文章编号:1001-0920(2013)07-0972-06

基于 WKGV-KICA 的盲源信号分离算法

李 军,郭 琳

(兰州交通大学自动化与电气工程学院,兰州 730070)

摘 要: 基于核学习的非线性映射能力,提出一种小波核广义方差的核独立成分分析算法 WKGV-KICA. 小波核函数 具有近似正交,适用于信号局部分析的优点. 与互信息相联系,将核广义方差作为对比函数对统计独立性进行衡量, 可以获得理想的数学特性. 将该算法应用于宽范围的盲源分离问题的实例中,并与现有算法进了比较. 实验结果表 明,WKGV-KICA 算法在同等条件下的分离精度更高,而且性能更好. 关键词: 盲源信号分离;核独立成分分析;核广义方差;小波核

中图分类号: TN911 文献标志码: A

Blind source separation algorithm based on WKGV-KICA algorithm

LI Jun, GUO Lin

(School of Automation and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China. Correspondent: LI Jun, E-mail: lijun691201@mail.lzjtu.cn)

Abstract: Based on the nonlinear mapping ability of kernel learning, an algorithm of kernel independent component analysis based on wavelet kernel generalized variance(WKGV-KICA) is proposed. The wavelet kernel which is characterized by approximate orthogonality has the advantage in local signal analysis. Related to mutual information theory, the contrast function defined by kernel generalized variance(KGV) has desirable mathematical properties as the measure of statistical independence. The algorithm is applied to wide-ranging blind source separation problems and compared with existing algorithms. Experimental results show that WKGV-KICA algorithm can achieve higher separation accuracy and better properties under the same condition.

Key words: blind source separation(BSS); kernel independent component analysis(KICA); kernel generalized variance (KGV); wavelet kernel

0 引 言

盲源信号分离(BSS)^[1-2]是指仅从若干观测到的 信号中恢复出原本无法通过观测直接获取的原始信 号的过程.BSS发展至今,已衍生出许多不同的求解 方法,其中最重要的是独立成分分析(ICA)^[3-5].

在解决大规模、非参数分类和回归问题方面,核 学习方法已成为重要的计算工具. ICA 作为一种半参 数模型,具有强非参数的特点,求解的关键在于特定 非线性经验对比函数的选取^[3],而现有的算法在这方 面往往具有一定的局限性. 核学习方法将对比函数延 伸至再生核希尔伯特空间进行求解,增强了对非线性 问题的求解能力,由于其具有灵活的非参数特点,在 BSS 问题求解中可获得更加精确、鲁棒性的结果.

与互信息相联系,核广义方差(KGV)的核独立

成分分析 (KICA) 算法^[6]利用广义方差的形式对广义 特征值的全局谱进行分析, 基于核的学习方法提出 了一种新的 ICA 对比函数, 而且不同核函数类型的选 取将影响核学习方法性能的优劣. 与常规核函数相 比, 多维张量积小波核函数是正交或近似正交的, 具 有小波信号拥有的多分辨分析和特征提取的优点^[7], 考虑将小波核函数引入 KICA, 可以进一步改进算法 的性能. 为此, 本文通过构造平移不变小波核函数, 并 结合 KGV 提出一种小波核广义方差 WKGV-KICA 算 法. 将 WKGV-KICA 算法应用于复杂的非线性盲源信 号分离问题, 并与现有的 ICA 算法、基于常规核函数 的 KICA 算法进行性能比较, 以验证 WKGV-KICA 算 法的有效性.

基金项目: 甘肃省财政厅基本业务费项目(620026); 甘肃省硕导项目(1104-09).

收稿日期: 2012-04-09; 修回日期: 2012-09-07.

作者简介: 李军(1969-), 男, 教授, 博士, 从事计算智能、机器学习、系统建模控制等研究; 郭琳(1986-), 男, 硕士生, 从 事模式识别、机器学习的研究.

1 基于小波核广义方差的 KICA 算法

1.1 核广义方差

KICA中对于随机变量相似性的评价标准来源于 CCA的理论^[6,8]. CCA借助提取成分的思路,将提取 出的典型成分作为变量的综合.通过衡量典型成分之 间的相关性,从而获取变量之间的相关性.延伸至特 征空间中,典型成分之间的相关性可以表示为

$$\rho_{\mathcal{F}} = \max_{f_1, f_2 \in \mathcal{F}} \frac{\operatorname{cov}\left(f_1(x_1), f_2(x_2)\right)}{(\operatorname{var} f_1(x_1))^{1/2} (\operatorname{var} f_2(x_2))^{1/2}} = \max_{f_1, f_2 \in \mathcal{F}} \frac{\alpha_1^{\mathrm{T}} K_1 K_2 \alpha_2}{(\sqrt{-1} K_1 K_2 \alpha_2)^{1/2} (\sqrt{-1} K_1 K_2 \alpha_2)}.$$
 (1)

 $(\alpha_1^{T}K_1K_1\alpha_1)^{1/2}(\alpha_2^{T}K_2K_2\alpha_2)^{1/2}$. (1) 其中: 变量 $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 可看作特征映射 $Φ(x_1)$ 和 $Φ(x_2)$ 的典型成分, K_1 和 K_2 是其对应的 Gram 矩阵, α_1 和 α_2 是相应的系数矩阵. 若定义广义特征值 $\lambda = 1$ + ρ_F , 则求解式 (1)等价于求解如下广义特征值问题:

$$\begin{bmatrix} K_1^2 & K_1 K_2 \\ K_2 K_1 & K_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = (1 + \rho_F) \begin{bmatrix} K_1^2 & 0 \\ 0 & K_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$
(2)

简写为 $\kappa \alpha = \lambda D \alpha$.寻找特征空间最大相关性的典型 成分等价于寻找最大的广义特征值 $\lambda_{max} = 1 + \rho_{\mathcal{F}_{max}}$, 这实际上等价于寻找最小的广义特征值 $\lambda_{min} = 1 - \rho_{\mathcal{F}_{max}}$.

由互信息[9]的定义

$$I(x_1, x_2) = \iint p(x_1, x_2) \log \left[\frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1)p(x_2)} \right] dx_1 dx_2, \quad (3)$$
能够得到高斯分布的自由变量之间的互信息,可以写成如下对数形式.

$$I(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\det C}{\det C_{11} \det C_{22}} \right), \qquad (4)$$

其中协方差矩阵 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$. 在该互信息表达 式中, 行列式的比值 det $C/(\det C_{11} \det C_{22})$ 称为广义 方差.

将广义方差延伸至再生核空间进行核化,可以得 到如下的推广形式^[6]:

基于式(4)高斯变量互信息的形式,定义KGV形式的对比函数为

$$\hat{I}(K_1, K_2) = -\frac{1}{2} \log \hat{\delta}_{\mathcal{F}}(K_1, K_2) = -\frac{1}{2} \log \prod_i (1 - \rho_i^2).$$
(6)

虽然式(6)是由高斯变量的互信息推演得到的,但由 于再生核的特性,对于原始空间中非高斯变量的互信 息度量,本质上也提供了很好的逼近,而且当且仅当 式(6)等于0时,源信号向量之间的互信息达到最小, 同时最大的ρ趋近于0.这表明典型成分之间的相关 性已经达到最小,同时它们所代表的源信号向量也最 不相关,从而达到了分离的目的.

1.2 WKGV-KICA 算法

KICA 算法中的核函数选取对算法的性能有较 大影响, 原则上满足 Mercer 定理的核函数都可以选 取, 而现有的 KICA 算法多采用高斯核函数, 即k(x, y)= exp($-||x - y||^2/2\sigma^2$).小波核函数具有小波信号局 部分析、多分辨率分析的优点, 能够以很高的精度逼 近任意函数, 而常规核函数不具备这样的优势.其次, 小波核函数是正交或近似正交的, 而常规核函数是相 关甚至冗余的.因此, 本文算法依据小波核函数强大 的非线性逼近能力, 通过构造一类可允许的多维张 量积小波核函数, 并结合 KGV 理论实现了一种新的 WKGV-KICA 算法.

为构造一种平移不变小波核函数,不失一般性,可以选择 Morlet 母小波 $h_1(\mathbf{x})$ 和 Mexican hat 母小波 $h_2(\mathbf{x})$ 如下:

$$h_1(\boldsymbol{x}) = \cos(1.75\|\boldsymbol{x}\|) \exp(-\|\boldsymbol{x}\|^2/2),$$
 (7)

$$h_2(\boldsymbol{x}) = (1 - \|\boldsymbol{x}\|^2) \exp(-\|\boldsymbol{x}\|^2/2).$$
 (8)

若记尺度因子为 a,σ , 且 $x, y \in \mathbf{R}^N, x^i, y^i, a, \sigma \in R$, 则可以证明如下所示的小波核函数是一种可允许的 多维张量积的支持向量核函数^[7]:

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\left(\cos \frac{1.75(x^i - y^i)}{a} \right) \times \exp\left(-\frac{(x^i - y^i)^2}{2\sigma^2} \right) \right),$$
(9)

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\left(1 - \frac{(x^{i} - y^{i})^{2}}{a^{2}} \right) \times \exp\left(- \frac{(x^{i} - y^{i})^{2}}{2\sigma^{2}} \right) \right).$$
(10)

与高斯核函数相比,小波核函数增加了一个可调 参数*a*,将各维输入通过乘积的形式构成核函数,体现 了其对输入各维进行局部分析的特点,可调参数体现 了小波核函数各维的多分辨关系.

本文算法的架构如下,首先给定一组观测数据向 量 y^1, y^2, \dots, y^L ,并给出一个参数矩阵W,假设 $\tilde{x} = Wy$,可以得到一组估计的源信号向量 $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^L$, 其m个变量服从一组中心化的Gram矩阵 K_1, K_2 , \dots, K_m .由此将式(6)推广至m个变量的情况,依赖 于参数矩阵W的Gram矩阵构成一个新的对比函数

$$C(W) = I(K_1, K_2 \cdots, K_m) = -\frac{1}{2} \log \hat{\delta}_{\mathcal{F}}(K_1, K_2, \cdots, K_m),$$
(11)

其中 $\hat{\delta}_{\mathcal{F}}(K_1, K_2, \dots, K_m) = \det \mathcal{K}' / \det \mathcal{D}'$. 与式(5) 相似, $\mathcal{K}', \mathcal{D}'$ 是由Gram矩阵构成的分块矩阵. 利用在 Stiefel 流型空间的梯度^[6]

$$\nabla C = \frac{\partial C}{\partial W} - W \left(\frac{\partial C}{\partial W}\right)^{\mathrm{T}} W, \qquad (12)$$

借助最小化梯度获取*C*(W)全局最优解对应的参数 矩阵W,即可分离出原始的独立变量.

给定L为采样点数目, m为源信号向量的数目, 则具体算法如下:

1) 对观测数据向量 y¹, · · · , y^L 进行中心化处理;

2) 对 y^1, \cdots, y^L 进行白化处理;

3) 根据估计的源信号向量求取公式 $\tilde{x} = Wy$,可以得到一组以W为变量的估计的源信号向量 $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^L$,并计算中心化的小波核 Gram 矩阵 K_1, \dots, K_m ;

4) 计算 $\hat{\delta}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \cdots, \mathcal{K}_m) = \det \mathcal{K}' / \det \mathcal{D}';$

5) 利用式(11)的*C*(W)定义,结合式(12)的梯度 算法,通过全局最优*C*(W)获取参数矩阵W,从而实 现所需的源信号分离.

由于 Gram 的谱衰减较慢, 且高维的核矩阵会带 来计算的复杂性, 在算法的具体实现过程中, 若直接 针对高维 Gram 矩阵进行求解, 则其计算复杂度为 $O(m^3L^3)$.为解决这一问题, 使用不完整的 Cholesky 分解算法, 以实现对核 Gram 矩阵的低秩逼近. 若对小 波核矩阵进行低秩逼近时最大秩为 M, 则在 WKGV -KICA 算法中 WKGV 的计算复杂度为 $O(m^2M^2L + m^3M^3)$, 因为 L 远大于 mM, 所以后一项可以忽略, Stiefel 流型空间梯度微分计算复杂度为 $O(m^2M^2L)$. 可以看出, 算法时间复杂度与采样点数目 L 成线性关 系, 明显降低了高维核矩阵的求解难度.

2 盲源信号分离实验

下面应用所提出的WKGV-KICA 算法对混合语 音信号分离、图像恢复和理解及生物医电信号 ECG 检测进行盲源信号分离实验.为了评价算法的性能, 与现有 ICA 算法及基于常规核函数的 KCCA-KICA、 KGV-KICA 算法进行比较,用于对比的核函数采用多 项式核函数 $k(x,y) = (1+xy)^d$ 和高斯核函数 $k(x,y) = e^{-||x-y||^2/2\sigma^2}$.

算法的评价指标如下:

1) 相关系数. 根据 ICA 的定义 y = Ax, 设 x_i 为源 信号矢量 x 中的第 i 个源信号, \tilde{x} 为 x 的估计, 而 \tilde{x}_j 为 估计的源信号 \tilde{x} 中的第 j 个分量, 则 x_i 与其估计 \tilde{x}_j 之 间的相关系数为 $\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, \tilde{x}_j)}{\sqrt{\text{cov}(x_i, x_i)\text{cov}(\tilde{x}_j, \tilde{x}_j)}}$. 当分 离效果较好时, $|\rho_{ij}| \approx 1$.

2) 性能指数

$$\frac{1}{2m} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \Big(\frac{\sum_{j=1}^{m} |v_{ij}|}{\max_k |v_{ik}|} - 1 \Big) + \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\sum_{i=1}^{m} |v_{ij}|}{\max_k |v_{kj}|} - 1 \Big) \Big\},$$

其中 v_{ij} 为矩阵V = WA第i行第j列的元素. PI 越接近0, 分离效果越好.

2.1 混合语音信号分离

考虑在一个典型房间内通过麦克风阵列采集信 号并进行混合语音分离的应用问题.实验数据取自 NTT通信科学实验室在网络中公开的用于学习和测 试的标准语音信号数据集^[10].选取的4段男女语音信 号的采样时间长度为7s,采样频率为8000Hz,采样 点个数*L* = 56000,用随机的4×4矩阵描述每个麦克 风与交谈者之间的距离信息.

在实验中,借助交叉验证的方法,多项式核函数 和高斯核函数的超参数分别取为 $d = 3, \sigma = 1$ 时, KICA 算法的分离效果较好.表1给出了在较优的一 组超参数条件下,即 Morlet 小波核函数超参数为 $\sigma = a = 1.6$, Mexican hat 小波核函数超参数为 $\sigma = a = 2.6$ 时的算法性能比较.由表1可以看出,WKGV-KICA 算法的性能最好,其PI超过基于常规核函数的KICA 算法一个数量级.

表1 WKGV-KICA 算法与其他算法的性能参数比较

算法	相关系数	PI
最大化峭度的 ICA 算法	0.9574	0.0325
最大化负熵的 ICA 算法	0.9576	0.0248
最大似然估计的 ICA 算法	0.9571	0.0417
Poly-KCCA-KICA	0.9985	0.0465
Poly-KGV-KICA	0.9990	0.0193
Gauss-KCCA-KICA	0.9995	0.0181
Gauss-KGV-KICA	0.9998	0.0105
Morlet-WKGV-KICA	0.9999	0.0052
Mexican hat-WKGV-KICA	0.9999	0.0040

另外,多次实验结果表明,小波核函数的尺度因 子 a 在 0.1~10之间,超参数σ在 0.8~5之间调整时, WKGV-KICA 算法均能取得较好的分离效果,显示出 所提出的算法具有良好的鲁棒性.

在算法的实现中,采用不完整 Cholesky 分解算法 将高维核 Gram 矩阵的秩逼近至 *M* = 5 时,显著降低 了时间复杂度.采用 WKGV-KICA 算法及其他各种算 法对混合语音信号实施盲源分离的效果如图 1 所示.

2.2 图像恢复和理解

实验数据来源于文献[3].选取3张灰度图像,其 分辨率为512×256.在图像中混入高斯白噪声以增加 图像恢复的难度,混合矩阵 A 取随机的3×3矩阵.在 实验中,借助交叉验证的方法,多项式核函数和高斯 核函数的超参数选取同2.1节.



图1 混合语音信号盲源信号分离效果图

在较优的一组超参数条件下,即 Morlet 小波核函 数超参数为 $\sigma = a = 1.6$, Mexican hat 小波核函数超参 数为 $\sigma = a = 2.6$ 时的算法性能比较如表 2 所示. 由表 2 可以看出, ICA 算法对图像的恢复性能较差. 采用 常规核函数的 KICA 算法将问题映射到特征空间进 行求解,在一定程度上提高了分离精度. 与之相比, WKGV-KICA 算法的性能最好,小波核函数近似正交 的优势使得算法的性能得到进一步改善,对图像的 恢复效果优于基于常规核函数的 KICA 算法以及各 种 ICA 算法.

表 2	WKGV-KICA 算法与其他算法的性能参数	ι 比较

算法	相关系数	PI
最大化峭度的 ICA 算法	0.9289	0.0850
最大化负熵的 ICA 算法	0.9246	0.0934
最大似然估计的 ICA 算法	0.9289	0.0849
Poly-KCCA-KICA	0.9390	0.0490
Poly-KGV-KICA	0.9373	0.0296
Gauss-KCCA-KICA	0.9407	0.0452
Gauss-KGV-KICA	0.9492	0.0251
Morlet-WKGV-KICA	0.9634	0.0168
Mexican hat-WKGV-KICA	0.9698	0.0163

另外,多次实验结果表明,小波核函数的尺度因 子 a 在 1~10之间,超参数 σ 在 1.0 ~ 3.5 之间调整时,



图 2 混合图像信号盲源信号分离效果图



对图像的恢复性能均很理想,显示出所提出的算法具 有良好的鲁棒性.

具体实现中,采用不完整 Cholesky 分解算法将高 维核 Gram 矩阵的秩逼近至 M = 4 时,显著降低了时 间复杂度.采用WKGV-KICA算法及其他各种算法对 混合图像信号实施盲源分离的效果如图2所示.

2.3 生物医电信号 ECG 检测

实验数据来源于 MIT-BIH 在网络中公开的非侵 入性胎儿心电图信号数据集[11].利用该数据集模拟 孕妇体外获取胎儿心电图信号的过程,心电信号与干 扰信号的混合矩阵A取随机的3×3矩阵.

在实验中,借助交叉验证的方法,多项式核函数 与高斯核函数的超参数选取同2.1节.表3给出了在 较优的一组超参数条件下,即 Morlet 小波核函数超参 数为 $\sigma = a = 1.6$, Mexican hat 小波核函数超参数为 $\sigma = a = 2.6$ 时的算法性能比较.由表3可以看出,基 于高斯核函数的KICA算法对心电图信号分离的效 果相比ICA算法具有明显改进,而使用Morlet小波 核和 Mexican hat 小波核的 WKGV-KICA 算法的性能 更好.WKGV-KICA 算法对胎儿心电图信号的还原效 果明显优于基于常规核函数的KICA算法以及各种 ICA 算法,能够为临床诊断提供帮助.

WKGV-KICA 算法与其他算法的性能参数比较 表 3

算法	相关系数	PI
最大化峭度的 ICA 算法	0.8578	0.0586
最大化负熵的 ICA 算法	0.8784	0.0698
最大似然估计的 ICA 算法	0.8578	0.0586
Poly-KCCA-KICA	0.9931	0.0518
Poly-KGV-KICA	0.9991	0.0380
Gauss-KCCA-KICA	0.9994	0.0472
Gauss-KGV-KICA	0.9996	0.0221
Morlet-WKGV-KICA	0.9998	0.0181
Mexican hat-WKGV-KICA	0.9998	0.0175

另外,多次实验结果表明,小波核函数的尺度因 子a在0.5~3.0之间调整, 超参数 σ 在1.2~3.0之间 调整时,同样能取得较好的分离效果,显示出所提出 的算法具有良好的鲁棒性.

在算法实现中,利用不完整 Cholesky 分解算法将 高维核 Gram 矩阵的秩逼近至 M = 4时,显著降低了 时间复杂度.采用WKGV-KICA算法及其他各种算法 对心电图信号实施盲源分离的效果如图3所示.

结 论 3

本文基于核学习强大的非线性映射能力,提出了 一种WKGV-KICA算法. 引入了 Morlet和 Mexican-hat 两种小波核函数,进一步提高了 KICA 算法的性能,在 展现非线性特性的核函数选择上,WKGV-KICA 通过 构造多维张量积小波核函数,保持了小波函数近似正 交及多分辨分析的优点.最后通过3个不同领域的非 线性盲源信号分离实验,验证了WKGV-KICA算法的 有效性.WKGV-KICA算法作为ICA和KICA算法的 改进与延伸,为非线性盲源信号的分离提供了一条新 的有效途径.

参考文献(References)

- 陶涛,黄高明,赵治华. 后非线性混叠信号盲源分离算法 综述[J]. 控制与决策, 2010, 25(8): 1121-1128.
 (Tao T, Huang G M, Zhao Z H. Survey on blind source separation algorithms for post-nonlinear mixtures[J]. Control and Decision, 2010, 25(8): 1121-1128.)
- Wen Xinling, Chen Yu. Research of blind source separation on the speech signal based on natural gradient method[J]. Information Technology J, 2012, 11(3): 372-375.
- [3] Hyvarinen A, Karhunen J, Oja E. Independent component analysis[M]. New York: John Wiley and Sons, 2001: 147-227.
- [4] Gutch H W, Gruber P, Yeredor A, et al. ICA over finite fields — Separability and algorithms[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2012, 92(8): 1796-1808.

- [5] Reyhani N, Ylipaavalniemi J, Vigario R, et al. Consistency and asymptotic normality of FastICA and bootstrap FastICA[J]. Signal Processing, 2012, 92(8): 1767-1778.
- [6] Bach F R, Jordan M I. Kernel independent component analysis[J]. J of Machine Learning Research, 2002, 3: 1-48.
- [7] 李军,董海鹰.基于小波核偏最小二乘回归方法的混沌 系统建模研究[J].物理学报, 2008, 57(8): 4756-4765.
 (Li J, Dong H Y. Modelling of chaotic systems using wavelet kernel partial least squares regression method[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(8): 4756-4765.)
- [8] Alzate Carlos, Suykens Johan A K. A regularized kernel CCA contrast function for ICA[J]. Neural Networks, 2008, 21(2/3): 170-181.
- [9] Haykin S. Neural network and learning machine[M]. 3rd ed. Canada: Prentice Hall, 2008: 484-541.
- [10] Sawada H. BSS sound demonstration[EB/OL]. (2012-04-06)[2012-09-05]. http://www.kecl.ntt.co.jp/icl/signal/ sawada/demo/bss2to4/index.html.
- [11] Sober M M. Non-invasive fetal electrocardiogram database[EB/OL]. (2012-04-06)[2012-09-05]. http://www. physionet.org/physiobank/database/nifecgdb.

(上接第971页)

- [29] Wu X L, Liu L, Zhu Q M, et al. U-model-based adaptive control for a class of stochastic non-linear dynamic plants with unknown parameter[J]. Int J of Modelling, Identification and Control, 2011, 13(3): 135-143.
- [30] Ali S S A, Fouad M A, Muhammad S. U-model based adaptive tracking scheme for unknown MIMO bilinear systems[C]. 2006 1st IEEE Conf on Industrial Electronics and Applications. Wuhan: IEEE, 2006: 473-486.
- [31] Muhammad S, Butt N R. U-Model based adaptive IMC for nonlinear dynamic plant[C]. Proc of the 10th IEEE Int Conf on Emerging Technologies & Factory Automation. Catania: IEEE, 2005, 1: 955-959.
- [32] Butt N R, Muhammad S. Adaptive tracking of nonlinear dynamic plants, using the U-model[J]. Proc of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: J of Systems and Control Engineering, 2006, 220(3): 473-487.
- [33] Butt N R, Muhammad S. Higher-order neural network based root-solving controller for adaptive tracking of stable nonlinear plant[C]. IEEE Int Conf on Engineering of Intelligent Systems. Islamabad: IEEE, 2006: 22-23.
- [34] Muhammad S, Butt N R. Utilizing higher-order neural networks in U-model based controllers for stable nonlinear plants[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2011, 9(3): 489-496.

- [35] Tahir K, Muhammad S. Innovative inverse control techniques for adaptive tracking of nonlinear dynamic plants[C]. IEEE Int Conf on Engineering of Intelligent Systems. Beijing: IEEE, 2006: 240-245.
- [36] Tahir K, Muhammad S. Adaptive feed-forward control of thermal heating process[J]. IEICE Electronics Express, 2006, 13(9): 184-190.
- [37] Muhammad S, Tahir K. Newton-Raphson based adaptive inverse control scheme for tracking of nonlinear dynamic plants[C]. The 1st Int Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics. Harbin: IEEE, 2006: 1339-1343.
- [38] Ali S S A, Fouad M A, Jamil M B. Feedback analysis of U-model via small gain theorem[C]. The 10th WSEAS Int Conf on Automatic Control, Modelling and Simulation. Istanbul: Springer, 2008: 63-68.
- [39] Ali S S A, Fouad M A, Muhammad S, et al. MIMO U-model based control: Real-time tracking control and feedback analysis via small gain theorem[J]. WSEAS Trans on Circuits and Systems, 2008, 7(7): 610-619.
- [40] Chaal H. A chemical reactor benchmark for adaptive control using U-Model and NARMA-L2 techniques[C].
 Proc of the 2007 Int Conf on Control, Automation and Systems. Seoul: IEEE, 2007: 2871-2875.