

内充气体与外部膜材的共同作用理论模型¹⁾

李 鹏²⁾ 杨庆山

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要 将充气膜结构内充气体假定为势流, 推导得到速度势表示的内充气体小幅波动方程, 并采用 Galerkin 法离散得到内充气体的有限元动力学方程. 引入界面协调条件, 建立了内充气体结点速度势与外部膜材结点位移的关系, 然后联立薄膜动力方程和气体动力学方程得到充气膜系统内充气体与外部膜材的共同作用理论模型. 在该理论模型基础上, 建立了两类典型充气结构的数值模型进行分析, 通过将数值结果与试验结果对比, 验证了共同作用理论模型的准确性和合理性.

关键词 充气膜结构, 势流, 内充气体, 共同作用, 动力方程

中图分类号: TU353 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-13-019

引 言

所谓充气膜结构就是通过向密闭的柔性膜材内部充入一定压力的空气所形成的具有一定形状和刚度的结构体系, 它包括气承式和气枕式 2 种形式. 气承式膜结构为单层膜结构, 使用膜材对建筑空间整体覆盖、封闭, 并通过风机不间断送风形成室内外压差以承受载荷. 气枕式膜结构属于双层或多层膜结构, 它通过在主体钢构架的网格内安装 ETFE 气枕来实现.

相比张拉式膜结构而言, 载荷作用下充气膜结构在某一位置的平衡态是外载荷、膜内应力及内充气体压力三者的平衡, 其平衡方程中增加了内压项. 因此, 如何考虑内充气体的作用是充气膜结构静、动力分析的重点和难点. 静力问题方面: 学者们最初常将内充气体等效为一个压力常量进行分析, 这与真实情况有所不符; Bonet 等^[1] 基于最小势能原理将充气膜结构体系的等效刚度表示为薄膜材料刚度和应力刚度与内充气体气承刚度 3 个分量的叠加, 首次引入玻义耳定律来考虑内压和气承刚度的变化; 文献 [2-5] 将计算气枕体积和内压的子程序嵌入到 ANSYS 计算子步中以考虑内压变化的影响; 陈务军等^[6] 建议: 使用 EasyVol. 进行气枕载荷分析时, 应将 PV 不变作为约束条件, 若将 P 不变设为约束条件会引起计算失真; 吴明儿等^[7]、顾磊等^[8] 分别完

成了正六边形和方形 ETFE 气枕的形态测试和充气加压测试, 验证了有限元分析方法的准确性. 动力问题方面: 尽管在土木工程领域充气膜结构的动力分析尚处于起步阶段, 但国外学者已在航天工程领域展开了一系列太空充气结构的动力测试和有限元分析研究. Inman 团队^[9-11] 自 2001 年起先后对一类太空充气圆环展开了动力特性测试和有限元分析研究, 研究表明充气圆环的振动形式包括平面内、外的弯曲模态和壳模态; Smalley 等^[12] 对一类充气圆管进行模态分析时首次在壳单元上加入了附加质量以考虑管内封闭气体的质量效应; 在上述基础上, Srivastava 等^[13] 又进一步引入声学单元模拟封闭气体, 在 ANSYS 中建立了充气环的流固耦合模型进行模态分析和谐响应分析, 研究发现封闭气体对结构的动力特性影响显著.

总结已有研究成果, 国内外学者们主要采用以下 3 种方式来考虑内充气体的作用:

(1) 载荷作用下将内充气体视为常压力: 该方法将内压作为载荷施加于膜材内表面, 这样做能够简化分析过程并在一定程度上考虑内充气体压力对结构刚度的贡献, 但无法考虑充气膜体积改变引起的内压变化; 此外, 对于气枕式膜结构而言, 该方法仅能得到载荷直接作用的上层膜面的应力和变形, 无法建立上下层膜面的相互作用关系.

(2) 载荷作用下将内充气体视为变化压力, 引入

2012-01-21 收到第 1 稿, 2013-03-27 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重大研究计划资助项目 (90815021, 91215302).

2) 李鹏, 博士生, 主要研究方向: 膜结构抗风. E-mail: 09115284@bjtu.edu.cn

玻意耳定律来建立内充气体体积和压力的关系:该方法将数值法和解析法结合,考虑了内充气体压力变化对分析结果的影响,能够更为真实地模拟内充气体的作用;然而,由于该方法操作复杂且不能考虑内充气体的质量效应,目前仅用于充气膜结构的静力分析,不宜用于动力计算。

(3) 除考虑压力影响外,在动力分析中进一步考虑内充气体的质量效应:具体实现方法为在壳单元上均布附加质量块或者建立封闭气体的有限元模型。然而,这两种方法在静力问题中的适用性尚需验证。

为了更加真实、准确地模拟内充气体的作用,建立能同时满足静、动力分析的充气膜结构有限元模型,本文将内充气体假定为势流,结合界面协调条件建立了充气膜外部膜材和内充气体共同作用的理论模型。在此基础上,使用 ADINA 程序建立了两类典型充气膜结构的共同作用有限元模型,验证共同作用理论模型的正确性。

1 充气膜结构系统的共同作用理论模型

1.1 外部膜材平衡方程

1.1.1 张拉膜的单元静力平衡方程

膜结构在载荷作用下应变较小,但位移较大,具有几何非线性。对于此类结构,其几何关系和平衡方程都将是非线性的,需要选定一定的参考构形建立增量格式的平衡方程。张拉膜结构在整体坐标系下的单元平衡方程为^[14]

$$(\mathbf{K}_L^{(e)} + \mathbf{K}_{NL}^{(e)})\Delta \mathbf{u}_e = \mathbf{F}^{(e)} - \mathbf{F}_0^{(e)} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{K}_L^{(e)} = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \mathrm{d}v$ 为单元线性刚度矩阵,与材料弹性模量有关; $\mathbf{K}_{NL}^{(e)} = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} \mathrm{d}v$ 为单元非线性刚度矩阵,与初始应力有关; $\Delta \mathbf{u}_e$ 为单元结点位移增量矢量; $\mathbf{F}^{(e)} = \int_V \mathbf{N}_S^T p \mathrm{d}v + \int_A \mathbf{N}_S^T q \mathrm{d}A$ 为单元外载荷结点力矢量; $\mathbf{F}_0^{(e)} = \int_V \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}v$ 为单元初应力结点力矢量; \mathbf{D} 和 \mathbf{M} 分别为膜单元的本构关系矩阵和柯西应力矩阵; \mathbf{B}_L 和 \mathbf{G} 分别为单元线性和非线性应变增量与位移增量的关系矩阵; \mathbf{N}_S 为膜单元的形函数矩阵; p 和 q 分别为单元上的体力和面力密度; $\boldsymbol{\sigma}$ 为单元的 Cauchy 应力矢量。

1.1.2 充气膜外部膜材的单元平衡方程

对充气膜结构而言,外部膜材的等效结点力来源于内充气体压力和外载荷的共同作用,故其单元平衡方程可在张拉膜单元平衡方程的基础上得到。

在式 (1) 右端引入内压引起的等效结点力后,得到充气膜结构外部膜材的单元静力平衡方程如下

$$(\mathbf{K}_L^{(e)} + \mathbf{K}_{NL}^{(e)})\Delta \mathbf{u}_e = \mathbf{F}^{(e)} - \mathbf{P}^{(e)} - \mathbf{F}_0^{(e)} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{P}^{(e)}$ 为内充气体压力引起的膜单元等效结点力矢量,规定使膜面产生内法线方向结点位移的等效结点力为正。

在式 (2) 的基础上引入惯性项和阻尼项,可以得到整体坐标系下膜单元的动力平衡方程

$$\mathbf{M}^{(e)}\Delta \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}^{(e)}\Delta \dot{\mathbf{u}}_e + (\mathbf{K}_L^{(e)} + \mathbf{K}_{NL}^{(e)})\Delta \mathbf{u}_e = \mathbf{F}^{(e)} - \mathbf{P}^{(e)} - \mathbf{F}_0^{(e)} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{M}^{(e)}$ 和 $\mathbf{C}^{(e)}$ 分别为膜单元的质量矩阵和阻尼矩阵, $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_e$ 和 $\Delta \dot{\mathbf{u}}_e$ 分别为膜单元的结点加速度和速度增量矢量,其他符号意义不变。

在整体坐标下,对单元动力平衡方程 (3) 进行组装,从而得到充气膜外部膜材的动力平衡方程。与流体方程区分,加入脚标“S”后表示如下

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_{S_L} + \mathbf{K}_{S_{NL}})\mathbf{u} = \mathbf{F}_S - \mathbf{P}_S - \mathbf{F}_{S_0} \quad (4)$$

式中, \mathbf{M}_S 和 \mathbf{C}_S 分别为整个膜面的质量矩阵和阻尼矩阵; \mathbf{K}_{S_L} 和 $\mathbf{K}_{S_{NL}}$ 分别为整个膜面的线性和非线性刚度矩阵; \mathbf{F}_S , \mathbf{P}_S 和 \mathbf{F}_{S_0} 分别为外载荷、内压及初始应力引起的膜面结点力矢量; \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}$ 分别为膜面的结点位移、速度和加速度增量矢量。

1.2 内充气体平衡方程

1.2.1 内充气体的势流假定

在流体动力学中,所谓势流就是指速度场是速度势的梯度的流。由于任何标量场的梯度的旋度都等于 0,故势流中的速度场的旋度也必然为 0,这意味着势流属于无旋流。实际上,势流与无旋流是等价的。由于初始静止的理想(无黏、无热传递)流体的流动始终保持无旋^[15],故从静止开始运动的理想流体属于势流。

充气膜结构的内充气体属于封闭流场,根据内充气体的物理力学特点,可对其作如下假定:(1) 小扰动条件:风载荷作用下,充气膜内充气体受膜面扰动引起的速度很小(远小于声速),可认为满足小扰动条件。(2) 理想无旋流体假定:空气本身黏度很小,热传导性较差,因此本文将充气膜内充气体假定为理想流体。又由于内充气体的初始状态是静止无旋的,故可将之进一步假定为持续无旋的势流。(3) 均匀性

假定: 没有扰动时, 枕内气体在宏观上是静止、均匀的, 各点压力、密度相等. (4) 考虑到空气导热性差、膜材保温隔热性较好及载荷作用的瞬时性, 充气膜内充气体的变化过程可以视为绝热过程, 即气体的压力仅是密度的函数 (与温度无关).

1.2.2 运动微分方程

基于上文的均匀和无黏假定并忽略体力, 一般流体的运动微分方程 (N-S 方程) 可变为

$$\rho \frac{d\dot{u}_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

小扰动条件下, 用 $\Delta\rho + \rho$ 替代上式中的 ρ 后可以得到

$$(\Delta\rho + \rho) \left(\ddot{u}_i + \dot{u}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

式中, $\Delta\rho$ 为扰动引起的密度变化, ρ 为气体扰动前的参考密度 (本文取为标准大气压下空气密度).

又由小扰动条件下 $\Delta\rho$, \dot{u} 和 $\partial\dot{u}/\partial x$ 都是微量, 对上式略去二阶以上微量后可得

$$\ddot{u}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

1.2.3 连续方程

非定常可压缩流体连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\dot{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\dot{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\dot{w})}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

小扰动条件下, 同样用 $\Delta\rho + \rho$ 替代上式中的 ρ 并略去二阶以上微量可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) = 0 \quad (9)$$

当气体受到小扰动时, 压强变化、密度变化与音速存在下列关系

$$\Delta P = C^2 \Delta \rho \quad (10)$$

式中, ΔP 为扰动引起的压力变化, 且 $\Delta P = P' - P$; P' 为扰动后压强, P 为参考压强 (本文取标准大气压强作参考); C 为声音在该气体内的传播速度. 此外有

$$C^2 = \kappa / \rho \quad (11)$$

式中 κ 为气体的体积模量.

由式 (10) 和式 (11) 分别可以导出

$$\Delta \rho = \frac{\Delta P}{C^2}, \quad \rho = \frac{\kappa}{C^2} \quad (12)$$

将式 (12) 代入连续方程 (9), 方程两边同时乘以 C^2 后得到连续方程的另一表达形式

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (13)$$

1.2.4 速度势表示的小幅波动方程

由于充气膜内充气体满足无黏、无旋的假定, 故其构成的封闭流场属于势流体. 对势流体而言, 通常用速度势 $\phi(x, y, z, t)$ 作为唯一的基本场变量, 它与速度分量满足如下关系

$$\dot{u}_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (7) 中, 可以得到

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

再将式 (15) 中的 3 个方程两边分别叠加求和后得到

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} \right) \quad (16)$$

式 (16) 可进一步表示为

$$\nabla P = \rho \nabla \dot{\phi} = \nabla(\rho \dot{\phi}) \quad (17)$$

由式 (17) 可以推得内充气体压力 P 和速度势 ϕ 之间的关系

$$P = \rho \dot{\phi} \quad (18)$$

再将式 (14) 代入连续方程 (13) 得到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (19)$$

最后, 将式 (18) 代入式 (19), 可以得到以速度势为场变量的内充气体小幅波动方程

$$\nabla^2 \phi - \frac{\ddot{\phi}}{C^2} = 0 \quad (20)$$

式 (20) 属于线性微分方程, 仅包含一个未知量, 比非线性的 Navier-Stokes 方程更为有效^[16], 可用于频率分析和基于频率分析的动力问题^[17].

1.2.5 波动方程的有限元形式

对于式 (20) 给出的微分方程, 在三维问题中获得满足各种边界条件的解析解是十分困难的, 可采用 Galerkin 法离散求解. 内充气体任一点的速度势 $\phi^*(x, y, z, t)$ 可近似表示为

$$\phi^*(x, y, z, t) \approx \mathbf{N}_F^T(x, y, z) \phi(t) = \sum_1^M N_i(x, y, z) \phi_i(t) \quad (21)$$

$N_F = [N_1(x, y, z) \ N_2(x, y, z) \ \cdots \ N_M(x, y, z)]^T$ 为整个流体域的形函数矢量; $\phi = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \cdots \ \phi_M(t)]^T$ 为流体域内结点速度势矢量.

此时, 微分方程 (20) 近似满足, 即存在等式

$$\nabla^2 \phi^* - \frac{1}{C^2} \ddot{\phi}^* = R' \tag{22}$$

等式右端 R' 为残量, 在整个内充气区域上应用 Galerkin 方法, 可以得到如下等效积分形式

$$\int_V N_F \left(\nabla^2 \phi^* - \frac{1}{C^2} \ddot{\phi}^* \right) dV = 0 \tag{23}$$

对式 (23) 左端第 1 项进行分部积分, 并根据高斯定理可以导出

$$\int_S N_F \frac{\partial \phi^*}{\partial n} n dS - \int_V \nabla N_F \phi^* dV - \frac{1}{C^2} \int_V N_F \ddot{\phi}^* dV = 0 \tag{24}$$

式中, S 为内充气边界, n 为膜面外单位法线方向, $\partial \phi^* / \partial n$ 是外法线方向导数.

然后, 将式 (21) 代入式 (24) 可以得到结点速度势表示的内充气平衡方程

$$\int_V \nabla N_F \nabla N_F^T \phi dV + \frac{1}{C^2} \int_V N_F N_F^T \ddot{\phi} dV - \int_S N_F \frac{\partial \phi^*}{\partial n} n dS = 0 \tag{25}$$

由于充气膜内充气边界 S 由流固交界面 S_I 与固定边界 S_B 两部分组成, 于是式 (25) 又可以写成

$$\int_V \nabla N_F \nabla N_F^T \phi dV + \frac{1}{C^2} \int_V N_F N_F^T \ddot{\phi} dV - \int_{S_I} N_F \frac{\partial \phi^*}{\partial n} n dS - \int_{S_B} N_F \frac{\partial \phi^*}{\partial n} n dS = 0 \tag{26}$$

根据式 (14) 中流体速度势与速度的关系可知: 对流固交界面上的某一流体质点有 $\nabla \phi^* = (\partial \phi^* / \partial n) \cdot n = -\dot{u}_{fn}^* = \dot{u}_n^*$ (\dot{u}_{fn}^* 表示内充气该点的外法向速度, \dot{u}_n^* 表示膜面上相应点的内法向速度), 该边界条件建立了内充气速度势与外部膜材运动速度之间的联系; 同理, 在固定边界上有等式 $\nabla \phi^* = (\partial \phi^* / \partial n) \cdot n = -\dot{u}_{fn}^* = \dot{u}_n^* = 0$ 成立.

将上述两类边界条件分别代入式 (26) 可得

$$\frac{1}{C^2} \int_V N_F N_F^T \ddot{\phi} dV + \int_V \nabla N_F \nabla N_F^T \phi dV - \int_{S_I} N_F \dot{u}_n^* dS = 0 \tag{27}$$

又膜面上任一点的外法向位移 u_n^* 与各结点外法向位移 u_n 的关系为 $u_n^* = N_S^T u_n$; 膜面结点法向位移 u_n 与结点总位移 u 的关系为 $u_n = T u$, 故有

$$u_n^* = N_S^T T u \tag{28}$$

式中, T 为结点总位移到法向位移的转换矩阵.

再将 $u_n^* = N_S^T T u$ 代入式 (27), 写成矩阵形式为

$$\bar{M}_F \ddot{\phi} + \bar{K}_F \phi - \bar{A} \dot{u} = 0 \tag{29}$$

上式即为速度势表示的内充气动力方程的离散形式. 其中

$$\begin{aligned} \bar{M}_F &= C^{-2} \int_V N_F N_F^T dV \\ \bar{K}_F &= \int_V \nabla N_F \nabla N_F^T dV \\ \bar{A} &= \left(\int_{S_I} N_F N_S^T dS \right) T \end{aligned}$$

分别为基于整个流体域的形函数求得的内充气系数矩阵.

由于在整个流体区域上选取形函数会十分困难, 故可先将流体域离散为有限元, 然后在单元上应用 Galerkin 方法. 在式 (29) 的基础上, 可以得到流体单元的动力平衡方程

$$M_F^{(e)} \ddot{\phi}^{(e)} + K_F^{(e)} \phi^{(e)} - A^{(e)} \dot{u}_e = 0 \tag{30}$$

式中, $\phi^{(e)}(t)$ 为气体单元的结点速度势矢量; u_e 为膜单元结点位移矢量; 气体单元各系数矩阵表达式分别为

$$\begin{aligned} M_F^{(e)} &= C^{-2} \int_{V_e} N_F^{(e)} N_F^{(e)T} dV \\ K_F^{(e)} &= \int_{V_e} \nabla N_F^{(e)} \nabla N_F^{(e)T} dV \\ A^{(e)} &= \left(\int_{S_{el}} N_F^{(e)} N_S^{(e)T} dS \right) T^{(e)} \end{aligned}$$

$N_F^{(e)}$ 为气体单元的形函数矩阵.

整体坐标系下, 将单元平衡方程式 (30) 进行组装, 最终得到内充气有限元格式的动力平衡方程

$$M_F \ddot{\phi} + K_F \phi - A \dot{u} = 0 \tag{31}$$

式中, K_F 和 A 分别为单元系数矩阵 $M_F^{(e)}$, $K_F^{(e)}$ 和 $A^{(e)}$ 组装得到的流体域总系数矩阵.

1.3 界面协调条件

为了建立外部膜材和内充气体两类物理场的耦合关系, 还需要对外部膜材动力平衡方程式 (4) 中的内压结点力矢量 \mathbf{P}_S 继续变换形式. 可在膜材与气体交界面上选取一点, 以该点及其所在的膜单元和气体单元作为研究对象, 根据虚功原理建立界面协调条件.

根据式 (28), 膜单元上某一点的外法向虚位移可以表示为 $\delta \mathbf{u}_n^{(e)*} = \mathbf{N}_S^{(e)T} \mathbf{T}^{(e)} \delta \mathbf{u}_e$, $\delta \mathbf{u}_e$ 为该点所属膜单元的结点虚位移矢量. 若以压力作为流场基本变量, 类似于式 (22), 气体单元上该点的压力分布可以表示为

$$\mathbf{P}^{(e)*}(x, y, z, t) = \mathbf{N}_F^{(e)T}(x, y, z) \mathbf{P}^{(e)}(t)$$

式中, $\mathbf{P}^{(e)}(t) = [\mathbf{P}_1^{(e)}(t) \ \mathbf{P}_2^{(e)}(t) \ \dots \ \mathbf{P}_M^{(e)}(t)]^T$ 为气体单元的结点压力矢量.

在两类单元的交界面 S_{el} 上, 气体压力对膜面虚位移做的虚功表达式为

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_{S_{el}} (\delta \mathbf{u}_n^{(e)*})^T \mathbf{P}^{(e)*} dS = \\ &= \int_{S_{el}} (\mathbf{T}^{(e)} \delta \mathbf{u}_e)^T \mathbf{N}_S^{(e)} \mathbf{N}_F^{(e)T} \mathbf{P}^{(e)} dS = \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \left[\left(\int_{S_{el}} \mathbf{N}_F^{(e)} \mathbf{N}_S^{(e)T} dS \right) \mathbf{T}^{(e)} \right]^T \mathbf{P}^{(e)} \end{aligned} \quad (32)$$

记 $[\left(\int_{S_{el}} \mathbf{N}_F^{(e)} \mathbf{N}_S^{(e)T} dS \right) \mathbf{T}^{(e)}]^T \mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{P}_S^{(e)}$, 它表示内充气体引起的膜单元广义结点力; 式 (32) 表明内充气体压力对膜单元位移做的功可等效为广义结点力对膜单元结点位移所做的功, 该式建立起外部膜材单元结点力与内充气体单元结点压力的联系.

又由 $\mathbf{A}^{(e)} = \left(\int_{S_{el}} \mathbf{N}_F^{(e)} \mathbf{N}_S^{(e)T} dS \right) \mathbf{T}^{(e)}$, 可以得到 $\mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{P}_S^{(e)}$; 将膜单元上的广义结点力矢量在整个结构域组装后有

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}_S \quad (33)$$

将式 (18) 代入式 (33) 可以得到外部膜材结点力与内充气体速度势的关系

$$\mathbf{P}_S = \rho \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (34)$$

1.4 充气膜结构系统的共同作用方程

1.4.1 动力平衡方程

将膜面动力方程 (4) 与内充气体波动方程 (31)

联立, 并将式 (34) 代入可以得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_{S_L} + \mathbf{K}_{S_{NL}}) \mathbf{u} + \rho \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\phi}} &= \\ \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_{S_0} & \\ \mathbf{M}_F \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{K}_F \boldsymbol{\phi} - \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

方程组 (35) 建立了不同类型场变量的协调 (耦合) 关系, 能够充分考虑内充气体与外部膜材的共同作用; 将式 (35) 的流体方程两端同乘以 ρ , 并记 $\mathbf{M}_{FF} = \rho \mathbf{M}_F$, $\mathbf{C}_{FS} = \rho \mathbf{A}$, $\mathbf{C}_{FS}^T = \rho \mathbf{A}^T$ 及 $\mathbf{K}_{FF} = \rho \mathbf{K}_F$, 即得到充气膜系统的共同作用有限元动力方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{C}_{FS}^T \\ -\mathbf{C}_{FS} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{S_L} + \mathbf{K}_{S_{NL}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_{S_0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (36)$$

式 (36) 即为充气膜系统内充气体与外部膜材共同作用的理论模型. 在此基础上, 选取合适的单元形式便可以建立充气膜系统的共同作用有限元模型 (图 1).

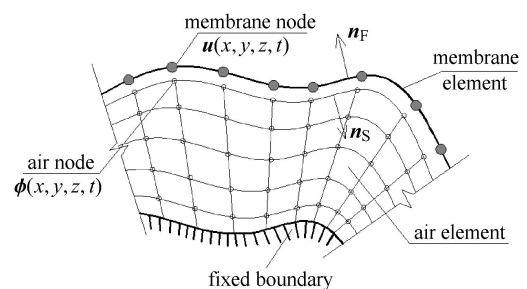


图 1 共同作用有限元模型

Fig. 1 Interaction FEM model

1.4.2 自由振动方程

尽管膜结构具有几何非线性, 但当结构在离平衡位置不远处作小幅度自由振动时, 可以忽略其几何非线性效应, 进行小变形自振分析^[18]. 因此, 膜结构的自振方程可写为全量格式. 在式 (36) 的基础上, 略去外载荷结点力向量和初应力结点力向量, 并将膜面结点位移增量改为全量格式, 可以得到考虑内充气体与外部膜材共同作用的充气膜系统自振

方程

$$\begin{bmatrix} M_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_S & C_{FS}^T \\ -C_{FS} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{SL} + K_{SNL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (37)$$

1.4.3 静力平衡方程

在静力问题中, 结构域及势流区域各点速度和加速度均为 0, 速度势 ϕ 在空间上为常量. 当势流没有无限边界存在时, $K_{FF}\phi = 0$ 恒成立^[19]. 将以上条件代入动力平衡方程 (36), 并对势流方程应用拉普拉斯变换和终值定理可以得到考虑内充气体与外部膜材共同作用的充气膜系统静力平衡方程

$$\begin{bmatrix} K_{SL} + K_{SNL} & C_{SF} \\ -C_{FS} & M_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_{S_0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (38)$$

2 数值算例

在上一节的共同作用理论的基础上, 本文拟采用 ADINA 程序建立两类充气膜结构的共同作用有限元模型, 验证在充气膜结构静、动力分析中考虑共同作用的准确性和合理性. 选取 2D Solid 单元类型中的 4 结点 General 3D plane stress (membrane) 单元来模拟外部膜材, 该单元不具备面外抗弯刚度, 可适用于大位移小应变问题. 由于内充气体符合势流假定, 故可选用三维的线性势流体单元 (linear potential-based fluid elements) 进行模拟, 该单元能够直接与结构单元耦合进而实现力的传递.

2.1 静力分析

为了验证共同作用有限元模型静力分析的准确性, 现选取文献 [7] 中所测试的一个正六边形气枕进行研究, 建立其共同作用有限元模型并按照相同的加载方式进行数值模拟. 气枕的几何及材料参数示于表 1, 并按照 1 个标准大气压下 20°C 时状态对气体单元进行设置, 体积模量为 10.1 kPa, 密度为 1.205 kg/m³.

在静力载荷作用下, 充气膜结构的最终平衡内充气体与外部膜材共同抵抗载荷作用的结果. 实际操作中, 由于在气枕表面实现较大的均布加载并不容易, 故测试中先通过铺砂方式一次性施加 200 Pa 均布压力, 然后充气改变内压. 尽管过程比载荷单独

表 1 ETFE 气枕参数

Table 1 Parameters of the ETFE cushion

Parameters	Symbols	Values
side length	B/mm	750
vector height	H/mm	108
thickness of ETFE	$t/\mu\text{m}$	200
modules of ETFE	E/MPa	670
initial stress	σ/MPa	1.08
internal pressure	P/Pa	200

作用时更为复杂, 但由于每一步充气加压后的平衡仍是外载荷、膜面应力以及内压三者之间的平衡, 故模拟上述过程同样可以用来检验载荷分析的准确性. 本文具体分析过程为: 首先按照给定的初始条件进行形态分析, 获得气枕的初始形状和应力分布; 然后, 对气枕上表面施加 200 Pa 均布压力完成载荷分析; 最后, 对内充气体单元施加质量流载荷模拟充气加压过程, 将内压由 200 Pa 增加至 2 kPa. 选取与测试位置相同的变形观测点 (图 2) 进行研究, 提取各点内压超过 600 Pa 后的相对位移 d , 作出点 1、点 4 和点 3 的内压-位移关系曲线分别如图 3(a), 图 3(b) 和图 3(c) 所示.

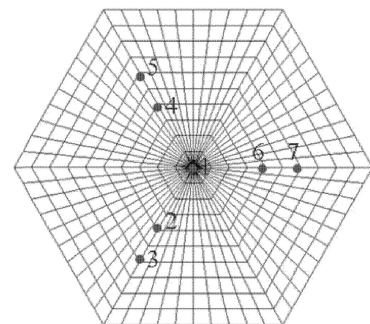
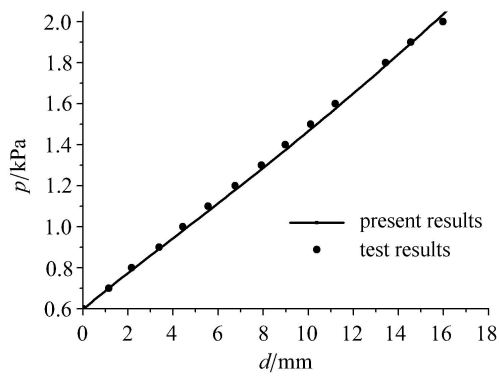


图 2 变形观测点

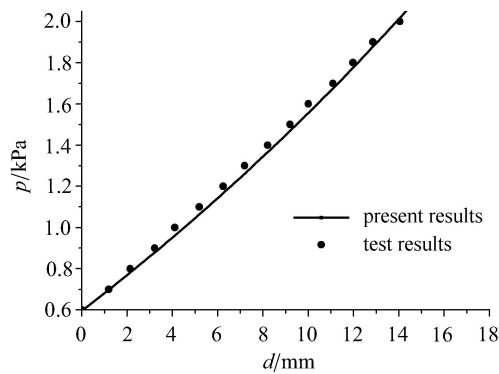
Fig.2 Deformation observation points

由图 3(a) ~ 图 3(c) 可知: 铺砂状态下, 当气枕充气加压超过 600 Pa 后, 相对位移的增长随着内压增大而逐渐加快, 二者表现出一定的非线性关系; 共同作用模型计算得到的各点内压-位移关系曲线与测试结果吻合较好, 尤其是在靠近气枕中部的的位置 (点 1 和点 4); 在靠近边界的位置 (点 3), 当内压大于 1 kPa 时, 本文模型得到的内压-位移关系曲线与测试结果有一定差异. 但考虑到实际结构中气枕的工作内压一般在 200 ~ 750 Pa 之间, 故认为共同作用有限元模型的分析结果是合理准确的, 它能够用于充气膜结构的静力载荷分析和充气加压模拟.



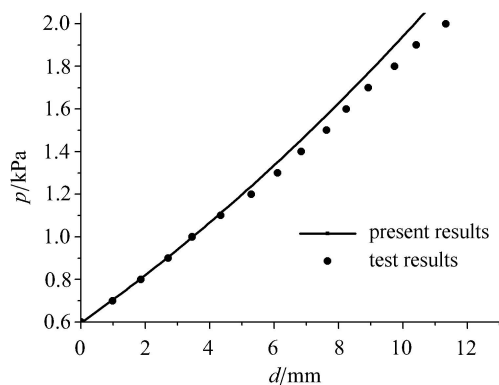
(a) 观测点 1

(a) Observation point 1



(b) 观测点 4

(b) Observation point 4



(c) 观测点 3

(c) Observation point 3

图 3 各点内压-相对位移关系

Fig. 3 Relation between internal pressure and relative deformation

at each point

2.2 自振特性分析

Young 等^[20]采用激光位移计对一根两端固定的充气膜圆管(图 4)进行了动力测试,获得了充气管 X 向的前 6 阶工作变形和频率.该充气膜圆管使用

了各向同性的 Kapton 膜材,弹性模量为 2.551 GPa,泊松比为 0.34,膜材厚 51 μm ,密度为 1420 kg/m^3 ;沿纵轴方向接口区宽 12.7 mm,厚 127 μm ;圆管半径 38.1 mm,长 1.2065 m,内压 12.065 kPa.本文基于内充气体与外部膜材的共同作用理论,建立了包括气体单元和膜单元的充气管系统有限元模型,进行自振分析.具体操作步骤为:首先对管内势流施加一定的质量流载荷使内压和膜面应力达到预定值,获得充气管的初始形态;然后进行重启启动设置,采用 Lanczos iteration 方法做模态分析.

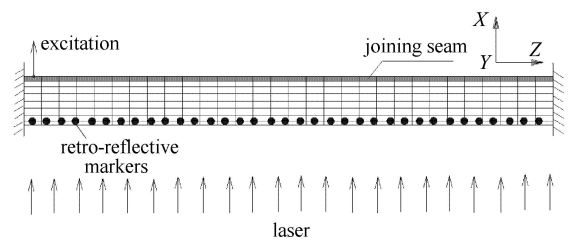


图 4 充气管测试模型

Fig. 4 Test model of the inflatable tube

表 2 列出了本文模型(考虑共同作用)和文献有限元模型(不考虑共同作用)与测试模型的模态分析结果对比.由表 2 可知:考虑内充气体与外部膜材共同作用的有限元模型计算结果与测试结果基本一致,最大差异仅为 -3.53%;而不考虑内充气体与外部膜材共同作用的模型计算结果与测试结果相差较大,最多高于测试值 13.1%.这表明:由于忽略了气体的压力变化和质量效应,仅将内充气体视为常压力的方法不能充分考虑内充气体的作用;采用内充气体与外部膜材共同作用的理论模型进行充气膜自振特性分析更为合理.

表 2 不同分析方法结果对比

Table 2 Results of different analyzing method

Bending modes	Present model		Model in Ref.[7]		Test model
	f/Hz	error/%	f/Hz	error/ %	f/Hz
1	87.74	0.05	99.2	13.1	87.7
2	218.6	-3.53	247.2	9.1	226.6
3	390.3	-1.39	—	—	395.8

3 结 论

内充气体是充气膜结构系统的重要组成部分,对结构系统的质量、刚度及阻尼均有相当程度的贡献.因此,充气膜结构的载荷分析和动力分析必须考虑内充气体的作用.本文首先将充气膜结构内充气

体假定为势流,建立了速度势表示的内充气有限元动力方程;随后引入界面协调条件,将气体方程和膜面方程联立得到了充气膜结构系统的共同作用理论模型;最后,基于该理论模型建立了两类典型充气膜结构的数值模型,并通过静力分析和自振特性分析验证了共同作用理论模型及数值建模方法的正确性。

本文模型无需另外编程序计算充气膜的体积和内压,能够方便准确地模拟充气膜结构充气后的受力状态;此外,本文模型还能够充分考虑内充气对结构自振特性的影响,为充气膜结构的风致响应动力分析奠定基础。

参 考 文 献

- Bonet J, Wood RD, Mahaney J, et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190(5): 579-595
- 徐国宏,袁行飞,傅学怡等. ETFE 气枕结构设计——国家游泳中心气枕结构设计简介. *土木工程学报*, 2005, 38(4): 66-72 (Xu Guohong, Yuan Xingfei, Fu Xueyi, et al. Design of ETFE cushions: a brief introduction to the ETFE cushion design of Beijing Olympic National Swimming Center. *China Civil Engineering Journal*, 2005, 38(4): 66-72 (in Chinese))
- 张建,杨庆山. 气枕式充气膜结构形态与受力分析方法. *哈尔滨工业大学学报*, 2008, 40(12): 1569-1572 (Zhang Jian, Yang Qingshan. Form-state and loading analyses of air-inflated cushion membrane structures. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2008, 40(12): 1569-1572 (in Chinese))
- 薛素铎,许晶,向阳. 载荷作用下气枕式 ETFE 膜结构受力性能分析. *空间结构*, 2007, 13(1): 45-51 (Xue Suduo, Xu Jing, Xiang Yang. Static analysis of ETFE cushions in membrane structures. *Spatial Structures*, 2007, 13(1): 45-51 (in Chinese))
- 顾磊,王鹏,武芳. ETFE 气枕力学性能分析及其蒙皮效应研究. *建筑结构学报*, 2012, 33(5): 38-45 (Gu Lei, Wang Peng, Wu Fang. Mechanical analysis and diaphragm effect of ETFE cushions. *Journal of Building Structures*, 2012, 33(5): 38-45 (in Chinese))
- 陈务军,唐雅芳,任小强等. ETFE 气囊膜结构设计分析方法与数值分析特征研究. *空间结构*, 2010, 16(4): 38-43 (Chen Wujun, Tang Yafang, Ren Xiaoqiang, et al. Mechanical analysis and diaphragm effect of ETFE cushions. *Spatial Structures*, 2010, 16(4): 38-43 (in Chinese))
- 吴明儿,刘建明,张其林等. ETFE 薄膜气枕模型试验研究. *建筑结构学报*, 2008, 29(6): 126-131 (Wu Minger, Liu Jianming, Zhang Qiling, et al. Mechanical analysis and diaphragm effect of ETFE cushions. *Journal of Building Structures*, 2008, 29(6): 126-131 (in Chinese))
- 顾磊,王鹏,陈世平等. ETFE 气枕模型试验与有限元分析. *建筑结构学报*, 2012, 33(5): 46-52 (Gu Lei, Wang Peng, Chen Shiping, et al. Experimental study and FEA of ETFE cushion. *Journal of Building Structures*, 2012, 33(5): 46-52 (in Chinese))
- Jha AK, Inman DJ, Plaut RH. Free vibration analysis of an inflated toroidal shell. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, 124(6): 387-396
- Park G, Ruggiero E, Inman DJ. Dynamic testing of inflatable structures using smart materials. *Smart Mater. Struct*, 2002, 11: 147-155
- Park G, Sausse M, Inman DJ. Vibration testing and finite element analysis of an inflatable Structure. *AIAA Journal*, 2003, 41(8):1556-1563
- Smalley KB, Tinker ML. Nonlinear pressurization and modal analysis procedure for dynamic modeling of inflatable structures. *Journal of Spacecrafts and Rockets*, 2002, 39(5): 732-739
- Srivastava A, Mishra BK, Jain SC. Effect of enclosed fluid on the dynamic response of inflated torus. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 309: 320-329
- 杨庆山,姜忆南. 张拉索-膜结构分析与设计. 北京: 科学出版社, 2004 (Yang Qingshan, Jiang Yanan. Analysis and Design of Tensioned Cable-Membrane Structures. Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese))
- Batchelor GK. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1967
- Sussman T, Sundqvist J. Fluid-structure interaction analysis with a subsonic potential-based fluid formulation. *Computers & Structures*, 2003, 81(8-11): 949-962
- Olson LG, Bathe KJ. Analysis of fluid-structure interactions: A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. *Computers & Structures*, 1985, 21(1-2): 21-32
- 谭惠丰,李云良,毛丽娜等. 空间充气展开支撑管的自振特性研究. *哈尔滨工业大学学报*, 2008, 40(5): 709-713 (Tan Huifeng, Li Yunliang, Mao Lina, et al. Free vibration characteristics of inflatable supporting tube. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2008, 40(5): 709-713 (in Chinese))
- ADINA R&D, Inc. ADINA theory and modeling guide. Report ARD 06-7. 1967
- Young LG, Ramanathan S, Hu J, et al. Numerical and experimental dynamic characteristics of thin-film membranes. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(9-10): 3001-3025

(责任编辑:刘希国)

INTERACTION MODEL OF THE ENCLOSED AIR AND THE OUTER MEMBRANE¹⁾

Li Peng²⁾ Yang Qingshan

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract The enclosed air in inflatable membrane structures is assumed as potential flow in this paper. The wave equation of enclosed air was derived, and the finite element dynamic equation was obtained by using Galerkin method. The relation between nodal potential of air elements and nodal displacement of membrane elements was established through the introduction of interface coupling conditions. Then the interaction model of the inflatable membrane structure system was obtained by combining the dynamic equations of both the enclosed air and the membrane. On the basis of the interaction model, two typical inflatable structures were modeled and analyzed to verify the accuracy and rationality of the interaction model by comparing the numerical results with the experimental results.

Key words inflatable membrane structure, potential flow, enclosed air, interaction, dynamic equation

Received 21 January 2013, revised 27 March 2013.

1) The project was supported by the Major Research plan of the National Natural Science Foundation of China (90815021, 91215302).

2) Li Peng, Ph.D. candidate, research interests: wind resistance of membrane structure. E-mail: 09115284@bjtu.edu.cn