

文章编号: 1001-0920(2013)08-1277-04

无抖振离散滑模趋近律

刘希, 孙秀霞, 董文瀚, 杨朋松

(空军工程大学 航空航天工程学院, 西安 710038)

摘要: 针对离散滑模趋近律形式多样且容易产生高频抖振的问题, 提出了离散滑模趋近律的一般形式, 并给出了无抖振的到达条件及其理论证明, 从一般意义上为离散滑模趋近律的设计提供了理论依据. 针对满足匹配条件的不确定系统, 给出了切换函数收敛域的推导方法, 推导了无抖振的最小收敛域. 以典型的高氏指数趋近律为例, 利用无抖振的到达条件, 对其一般形式进行了无抖振改进, 验证了所提出方法的有效性.

关键词: 趋近律; 无抖振; 离散滑模控制

中图分类号: TP13

文献标志码: A

Chattering-free trending law for discrete-time sliding mode control

LIU Xi, SUN Xiu-xia, DONG Wen-han, YANG Peng-song

(College of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China.

Correspondent: LIU Xi, E-mail: liuxiafeu@126.com)

Abstract: As the trending law of discrete-time sliding mode control is in different forms and difficult to avoid chattering, a general form of it is proposed, and the reaching condition without chattering is given with the academic proof, which provides a theory basis in general for the design and research of the chattering-free trending law for the discrete-time sliding mode control. As to the uncertain system that satisfies matching condition, the method to infer the convergent region of the switch function and the minimal value of it without chattering are provided. The classical exponential trending law is improved as a case of using the reaching condition without chattering based on its general form, which shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: trending law; chattering-free; discrete-time sliding mode control

0 引言

变结构控制方法通过控制量的切换使系统状态沿着滑模面运动, 在受到参数摄动和外界干扰时系统具有不变性, 正是这种特性使得变结构控制方法受到各国学者的普遍重视^[1]. 由于数字控制器的广泛使用, Dobe等^[2]首次考虑了离散系统的变结构控制, 并提出了与连续系统相对应的到达条件. Milosavljevic^[3]提出了准滑动模态的思想, 进而指出上述条件并不充分. Sarpturk等^[4]研究了满足匹配条件的不确定性离散线性时不变系统的稳定性, 提出了一种新型的离散滑模到达条件, 在此基础上又提出了离散控制信号必须有界的理论. Furuta^[5]则以Lyapunov函数的形式给出了新的到达条件, 并提出了基于等效控制的离散滑模变结构控制算法. Young等^[6]进一步完善了基于“等效控制”的设计思想. 我国学者高为炳^[7]给出了准滑动模

态的定义及其详细的物理解释, 并提出了更一般的到达条件, 即离散趋近律, 在揭示离散滑模变结构控制的运动机理方面前进了一大步. 但是高氏趋近律定义的到达条件要求运动点一旦穿越切换面, 它的后继步均从另一面穿越切换面, 并且一直进行下去. 这样的定义保证了滑模控制的强鲁棒性, 但会导致高频抖振的出现. 文献[8]采用准滑模控制的思想, 引入幂次函数替换高氏趋近律中的符号函数, 消除了抖振, 但不能保证切换函数在有限时间内到达零. 文献[9]采用逻辑判断的形式, 消除了切换函数高频抖振并能在有限时间内到达零, 但是没有从一般意义上给出切换函数无抖振到达的条件和设计方法. 文献[10]基于死区的方法, 提出了一种离散趋近律的准滑模控制方法, 消除了高频抖振, 但是切换函数只能单调地向死区收敛, 不能完全到达滑动模态.

收稿日期: 2012-03-24; 修回日期: 2012-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60904038).

作者简介: 刘希(1986—), 男, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 孙秀霞(1962—), 女, 教授, 博士生导师, 从事先进控制理论与应用等研究.

从所查阅的文献来看,虽然很多学者从不同的角度提出了削弱或消除抖振的有效方法,但都没有从本质上说明消除抖振的内在机理,不具有一般性,难以灵活运用.基于此,本文提出了离散滑模趋近律的一般形式,给出了一般形式下切换函数无抖振的到达条件及其理论证明,从一般意义上为离散滑模趋近律的设计及其消抖方法的研究提供了理论依据.针对满足匹配条件的不确定系统,给出了切换函数收敛域的一般推导方法及其无抖振条件下的最小收敛域.利用无抖振的到达条件,只需对传统的趋近律进行简要改进,便可在保持传统趋近律原有优点的基础上彻底消除抖振,保证滑动模态的良好性能.

1 离散趋近律的一般形式

趋近律描述了变结构控制系统中的运动过程,其最根本的特征是趋近速度的描述.为了统一离散系统与连续系统趋近律的表达形式,本文通过引入趋近速度函数,提出离散趋近律的一般形式为

$$s(k+1) = s(k) + Tdf(s(k), T, \cdot). \quad (1)$$

其中: T 为采样周期, $df(s(k), T, \cdot)$ 为趋近速度函数.由式(1)可以看出,趋近律的设计实际上是趋近速度函数的设计.当 $T \rightarrow 0^+$ 时, $df(s(k), T, \cdot) \rightarrow \dot{s}$, 离散趋近律的一般形式统一于连续系统的趋近律.典型的高氏指数趋近律可以表示为

$$\begin{cases} s(k+1) = s(k) + Tdf(s(k), T, \cdot), \\ df(s(k), T, \cdot) = -qs(k) - \varepsilon \text{sign}(s(k)), \\ \varepsilon > 0, 0 < qT < 1, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数.由式(2)可以看出,当 $|s(k)| \rightarrow 0^+$ 时, $|s(k+1)| \rightarrow \varepsilon T$.这便是高氏离散趋近律从理论上不能消除抖振的根本原因.

2 无抖振的到达条件及其收敛域分析

2.1 无抖振的到达条件

定义 1 一步可达边界 $\delta_{\text{sup}}(T)$: 采样周期为 T 时, $\exists \delta(T) > 0$, 当 $|s(k_0)| < \delta(T)$ 时, 若存在可行控制序列 $u(k) (k \geq k_0)$, 使 $s(k) = 0 (k > k_0)$, 则有

$$\delta_{\text{sup}}(T) = \sup \delta(T). \quad (3)$$

利用一步可达边界的概念,提出离散趋近律的无抖振到达条件为

$$\begin{cases} -ss' < Tdf(s, T, \cdot)s' < -\varepsilon, s(k) \notin S(T); \\ Tdf(s, T, \cdot) = -s, s(k) \in S(T). \end{cases} \quad (4)$$

其中: $S(T) = \{s : |s| < q\delta_{\text{sup}}(T), 0 < q < 1\}$, $s' = \text{sign}(s)$, $q\delta_{\text{sup}}(T) > \varepsilon > 0$.

证明 下面分两种情况简要证明.

1) 当 $s(k) \notin S(T)$ 时:

① 若 $s(k) > 0$, 则由到达条件式(4), 有

$$-s(k) < Tdf(s(k), T, \cdot) < -\varepsilon. \quad (5)$$

将式(5)代入(1), 可得

$$0 < s(k+1) < s(k) - \varepsilon. \quad (6)$$

② 若 $s(k) < 0$, 则由到达条件式(4), 有

$$-s(k) > Tdf(s(k), T, \cdot) > \varepsilon. \quad (7)$$

将式(7)代入(1), 可得

$$s(k) + \varepsilon < s(k+1) < 0. \quad (8)$$

2) 当 $s(k) \in S(T)$ 时, 由到达条件式(4), 有

$$Tdf(s(k), T, \cdot) = -s(k). \quad (9)$$

将式(9)代入(1), 可得

$$s(k+1) = 0. \quad (10)$$

于是定义 1 得证. \square

结论 1 若离散趋近律的一般形式(1)满足到达条件(4), 则切换函数 s 将单调无抖振、无正负、交替地在有限采样周期内到达零并保持为零.

2.2 收敛域的推导

假设 1 趋近速度函数 $Tdf(s(k), T, \cdot)$ 随参数 $s(k)$ 单调递减, 即对于 $\forall s(k_1) < s(k_2)$, 下式成立:

$$df(s(k_1), T, \cdot) > df(s(k_2), T, \cdot). \quad (11)$$

定义 2 切换函数收敛上界 B_{sup} 定义为

$$B_{\text{sup}} = \min\{B : s(k) > B \Rightarrow s(k+1) < s(k)\}.$$

定义 3 切换函数收敛下界 B_{inf} 定义为

$$B_{\text{inf}} = \max\{B : s(k) < B \Rightarrow s(k+1) > s(k)\}.$$

定义 4 切换函数收敛域 B_s 定义为

$$B_s = [B_{\text{inf}}, B_{\text{sup}}]. \quad (12)$$

考虑如下线性参数不确定离散系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A)x(k) + \\ &\quad (B + \Delta B)u(k) + f(k). \end{aligned} \quad (13)$$

其中: ΔA 和 ΔB 为参数摄动, $f(k)$ 为外部干扰.假设系统(13)满足匹配条件, 即

$$\Delta A = B\tilde{A}, \Delta B = B\tilde{B}, f(k) = B\tilde{f}(k), \quad (14)$$

则系统(13)可写为

$$x(k+1) = Ax(k) + B[u(k) + d(k)], \quad (15)$$

其中 $d(k) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + \tilde{f}(k)$, 为系统受到的总干扰.

设计离散线性切换函数为

$$s(k) = Cx(k). \quad (16)$$

针对系统(15)的标称系统采用本文提出的离散趋近律的一般形式(1), 有

$$u(k) = -(CB)^{-1}[CAx(k) - s(k) - Tdf(s(k), T, \cdot)]. \quad (17)$$

将控制律 $u(k)$ 施加于实际的被控对象系统 (15) 时, 有

$$\begin{aligned} s(k+1) &= Cx(k+1) = \\ &CAx(k) + CBu(k) + CBd(k) = \\ &s(k) + Tdf(s(k), T, \cdot) + CBd(k). \end{aligned} \quad (18)$$

记

$$\Delta s(k) = Tdf(s(k), T, \cdot) + CBd(k), \quad (19)$$

则式 (18) 可以写为

$$s(k+1) = s(k) + \Delta s(k). \quad (20)$$

由定义 2, 收敛上界 B_{sup} 和下界 B_{inf} 可以写为

$$B_{\text{sup}} = \min\{B : s(k) > B \Rightarrow \Delta s(k) < 0\}, \quad (21)$$

$$B_{\text{inf}} = \max\{B : s(k) < B \Rightarrow \Delta s(k) > 0\}. \quad (22)$$

设 $CBd(k)$ 满足

$$d_{\text{min}} < CBd(k) < d_{\text{max}}. \quad (23)$$

若趋近速度函数 $df(s(k), T, \cdot)$ 满足假设 1, 则收敛上界 B_{sup} 和下界 B_{inf} 分别为

$$B_{\text{sup}} = B : Tdf(B, T, \cdot) = -d_{\text{max}}, \quad (24)$$

$$B_{\text{inf}} = B : Tdf(B, T, \cdot) = -d_{\text{min}}. \quad (25)$$

由离散趋近律的无抖振到达条件 (4), 可得

$$B_{\text{sup}} \geq d_{\text{max}}, \quad (26)$$

$$B_{\text{inf}} \leq d_{\text{min}}. \quad (27)$$

当且仅当 $[d_{\text{min}}, d_{\text{max}}] \subset S(T)$ 时, 无抖振离散滑模切换函数可以获得最小收敛域, 即

$$B_{s \text{ min}} = [d_{\text{min}}, d_{\text{max}}]. \quad (28)$$

3 传统趋近律的无抖振改进与仿真实验验证

将传统的趋近律对照无抖振到达条件式 (4), 可以发现传统趋近律算法不能无抖振到达的原因. 将传统趋近律进行适当改进, 使其满足无抖振的到达条件 (4), 即可在基本不改变原有趋近律性能的基础上实现无抖振到达的优良性能. 下面以高氏指数趋近律为例, 给出改进的方法.

3.1 高氏趋近律的改进

由高氏离散趋近律的一般形式 (2) 可知, 当 $|s(k)| < \varepsilon T / (1 - qT)$ 时, 不满足无抖振到达条件 (4). 于是定义

$$S(T) = \left\{ s(k) : |s(k)| < \frac{\varepsilon T}{1 - qT} \right\}. \quad (29)$$

利用式 (4), 可以改进高氏离散趋近律算法为

$$\begin{cases} s(k+1) = s(k) + Tdf(s(k)); \\ df(s(k)) = -qs(k) - \varepsilon \text{sign}(s(k)), s(k) \notin S(T); \\ df(s(k)) = -s(k)/T, s(k) \in S(T); \\ \varepsilon > 0, 0 < qT < 1. \end{cases} \quad (30)$$

再由式 (24) 和 (25) 即可求得改进趋近律的收敛域.

3.2 数值仿真分析

选用文献 [11] 提出的典型一阶倒立摆为对象进行仿真. 其离散状态方程如下:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + Tx_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + T[f(x_1(k), x_2(k)) + g(x_1(k), x_2(k))u(k)]. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f &= (107.9 \sin(x_1(k)) - \\ &1.5(x_2(k))^2 \cos(x_1(k)) \sin(x_1(k))) / \\ &(7.3 - 1.5(\cos(x_1(k)))^2), \\ g &= \cos(x_1(k)) / 7.3 - 1.5(\cos(x_1(k)))^2. \end{aligned}$$

取线性滑模面参数 $C = [c \ 1]$, 系统采样周期 $T = 0.01 \text{ s}$. 系统的初值 $x_1(0) = \pi/6, x_2(0) = 0$. 仿真时, 视 f 为干扰项. 利用式 (17) 可以得到控制输入

$$u(k) = \frac{df(s(k)) - cx_2(k)}{g(x_1(k), x_2(k))}.$$

取滑模面参数 $c = 15$, 分别采用高氏指数趋近律 (2), 本文改进的无抖振趋近律 (30) 以及如下基于幂次函数的离散滑模控制算法进行对比:

$$\begin{cases} s(k+1) = (1 - qT)s(k) - \varepsilon T \text{fal}(s(k), \alpha, \delta), \\ \delta > \left(\frac{\varepsilon T}{1 - qT}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0 < \frac{\varepsilon T}{1 - qT} < 1; \end{cases}$$

$$\text{fal}(s, \alpha, \delta) = \begin{cases} |s|^\alpha \text{sign}(s), & |s| \geq \delta; \\ \frac{s}{\delta^{1-\alpha}}, & |s| < \delta. \end{cases}$$

以上各趋近律控制参数如表 1 所示.

表 1 仿真控制参数

趋近律方法	控制参数
改进高氏趋近律	$\varepsilon = 0.1, q = 8$
高氏趋近律	$\varepsilon = 0.1, q = 8$
基于幂次函数的趋近律	$\varepsilon = 0.1, q = 8, \alpha = 0.5, \delta = 0.1$

图 1~图 3 分别为 3 种趋近律控制器输出、切换函数和系统状态输出的时间历程. 图中: 实线代表高氏趋近律, 虚线代表基于幂次函数的趋近律, 点线代表改进的高氏趋近律. 表面上看 3 条曲线基本重合, 但通过局部放大可以明显看出 3 种趋近律的区别. 从右边局部放大的曲线可以看出, 基于改进高氏趋近律

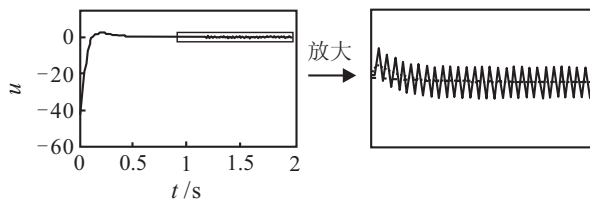


图 1 控制器输出的对比

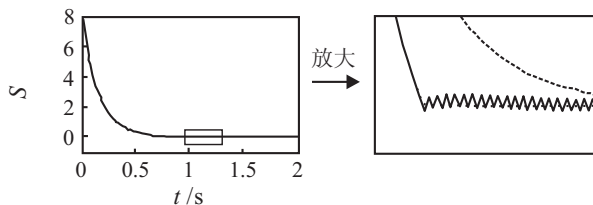


图 2 切换函数时间历程对比

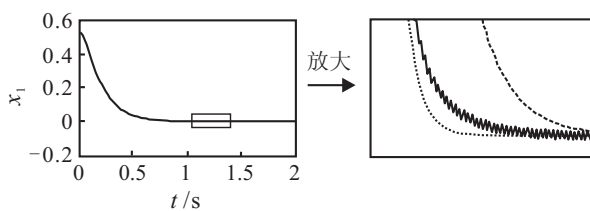


图 3 系统输出的对比

的方法彻底消除了抖振,且克服了基于幂次函数趋近律方法不能在有限时间到达零的缺点,同时被控系统在整个状态空间内具有良好的动态品质。

4 结 论

本文提出了离散滑模趋近律的一般表示形式,给出了切换函数无抖振的到达条件及其收敛域的推导方法,指出了无抖振离散滑模切换函数可以获得的最小收敛域。从一般意义上为离散滑模趋近律的设计和消抖方法的研究提供了理论依据。本文提出的改进方法简单实用,不增加控制参数,且具有一般性。基于本文方法对传统趋近律的改进,能够在保持原有趋近律方法优点的基础上彻底消除高频抖振,保证滑模控制方法具有良好的动态品质。

参考文献(References)

- [1] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 1-3.
(Liu J K. Matlab simulation for sliding mode control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 1-3.)

- [2] Dote Y, Hoft R G. Microprocessor based sliding mode controller for DC motor driver[C]. Industrial Applications Society Annual Meeting. Ohio, 1980: 641-645.
- [3] Sarpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control system[J]. Automation and Remote Control, 1985, 46(3): 307-314.
- [4] Milosavljevic C. General conditions for the existence of a quasi sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(10): 930-932.
- [5] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system[J]. Systems and Control Letters, 1990, 14(2): 145-152.
- [6] Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode control[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1999, 7(3): 328-342.
- [7] 高为炳. 离散时间系统的变结构控制[J]. 自动化学报, 1995, 21(2): 154-161.
(Gao W B. Variable structure control of discrete-time systems[J]. Acta Automatica Sinica, 1995, 21(2): 154-161.)
- [8] 孙彪, 孙秀霞. 基于幂次函数的离散滑模控制算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 285-288.
(Sun B, Sun X X. Algorithm of discrete-time sliding mode control based on power-function[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 285-288.)
- [9] 唐功友, 吕杉杉. 具有控制时滞的离散系统的无抖振滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1045-1048.
(Tang G Y, Lv S S. Chattering-free sliding-mode control for discrete systems with time-delay[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(6): 1045-1048.)
- [10] 刘涛, 刘贺平. 一种基于死区离散趋近律的准滑模控制[J]. 自动化学报, 2011, 37(6): 760-764.
(Liu T, Liu H P. Quasi-sliding-mode control based on discrete reaching law with dead Zone[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(6): 760-764.)
- [11] 金鸿章, 罗延明, 肖真, 等. 抑制滑模抖振的新型饱和函数法研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2007, 28(3): 288-291.
(Jin H Z, Luo Y M, Xiao Z, et al. Investigation of a novel method of saturation function for chattering reduction of sliding model control[J]. J of Harbin Engineering University, 2007, 28(3): 288-291.)