

文章编号: 1001-0920(2013)07-1028-05

输入状态稳定的鲁棒预测控制

周超¹, 王亚锋², 周绍磊¹, 陈洁¹

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001; 2. 海军装备部广州局 航空总体室, 贵州 安顺 561018)

摘要: 以有界干扰非线性系统为研究对象, 设计一种基于近似可达集的鲁棒预测控制方法. 该方法以鲁棒控制不变集作为终端约束集, 采用一种简单的三次多项式逼近预测控制的待优化控制律, 通过在线优化求解三次多项式的各项系数, 并从理论上证明了所设计的鲁棒预测控制律可以使系统输入状态稳定. 最后通过仿真实例验证了所提出的鲁棒预测控制方法的可行性和有效性.

关键词: 非线性鲁棒预测控制; 输入状态稳定; 终端约束集; 鲁棒控制不变集; 三次多项式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Robust model predictive control with input-to-state stability

ZHOU Chao¹, WANG Ya-feng², ZHOU Shao-lei¹, CHEN Jie¹

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China; 2. Laboratory of Aeronautical Collectivity, Guangzhou Bureau of Naval Armament Department, Anshun 561018, China. Correspondent: ZHOU Chao, E-mail: rickzhou2010@126.com)

Abstract: Considering the nonlinear system with bounded disturbance, a robust model predictive control(MPC) method based on approximated reachable sets is designed. A robust control invariant set is taken as the terminal constraint set. A kind of cubic polynomial with simple structure is adopted to approximate the controller to be optimized. Then, the coefficients of cubic polynomial are computed through online optimization. It is proved in theory that the system is input-to-state stable by using the proposed robust MPC controller. Finally, simulation results show the feasibility and effectiveness of the method.

Key words: nonlinear robust model predictive control(MPC); input-to-state stability; terminal constraint set; robust control invariant set; cubic polynomial

0 引言

为了保证无干扰系统预测控制的稳定性, 普遍采取的方法是在预测控制的优化问题中添加终端代价函数和终端状态约束^[1-2]. 尽管预测控制器本身具有一定的鲁棒性^[3], 但当系统的实际模型与其标称模型差别较大时, 系统的稳定性将得不到保证, 进而需要设计具有强鲁棒性的预测控制算法. 文献[4-5]针对受扰系统分别设计了滚动时域预测控制器, 其中文献[5]的优化问题可以方便地转化为LMI问题加以求解; 文献[6]针对多胞不确定系统设计了基于椭圆不变集的鲁棒预测控制器; 文献[7]用多面体不变集替代文献[6]的椭圆不变集, 扩大了系统的初始可行域; 文献[8-9]定义了基于某一具体控制量的近似可达集, 设计了基于近似可达集的预测控制器; 文献[10]针对有界扰动系统给出了一个通用的输入状态稳定的

min-max MPC控制器; 文献[11]以文献[10]为基础, 先离线计算出一个线性反馈控制增益, 将待优化控制律视为一仿射输入控制(线性反馈控制律与修正量的和), 然后再对修正量进行在线优化求解得到最终控制律; 文献[12]将待优化控制律看作线性反馈控制律, 通过在线优化求解线性反馈增益.

受文献[8-12]的启发, 本文采用一种结构简单的三次多项式来逼近预测控制的待优化控制律, 定义了一种基于三次多项式控制律的近似可达集, 设计了一种输入状态稳定的鲁棒预测控制器.

1 系统描述

考虑如下离散干扰模型:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k. \quad (1)$$

其中: $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$ 分别为系统在采样时刻 k 的

收稿日期: 2012-03-21; 修回日期: 2012-06-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61004002); 航空科学基金项目(20110184001).

作者简介: 周超(1982-), 男, 讲师, 博士, 从事预测控制、协同控制等研究; 王亚锋(1982-), 男, 工程师, 博士, 从事预测控制理论的研究.

状态和输入; $w_k \in R^d$ 为系统干扰; f 为非线性函数, 且满足 $f(0, 0) = 0$. 系统的状态和输入约束为 $x_k \in X$, $u_k \in U$; X 和 U 都是紧凸的, 且都包含原点; 系统干扰为容许扰动, 即 $w_i \in W$, $W = \{w \in R^d \mid \|w\|_2 \leq \bar{W}\}$, \bar{W} 为扰动的 2 范数上界.

2 可达集与近似可达集定义

考虑集合 $A \subset R^n$, $B \subset R^n$, 向量 $x \in R^n$, $m \times n$ 维矩阵 K , 映射 $g_1(\cdot) : R^n \rightarrow R^m$, $g_2(\cdot, \cdot) : R^{n+m} \rightarrow R^n$. 一些关于集合和向量的运算定义如下:

$$x + A = \{x + a \mid a \in A\},$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

$$KA = \{Ka \mid a \in A\},$$

$$g_1(A) = \{g_1(a) \mid a \in A\},$$

$$g_2(A, g_1(A)) = \{g_2(a, g_1(a)) \mid a \in A\}.$$

定义 1 考虑预测步长为 N , 已知 k 时刻的初始状态为 x_k , 将控制律序列 $\pi = \{\pi_0(x_k), \pi_1(\cdot), \dots, \pi_{N-1}(\cdot)\}$ 作用于系统, 系统在 $k+i+1$ ($i \geq 0$) 时刻的可达集定义为

$$X_{i+1}(x_k, \pi) = f(X_i(x_k, \pi), \pi_i(X_i(x_k, \pi))) + W, \quad (2)$$

其中 $X_0(x_k, \pi) = x_k$.

将式 (2) 改写为

$$X_{i+1}(x_k, \pi) = f_{\pi_i}(X_i(x_k, \pi)) + W. \quad (3)$$

直接求取 $X_{i+1}(x_k, \pi)$ 所需的计算量是非常大的. 为降低计算负担, 需采用其他简单映射 $\tilde{f}_{\pi_i}(\cdot)$ 对 $f_{\pi_i}(\cdot)$ 进行近似处理, 而这种近似处理需满足以下 2 个条件:

条件 1 (包含性) $f_{\pi_i}(A) \subseteq \tilde{f}_{\pi_i}(A)$;

条件 2 (单调性) $\forall B \subseteq A, \tilde{f}_{\pi_i}(B) \subseteq \tilde{f}_{\pi_i}(A)$.

基于这种近似处理, 预测控制的可达集可由一些比较容易获取的集合来逼近.

定义 2 考虑预测步长为 N , 已知 k 时刻的初始状态为 x_k , 将控制律序列 $\pi = \{\pi_0(x_k), \pi_1(\cdot), \dots, \pi_{N-1}(\cdot)\}$ 作用于系统, 系统在 $k+i+1$ ($i \geq 0$) 时刻的近似可达集定义为

$$\hat{X}_{i+1}(x_k, \pi) = \tilde{f}_{\pi_i}(\hat{X}_i(x_k, \pi)) + W, \quad (4)$$

其中 $\hat{X}_0(x_k, \pi) = x_k$.

显然, $X_{i+1}(x_k, \pi) \subseteq \hat{X}_{i+1}(x_k, \pi)$.

对 $f_{\pi_i}(\cdot)$ 的近似处理. 本文以区间算法为工具, 顾名思义, 区间算法是定义在区间上的数学运算, 其 4 个基本公式^[13]分别为

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c],$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min(a \cdot c, a \cdot d, b \cdot c, b \cdot d), \max(a \cdot c, a \cdot d, b \cdot c, b \cdot d)],$$

$$[a, b] / [c, d] = [a, b] \times \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c} \right], \quad 0 \notin [c, d].$$

以这 4 个基本公式为基础, 可将区间算法进行扩展, 得到诸如正弦、余弦、指数、对数、开平方等区间运算结果. 此处不对其进行一一详述, 具体算法可参见文献 [14]. 区间算法的 4 个基本运算及其扩展至其他映射的结果统称为扩展区间算法.

引理 1^[15] 采用扩展区间算法对 $f_{\pi_i}(\cdot)$ 进行近似处理, 可满足条件 1 (包含性) 和条件 2 (单调性).

关于引理 1 的证明可参见文献 [15]. 由引理 1 可知, 使用扩展区间算法得到的集合可作为系统的近似可达集.

3 输入状态稳定定义

函数 $f_1 : R^+ \rightarrow R^+$ 称为 \mathcal{K} 类函数, 其中 $R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$, 若其满足连续、严格递增且 $f_1(0) = 0$.

函数 $f_2 : R^+ \rightarrow R^+$ 称为 \mathcal{K}_∞ 类函数, 若其是 \mathcal{K} 类函数且满足 $s \rightarrow +\infty$ 时, 有 $f_2(s) \rightarrow +\infty$.

函数 $f_3 : R^+ \times Z^+ \rightarrow R^+$ 称为 \mathcal{KL} 类函数, 若其对于任意固定的 $d \geq 0$ 都有 $f_3(\cdot, d)$ 为 \mathcal{K} 类函数, 对于任意固定的 $s \geq 0$, $f_3(s, \cdot)$ 是严格递增的, 且 $d \rightarrow +\infty$ 时, 有 $f_3(s, d) \rightarrow +\infty$.

定义 3 考虑系统 $x_{k+1} = g(x_k, w_k)$, 其称为在 X 内是输入状态稳定的, 如果对于任意输入 $w_k \in W$, 任意 $x_0 \in X$, 都存在一个 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\alpha(\cdot)$ 和一个 \mathcal{KL} 类函数 $\beta(\cdot, \cdot)$, 使得以下不等式成立:

$$\|x_k\|_2 \leq \beta(\|x_0\|_2, k) + \alpha(\bar{W}). \quad (5)$$

引理 2^[10] 系统 $x_{k+1} = g(x_k, w_k)$ 是输入状态稳定的, 如果存在连续函数 $V : R^n \rightarrow R^+$, 使得对 $\forall w_k \in W, \forall x_k \in X$, 都有

$$\alpha_1(\|x_k\|_2) \leq V(x_k) \leq \alpha_2(\|x_k\|_2) + \delta_1(\bar{W}), \quad (6)$$

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq \delta_2(\bar{W}) - \alpha_3(\|x_k\|_2). \quad (7)$$

其中: $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \alpha_3(\cdot)$ 为 \mathcal{K}_∞ 类函数; $\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot)$ 为 \mathcal{K} 类函数; $V(\cdot)$ 称为输入状态稳定李雅普诺夫函数.

4 鲁棒控制器设计

与无干扰系统类似, 对于存在容许扰动的系统, 为保证系统稳定 (此处的稳定是指输入状态稳定), 通常采取的方法是在预测控制的优化问题中添加终端代价函数和终端状态约束, 使得终端代价函数满足李雅普诺夫函数特性且终端状态集为相应的鲁棒控制不变集. 文献 [10] 针对容许扰动系统给出了一个通用的 min-max MPC 控制器, $k = 0$ 时刻对应如下的优化问题:

$$J_N(\pi, x_0, w) = \min_{\pi} \max_w \sum_{i=0}^{N-1} q(x(i, x_0), \pi_i(x(i, x_0))) + F(x(N, x_0));$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x(i+1, x_0) = f(x(i, x_0), \pi_i(x(i, x_0)), w_i), \\ & \pi_i(x(i, x_0)) \in U, x(i, x_0) \in X, \forall w_i \in W, \\ & i = 0, 1, \dots, N-1, x(N, x_0) \in \Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $\pi = \{\pi_i(\cdot)\}$, $w = \{w_i\}$, $q(\cdot, \cdot)$ 为阶段指标函数, $\pi_i(\cdot)$ 为待优化控制律, $F(\cdot)$ 为终端代价函数, Ω 为终端约束集.

显然, 直接求解优化问题 (8) 的最优解是很困难的, 原因在于当不知道待优化控制律 $\pi_i(\cdot)$ 的具体形式时, 现有优化算法无法对优化问题 (8) 进行直接求解. 为解决这个问题, 文献 [8-9] 先直接将 $\pi_i(\cdot)$ 视为一个具体控制量, 即 $\pi_i(\cdot) = u_i$ (此时, $\pi_i(\cdot)$ 不是一个函数, 而只是一个向量), 再对这个控制量进行在线优化求解. 文献 [11] 首先离线计算出一个线性反馈控制律, 并将 $\pi_i(\cdot)$ 视为一仿射输入控制律, 即 $\pi_i(x) = Kx + e_i$ (K 为离线计算的线性反馈增益, e_i 为修正量), 再对修正量 e_i 进行在线优化求解. 可以看出: 文献 [11] 较文献 [8-9] 更优越一些, 但其线性反馈增益是事先离线计算的, 而且每一个 $\pi_i(\cdot)$ 都用相同的反馈增益. 文献 [12] 也将待优化控制律看作线性反馈控制律, 但其线性反馈增益是通过在线优化求解的, 因此文献 [12] 的方法较文献 [11] 更灵活些.

假设 1 每一个 $\pi_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) 都是连续函数.

$\pi_i(x)$ 连续且都定义在 X 上, X 是紧的即意味着其为有界闭集. Weierstrass 第一定理指出, 任意定义在有界闭区间上的连续函数都可以用多项式来逼近. 因此, 当假设 1 成立时, $\pi_i(x)$ 可由多项式去逼近. 综合考虑计算量与逼近精度两方面因素, 本文采用一种结构简单的三次多项式来逼近 $\pi_i(x)$. 方便起见, 将 $\pi_i(x)$ 表示成向量形式, 即

$$\pi_i(x) = (\pi_i^1(x), \pi_i^2(x), \dots, \pi_i^m(x))^T, \quad (9)$$

对每一维上的 $\pi_i^j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), 用如下三次多项式逼近:

$$\begin{aligned} \pi_i^j(x) = & \sum_{r=1}^n K_{(i,j),0}^r + K_{(i,j),1}^r x^r + \\ & K_{(i,j),2}^r (x^r)^2 + K_{(i,j),3}^r (x^r)^3. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: x^r 为 x 在第 r 维上的分量; $K_{(i,j),0}^r, K_{(i,j),1}^r, K_{(i,j),2}^r, K_{(i,j),3}^r$ 为在第 i 个预测时刻, 第 j 维控制分量上对应于第 r 维状态分量的多项式系数.

将 $\pi_i(x)$ 经过三次多项式近似处理后, 对 $\pi_i(x)$ 的在线优化便转变为对三次多项式的系数进行在线优化. 可以看出, 文献 [8-9, 11-12] 所采用方法都可以归纳为本文方法的一种特殊形式. 当预测步长为 N 时, 本文方法的在线优化参数个数为 $N \times n \times m \times 4$, 而文献 [8-9, 11] 的待优化参数个数为 $N \times m$, 文献 [12] 的

待优化参数个数为 $N \times n \times m$. 因此, 本文方法在增加灵活性的同时, 也相应地增加了在线优化的计算量.

以三次多项式表示的控制律为待优化对象, 本文提出一种基于近似可达集的输入状态稳定的鲁棒预测控制方法.

定义 4 考虑集合 $A \subset R^n$, 向量 $x \in R^n$, $n \times n$ 维非负定矩阵 P , 称 $D_P(A, x)$ 为 A 与 x 之间的 P 距离, 当 $P = I$ (I 为 $n \times n$ 维单位矩阵) 时, 称 $D_I(A, x)$ 为 A 与 x 之间的距离, 其中

$$D_P(A, x) = \max\{(a-x)^T P(a-x) | a \in A\},$$

$$D_I(A, x) = \max\{(a-x)^T (a-x) | a \in A\}.$$

性质 1 对 $\forall a \in A, \forall B \subseteq A$, 都有

$$D_P(a, x) \leq D_P(A, x), \quad (11)$$

$$D_P(B, x) \leq D_P(A, x). \quad (12)$$

假设 2 存在原点邻域 $\Omega \subseteq X$, 线性反馈控制律 $u = K_{loc}x \in U$, 非负定矩阵 P 以及一正实数 γ , 使得对 $\forall A \subseteq \Omega$, 都有

$$A^+ = \tilde{f}_{K_{loc}}(A) + W \subseteq \Omega,$$

$$D_P(A^+, 0) - D_P(A, 0) \leq \gamma \bar{W}^2 - D_I(A, 0).$$

其中 $\tilde{f}_{K_{loc}}(A)$ 表示用于逼近 $f_{K_{loc}}(A) = f(A, K_{loc}A)$ 的扩展区间算法.

综上所述, 本文设计的预测控制器在 $k = 0$ 时刻对应的具体优化问题可描述为

$$\begin{aligned} J_N(\pi, x_0, w) = & \min_{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} D_I(\hat{X}_i(x_0, \pi), 0) + D_P(\hat{X}_N(x_0, \pi), 0); \\ \text{s.t. } & \hat{X}_{i+1}(x_0, \pi) = \tilde{f}_{\pi_i}(\hat{X}_i(x_0, \pi)) + W, \\ & \hat{X}_0(x_0, \pi) = x_0, \hat{X}_N(x_0, \pi) \subseteq \Omega, \\ & \hat{X}_i(x_0, \pi) \subseteq X, \pi_i(\hat{X}_i(x_0, \pi)) \subseteq U, \\ & i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\tilde{f}_{\pi_i}(\hat{X}_i(x_0, \pi))$ 为用扩展区间算法对 $f_{\pi_i}(\hat{X}_i(x_0, \pi))$ 进行近似处理的集合映射; $f_{\pi_i}(\hat{X}_i(x_0, \pi)) = f(\hat{X}_i(x_0, \pi), \pi_i(\hat{X}_i(x_0, \pi)))$; $\pi_i(\hat{X}_i(x_0, \pi))$ 为状态量空间至控制量空间的集合映射, 其形式如式 (9) 和 (10) 所示; $D_I(\hat{X}_i(x_0, \pi), 0)$ 为阶段指标函数; $D_P(\hat{X}_N(x_0, \pi), 0)$ 为终端代价函数; Ω 为终端约束集.

定义 $J_N^*(x_0, \pi^*, w)$ 为优化问题 (13) 的最优性能指标, $\pi^* = \{\pi_i^*(\cdot)\}$ 为相应的最优控制律, $\{\hat{X}_i(x_0, \pi^*), i = 1, 2, \dots, N\}$ 为采用 π^* 时相应的近似可达集序列. 在实际预测控制中, 只有控制律 $\pi_0^*(\cdot)$ 真正作用于系统, 而 $k = 1$ 时刻的控制律则通过求解其相应时刻的优化问题给出, 因此本文设计的预测控制律可描述为

$$u_{RH}(x) = \pi_0^*(x). \quad (14)$$

定义 5 X_Ω 称为预测控制的吸引域, 若对 $\forall x_0 \in X_\Omega$, 其对应优化问题 (13) 都有解.

定理 1 对 $\forall x_0 \in X_\Omega$, 采用预测控制律 $u_{RH}(\cdot)$, 系统是输入状态稳定的.

证明 分以下 2 个步骤证明. 第 1 步证明若 $k=0$ 时刻优化问题 (13) 有解, 则 $k=1$ 时刻对应的优化问题存在可行解; 第 2 步证明 $J_N^*(\cdot)$ 为输入状态稳定李雅普诺夫函数.

第 1 步: 可行解的存在性证明. $k=1$ 时刻, $x_1 = f(x_0, \pi_0^*(x_0)) + w_0$, 取 $\pi = \{\pi_1^*(\cdot), \pi_2^*(\cdot), \dots, \pi_{N-1}^*(\cdot), \pi_N(\cdot)\}$, 其中 $\pi_N(\cdot)$ 表示 Ω 内的线性反馈控制律, 即 $\pi_N(x) = K_{loc}x$.

定义 $\{\hat{X}_i(x_1, \pi), i = 1, 2, \dots, N\}$ 是初始状态为 x_1 时采用控制律序列 π 的近似可达集序列. 因为 $x_1 \in \hat{X}_1(x_0, \pi^*)$, 所以有 $\hat{X}_i(x_1, \pi) \subseteq \hat{X}_{i+1}(x_0, \pi^*), i = 1, 2, \dots, N-1$.

综上所述, 可得到 $\hat{X}_N(x_0, \pi^*) \subset \Omega$ 且 $\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi) \subseteq \hat{X}_N(x_0, \pi^*)$, 由假设 2 和 \tilde{f}_{π_N} 的单调性可知

$$\hat{X}_N(x_1, \pi) = \tilde{f}_{\pi_N}(\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi)) + W \subset \Omega,$$

因此 π 为 $k=1$ 时刻的一组可行解.

第 2 步: 证明 $J_N^*(\cdot)$ 为输入状态稳定性李雅普诺夫函数. 很明显, 由 $J_N^*(\cdot)$ 的定义可知, $J_N^*(x_0) \geq (\|x_0\|_2)^2$. 优化问题 (13) 有解表示 $J_N^*(x_0)$ 有界, 所以存在正实数 c_1, c_2 , 使得 $\forall x_0 \in X_\Omega$, 都有

$$J_N^*(x_0) \leq c_1 \cdot (\|x_0\|_2)^2 + c_2 \cdot (\bar{W})^2,$$

因此 $J_N^*(\cdot)$ 满足不等式 (6).

下面证明 $J_N^*(\cdot)$ 满足不等式 (7).

将 π 作用于系统时, 有

$$\hat{X}_i(x_1, \pi) \subseteq \hat{X}_{i+1}(x_0, \pi^*), i = 1, 2, \dots, N-1.$$

由性质 1 可知

$$D_I(\hat{X}_i(x_1, \pi), 0) \leq D_I(\hat{X}_{i+1}(x_0, \pi^*), 0),$$

所以性能指标 $J_N(\pi, x_1, w)$ 满足

$$\begin{aligned} J_N(\pi, x_1, w) - J_N^*(x_0, \pi^*, w) &\leq \\ D_P(\hat{X}_N(x_1, \pi), 0) + D_I(\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi), 0) - \\ D_P(\hat{X}_N(x_0, \pi^*), 0) - D_I(\hat{X}_0(x_0, \pi^*), 0) &\leq \\ D_P(\hat{X}_N(x_1, \pi), 0) + D_I(\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi), 0) - \\ D_P(\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi), 0) - D_I(\hat{X}_0(x_0, \pi^*), 0). \end{aligned} \quad (15)$$

因为已经知道 $\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi) \subseteq \Omega$, 所以由假设 2 可知

$$\begin{bmatrix} D_P(\hat{X}_N(x_1, \pi), 0) + D_I(\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi), 0) \\ -D_P(\hat{X}_{N-1}(x_1, \pi), 0) \end{bmatrix} \leq \gamma \bar{W}^2. \quad (16)$$

将式 (16) 代入 (15), 有

$$J_N(\pi, x_1, w) - J_N^*(x_0, \pi^*, w) \leq$$

$$\gamma \bar{W}^2 - D_I(\hat{X}_0(x_0, \pi^*), 0) =$$

$$\gamma \bar{W}^2 - x_0^T x_0,$$

因此有

$$J_N^*(x_1) - J_N^*(x_0) \leq \gamma \bar{W}^2 - x_0^T x_0.$$

由引理 2 可得, 系统是输入状态稳定的. \square

5 仿真实例

采用如下离散模型:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \begin{bmatrix} 1 & T \\ T & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T\mu \\ T\mu \end{bmatrix} u_k + \\ & \begin{bmatrix} T(1-\mu) & 0 \\ 0 & -4T(1-\mu) \end{bmatrix} x_k u_k + Tw_k. \end{aligned}$$

其中: 状态 $x = [x_1 \ x_2]^T \in R^2$; $T=0.1$; 状态约束和控制约束分别为 $X = \{x | \|x\|_\infty \leq 2\}$, $U = \{u | |u| \leq 2\}$; 干扰 w 的 2 范数界为 $\bar{W} = 0.02412$.

预测控制的终端代价函数取 $x^T P x$, 其中 $P = [80, -0.5; -0.5, 80]$. $\gamma=1$, 终端约束集为 $\Omega = \{x | \|x\|_\infty \leq 0.1588\}$, Ω 内的线性反馈增益为 $K_{loc} = [-3.1648, -3.1648]$, 预测步长 $N = 7$.

从预测控制的吸引域中取任意初始点, 观察其采用本文鲁棒预测控制方法的收敛性. 本次仿真初始点为 $x_0 = [0.5, -0.8]^T$, 图 1 为 $k=0$ 时刻的近似可达集, 图 2 为采用本文鲁棒预测控制方法的状态收敛曲线.

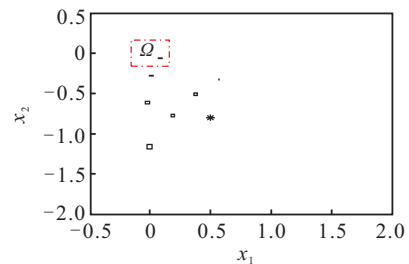


图 1 $t=0$ 时刻的近似可达集

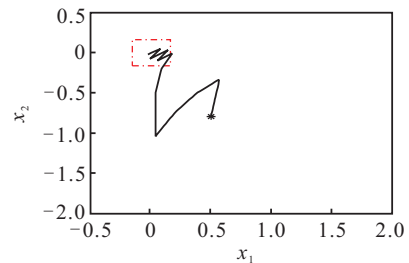


图 2 状态收敛曲线

图 1 和图 2 中的点画线区域表示终端约束集 Ω , 图 1 中的实线小区域为近似可达集, 图 2 中的实线表示状态的收敛曲线. 由图 1 和图 2 可以看出, $k=0$ 时刻, 若末端近似可达集可进入 Ω , 则状态可被引导至原点的某个邻域内, 即输入状态稳定.

6 结 论

本文设计了一种基于近似可达集的鲁棒预测控

制算法. 该算法采用结构简单的三次多项式逼近预测控制的待优化控制律, 并通过在线优化求解三次多项式的各项系数, 进而得到具体的控制律. 从理论上证明了采用所设计的鲁棒预测控制律时系统是输入状态稳定的, 并通过仿真结果验证了所设计的鲁棒预测控制算法是可行和有效的.

参考文献(References)

- [1] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [2] Alejandro H González, Darci Odloak. Enlarging the domain of attraction of stable MPC controllers, maintaining the output performance[J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 1080-1085.
- [3] Scokaert P O M, Rawlings J B, Meadows E S. Discrete-time stability with perturbations: Application to model predictive control[J]. *Automatica*, 1997, 33(3): 463-470.
- [4] 耿晓军, 席裕庚. 基于 HM 非线性模型的滚动时域 H_∞ 控制[J]. *自动化学报*, 2000, 26(1): 68-73.
(Geng X J, Xi Y G. Receding horizon H_∞ control based on HM nonlinear model[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(1): 68-73.)
- [5] Kim K B. Disturbance attenuation for constrained discrete-time systems via receding horizon controls[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(5): 797-801.
- [6] Othare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [7] Lee Y I, Kouvaritakis B. Robust receding horizon predictive control for systems with uncertain dynamics and input saturation[J]. *Automatica*, 2000, 36(10): 1497-1504.
- [8] Limon D, Bravo J M, Alamo T, et al. Robust MPC of constrained nonlinear systems based on interval arithmetic[J]. *IEE Proc Control Theory Applications*, 2005, 152(3): 325-332.
- [9] Bravo J M, Alamo T, Camacho E F. Robust MPC of constrained discrete-time nonlinear systems based on approximated reachable sets[J]. *Automatica*, 2006, 42(10): 1745-1751.
- [10] Limon D, Alamo T, Salas F, et al. Input to state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties[J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 797-803.
- [11] 何德峰, 季海波, 郑涛. 持续有界扰动下的非线性 H_∞ 鲁棒预测控制[J]. *自动化学报*, 2008, 34(2): 215-219.
(He D F, Ji H B, Zheng T. Nonlinear H_∞ robust predictive control with bounded persistent disturbances[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(2): 215-219.)
- [12] 王亚锋, 张友安, 孙富春, 等. 在线优化线性反馈增益的非线性鲁棒预测控制方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(11): 1745-1748.
(Wang Y F, Zhang Y A, Sun F C, et al. A nonlinear robust model predictive control method with the linear feedback gain being obtained through online optimization[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(11): 1745-1748.)
- [13] Ramon E Moore. *Introduction to interval analysis*[M]. Prentice Hall, 2008: 53-66.
- [14] Hansen E. *Global optimization using interval analysis*[M]. Marcel Dekker, 1992: 112-136.
- [15] Kearfortt R B. *Rigorous global search: continuous problems*[M]. Kluwer, 1996: 88-95.

(上接第1027页)

- [8] 索寒生, 储洪胜, 金以慧. 带有风险规避型销售商的供需链协调[J]. *控制与决策*, 2004, 19(9): 1042-1049.
(Suo H S, Chu H S, Jin Y H. Supply chain coordination with risk aversion retailers[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(9): 1042-1044.)
- [9] 刘珩, 潘景铭, 唐小我. 带有风险规避型销售商的供需链协调[J]. *控制与决策*, 2010, 25(8): 1149-1154.
(Liu H, Pan J M, Tang X W. Research on perishable product supply chain markdown money contract with a loss-averse retailer[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(8): 1149-1154.)
- [10] Daniel K, Amos T. Prospect theory: An analysis of decisions under risk[J]. *Econometrica*, 1979, 47(2): 263-291.
- [11] Kouvelis P, Zhao W H. The newsvendor problem and price-only contract when bankruptcy costs exist[J]. *Production and Operations Management*, 2011, 20(6): 921-936.
- [12] Cachon G P. *Supply chain coordination with contracts*[C]. *Handbook of Operations Research and Management Science*. Amsterdam: Elsevier B V, 2003: 229-339.