > k$, 故 $s = 1$. 此时进行一次迭代, a, b 和 k 分别更新为

$$a = 8.4200 + x_3(\bar{f}(x_3) - \underline{f}(x_3)) = 8.7400,$$

$$b = 2.0864 + (\bar{f}(x_3) - \underline{f}(x_3)) = 2.1664,$$

$$k = 3.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.0343 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' = k = 3$, 故 $\underline{c} = 4.0343, L = 3$, 终止计算.

② 计算 \bar{c} .

首先对 k 进行初始化, 得 $k = [N/1.7] = [6/1.7] = 4$, 则有

$$a = \sum_{i=1}^4 x_i \underline{f}(x_i) + \sum_{i=5}^6 x_i \bar{f}(x_i) = 8.5714,$$

$$b = \sum_{i=1}^4 \underline{f}(x_i) + \sum_{i=5}^6 \bar{f}(x_i) = 2.0568.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.1673 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' < k$, 故 $s = -1$. 此时进行一次迭代, a, b 和 k 分别更新为

$$a = 8.5714 + x_4(\bar{f}(x_4) - \underline{f}(x_4)) = 8.8624,$$

$$b = 2.0568 + (\bar{f}(x_4) - \underline{f}(x_4)) = 2.1053,$$

$$k = 3.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.2096 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' = k =$

3, 故 $\bar{c} = 4.2096, R = 3$, 终止计算.

利用改进 EKM 法计算 \underline{c} 和 \bar{c} 共需比较次数为 $2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

3) 新的改进 EKM 法计算如下.

① 计算 \underline{c} .

首先对 k 进行初始化, 得 $k = \text{Round}(N/2.4) = \text{Round}(6/2.4) = 3$, 则有

$$a = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{f}(x_i) + \sum_{i=4}^6 x_i \underline{f}(x_i) = 8.7400,$$

$$b = \sum_{i=1}^3 \bar{f}(x_i) + \sum_{i=4}^6 \underline{f}(x_i) = 2.1664.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.0343 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' = k = 3$, 故 $\underline{c} = 4.0343, L = 3$, 终止计算.

② 计算 \bar{c} .

首先对 k 进行初始化, 得 $k = \text{Round}(N/1.7) = \text{Round}(6/1.7) = 4$, 则有

$$a = \sum_{i=1}^4 x_i \underline{f}(x_i) + \sum_{i=5}^6 x_i \bar{f}(x_i) = 8.5714,$$

$$b = \sum_{i=1}^4 \underline{f}(x_i) + \sum_{i=5}^6 \bar{f}(x_i) = 2.0568.$$

由于 $x_{\text{Round}(4/2)+1} \leq a/b = 4.1673 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' < k$, 故 $s = -1$. 此时进行一次迭代, a, b 和 k 分别更新为

$$a = 8.5714 + x_4(\bar{f}(x_4) - \underline{f}(x_4)) = 8.8624,$$

$$b = 2.0568 + (\bar{f}(x_4) - \underline{f}(x_4)) = 2.1053,$$

$$k = 3.$$

由于 $x_3 \leq a/b = 4.2096 < x_4$, 有 $k' = 3$. 此时进行 2 次比较, 分别是 a/b 与 x_3, x_4 进行比较. 因 $k' = k = 3$, 故 $\bar{c} = 4.2096, R = 3$, 终止计算.

利用新的改进 EKM 法计算 \underline{c} 和 \bar{c} 共需比较次数为 $2 + 2 + 2 = 6$.

由以上 3 种方法对质心的计算可知, 改进 EKM 法和新的改进 EKM 法的比较量均小于 EKM 法, 且新的改进 EKM 法的比较量最小.

3 仿真实验

为了验证新的改进 EKM 法的性能, 利用 Matlab R2009a 进行仿真, 其中计算机的处理器为 1.86 GHz, 内存为 0.99 GB. 因为 \underline{c} 和 \bar{c} 的计算相近, 所以在仿真实验中只考虑 \underline{c} 的计算.

首先选取定义域 X 为 $[0, 1]$, 在定义域内均匀采样 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 采样数为 N, N 有 54 个值, 即 $N \in \{3, 4, 5, \dots, 19, 20, 25, 30, \dots, 195, 200\}$. 对于每

一个 N 值, 利用 Matlab 函数 `rand(1000, 2)` 产生 1000 对 $\{f(x_i), \bar{f}(x_i)\}$, 并保证 $\underline{f}(x_i) \leq \bar{f}(x_i)$, 如果 $\underline{f}(x_i) > \bar{f}(x_i)$, 则将二者值进行互换. 对于每个 N 计算 1000 次, 以求取计算 \underline{c} 时所需的平均时间. 为了验证新的改进 EKM 法的有效性, 分别利用 EKM 法、改进 EKM 法 (IEKM) 和新的改进 EKM 法 (Novel IEKM) 计算 \underline{c} , 其所需平均时间如图 1 所示.

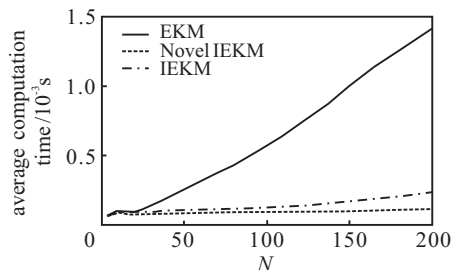


图 1 利用不同方法计算 \underline{c} 的平均时间

由图 1 可知, 对于不同的计算方法而言, 随着 N 的不断增大, 计算时间均增大. 而且, 新的改进 EKM 法所需计算时间增长速度最慢, EKM 法的增长速度最快. 对于相同的 N 而言, 新的改进 EKM 法计算时间最短, EKM 法计算时间最长, 改进 EKM 法介于二者之间.

新的改进 EKM 法相对于 EKM 法和改进 EKM 法所减少的时间百分比如图 2 所示, 减少的时间百分比为 $100\% \times (t_o - t_n)/t_o$. 其中: t_o 为 EKM 法或改进 EKM 法的平均计算时间, t_n 为新的改进 EKM 法的平均计算时间. 由图 2 可知, 相对于 EKM 法和改进 EKM 法, 新的改进 EKM 法的减少的时间百分比随着 N 的增大而增大. 当 $N \in [3, 200]$ 时, 新的改进 EKM 法的平均计算时间相对于 EKM 法和改进 EKM 法分别减少了 $[11\%, 91\%]$ 和 $[5.2\%, 50\%]$.

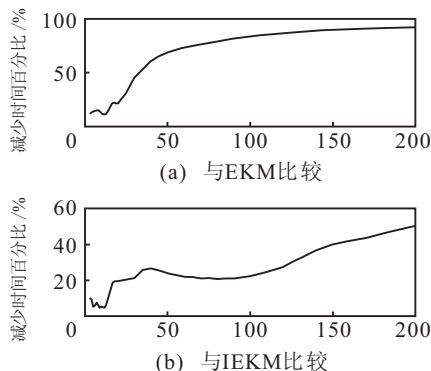


图 2 新的改进 EKM 法相对于 EKM 法或改进 EKM 法的减少时间百分比

由图 1 和图 2 可知, 与 EKM 法和改进 EKM 法相比, 新的改进 EKM 法计算时间最短, 可大大减少计算 \underline{c} 的时间, 即新的改进 EKM 法可有效降低降型成本.

当选取二型模糊集 \tilde{A} 的定义域 X 为 $[0, 10]$, 在定义域内均匀采样, $N = 100$ 时, 上隶属度函数和下隶属度函数分别为

$$\bar{f}(x) = \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{8}\right),$$

$$\underline{f}(x) = 0.5 \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2}\right).$$

利用 EKM 法、改进 EKM 法 (IEKM) 和新的改进 EKM 法 (Novel IEKM) 计算 \underline{c} , 其结果如表 1 所示.

表 1 利用不同方法计算 \underline{c} 的结果

方法	L	\underline{c}	t/s
EKM 法	24	1.6193	0.0017
IEKM 法	24	1.6193	5.8674×10^{-4}
Novel IEKM 法	24	1.6193	5.3787×10^{-4}

由表 1 可知, 利用 3 种方法均可获得相同的结果, $L = 24$, $\underline{c} = 1.6193$, 其中新的改进 EKM 法计算时间最短.

从图 1、图 2 和表 1 可知, 与 EKM 法和改进 EKM 法相比, 随着 N 的增加, 新的改进 EKM 法的计算时间增长速度最慢、计算时间最短、计算效率最高, 可有效降低降型成本.

4 结 论

本文利用区间二型模糊集的特性对 EKM 法进行改进, 形成了一种新的改进 EKM 降型方法. 所提出的新的改进 EKM 法相对于 EKM 法和改进的 EKM 法, 计算量最小. 仿真实验验证了新的改进 EKM 法的有效性, 所涉及的计算量大大减小, 迭代速度加快, 降型更有效.

参考文献(References)

- [1] Molina-Lozano H. A new fast fuzzy Cocke-Younger-Kasami algorithm for DNA strings analysis[J]. *Int J of Machine Learning and Cybernetics*, 2011, 2(3): 209-218.
- [2] Wang X Z, He Y L, Dong L C, et al. Particle swarm optimization for determining fuzzy measures from data[J]. *Information Science*, 2011, 181(19): 4230-4252.
- [3] Wu J, Wang S T, Chung F L. Positive and negative fuzzy rule system, extreme learning machine and image classification[J]. *Int J of Machine Learning and Cybernetics*, 2011, 2(4): 261-271.
- [4] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I[J]. *Information Science*, 1975, 8(3): 199-249.
- [5] Hagrais H. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2004, 12(4): 524-539.
- [6] Lin F J, Chou P H. Adaptive control of two-axis motion control system using interval type-2 fuzzy neural network[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2009, 56(1): 178-193.
- [7] Melin P, Mendoza O, Castillo O. An improved method for edge detection based on interval type-2 fuzzy logic[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(12): 8527-8535.
- [8] Choi Byung-In, Frank Chung-Hoon Rhee. Interval type-2 fuzzy membership function generation methods for pattern recognition[J]. *Information Science*, 2009, 179(13): 2102-2122.
- [9] Lucas L A, Centeno T M, Delgado M R. Land cover classification based on general type-2 fuzzy classifiers[J]. *Int J of Fuzzy Systems*, 2008, 10(3): 207-216.
- [10] Zeng J, Liu Z Q. Type-2 fuzzy Markov random fields and their application to handwritten Chinese character recognition[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2008, 16(3): 747-760.
- [11] Zarandi M F, Rezaee B, Turksen I, et al. A type-2 fuzzy rulebased expert system model for stock price analysis[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(1): 139-154.
- [12] Lee Chang-Shing, Wang Mei-Hui, Hagrais Hani. A type-2 fuzzy ontology and its application to personal diabetic-diet recommendation[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2010, 18(2): 374-395.
- [13] Liu F. An efficient centroid type-reduction strategy for general type-2 fuzzy logic system[J]. *Information Science*, 2008, 178(9): 2224-2236.
- [14] Coupland S, John R. A fast geometric method for defuzzification of type-2 fuzzy sets[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2008, 16(4): 929-941.
- [15] Lucas L, Centeno T, Delgado M. General type-2 fuzzy inference systems: Analysis, design and computational aspects[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*. London, 2007: 1-6.
- [16] Tan W W, Wu D. Design of type-reduction strategies for type-2 fuzzy logic systems using genetic algorithms[J]. *Advances in Evolutionary Computing for System Design*, 2007, 66(8): 169-187.
- [17] Wu Hsin-Jung, Su Yao-Lung, Lee Shie-Jue. A fast method for computing the centroid of a type-2 fuzzy set[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2012, 42(3): 764-777.
- [18] Wu Dongrui, Jerry M Mendel. Enhanced Karnik-Mendel algorithms[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2009, 17(4): 923-934.