

空间框架结构几何非线性分析方法的改进研究¹⁾李文雄^{*,†} 马海涛^{*,2)} 陈太聪^{*}^{*}(华南理工大学土木与交通学院亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510640)[†](华南农业大学水利与土木工程学院, 广州 510642)

摘要 以几何精确梁理论为基础, 分别采用高阶拉格朗日插值和埃米特插值构造高精度空间梁单元. 提出基于单元层次平衡迭代的自由度凝聚方法, 以保证单元的通用性. 实现了基于载荷控制或柱面弧长控制的结构几何非线性分析算法. 算例研究结果表明, 提出的改进方法不但提高了计算效率, 而且还具有较高的数值稳定性; 特别是基于三次埃米特插值构造的单元表现出较好的性能, 适用于结构屈曲后分析.

关键词 非线性分析, 有限元, 几何精确梁, 有限转动, 埃米特插值, 内部自由度

中图分类号: O343.2 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-13-018

引言

结构几何非线性分析较常用的基本方法有完全拉格朗日列式法 (total Lagrange)、更新拉格朗日列式法 (updated Lagrange) 和随转坐标列式法 (co-rotation). 采用更新拉格朗日列式法和随转坐标列式法时, 一般先计算各载荷增量步的位移、变形及内力增量, 然后再累加得到响应总量. 尽管这种算法可以有效地简化分析过程, 但也带来了最终结果精度取决于步长选择的问题. 对于空间结构, 构形更新过程有可能产生计算误差, 影响算法的数值稳定性. 因此, 为了得到较可靠准确的分析结果, 通常需要选用较小的载荷步长. 这些问题的存在限制了这类方法的应用. 相对而言, 完全拉格朗日列式法在计算过程中采用固定的参考构形, 避免了构形更新所引起的误差; 但是相应的分析过程相对复杂, 且基于小应变原理的完全拉格朗日列式法在结构变形较大时也无法得到准确结果.

由 Simo 及其合作者^[1-2] 在 Reissner^[3] 的研究工作基础上提出的几何精确梁理论, 可以有效地避免常规方法的主要缺陷, 为空间框架的非线性分析提供了一种高精度的分析方法. 几何精确梁理论的特点包括: (1) 以大位移和有限转动理论为基础; (2) 以梁截面的形心位置向量和转动向量为基本的运动学参量; (3) 采用精确的几何关系. 因此, 该方法在分析过程中不需改变参考构形, 避免由此可能引起的数

值误差, 计算精度几乎不受步长的影响. 同时, 可以考虑剪切变形的影响, 应用范围更广.

自几何精确梁理论提出以来, 国内外学者在此基础上展开了广泛的研究, 包括曲梁单元分析^[4-7]、转动向量参数化研究^[8]、动力分析^[9]、基于应变插值的梁单元构造^[10]、基于海林格-瑞斯纳 (Hellinger-Reissner) 变分原理的混合单元研究^[11-12]、薄壁杆件分析^[13-17]、二维梁有限变形分析^[18] 等, 其应用范围不断扩展, 从初期的实体梁分析到近期的薄壁杆件分析, 成为一种有潜力的结构非线性分析方法.

在应用几何精确梁理论构造梁单元的过程中, 现有文献一般采用高阶拉格朗日插值表示单元位移场. 一方面, 这种单元的位移自由度较多, 导致结构整体分析计算量增大; 另一方面, 这种单元的节点位移自由度数多于常规单元, 也不便于与通用有限元程序结合. 特别地, 若在薄壁杆件结构的非线性分析中考虑截面变形, 需要保证单元间位移导数的连续性, 而拉格朗日插值无法满足这样的要求. Gonçalves 等^[17] 用埃米特插值进行了薄壁梁的几何非线性分析, 但仅限于单一杆件, 更进一步的研究还未见报道.

本文应用几何精确梁理论, 分别采用拉格朗日和埃米特插值函数构造空间梁单元, 通过单元层次平衡迭代凝聚内部自由度, 形成与常规单元相同的 12×12 单元刚度矩阵, 以提高单元的通用性和空间框

20123-01-21 收到第 1 稿, 2013-03-29 收到修改稿.

1) 亚热带建筑科学国家重点实验室自主研究课题 (2010ZA03, 2013ZC22) 和广西科学研究与技术开发计划 (1298011-1) 资助项目.

2) 马海涛, 教授, 主要研究方向: 有限元理论与应用, 结构分析与优化方法. E-mail: maht@scut.edu.cn

架结构分析的计算效率. 采用 4 个典型算例分析和比较不同单元的计算效果, 验证了方法的有效性.

1 几何精确梁理论

1.1 运动学描述

图 1 表示了几何精确梁理论中所采用的两种构形的关系及运动学描述方法. 图中, 参考构形在分析过程中保持不变, 通常取为初始构形 (材料构形), 而当前构形 (空间构形) 则在分析过程中不断变化; A , B 分别表示任意截面的形心和面上的任意点; C 为始端截面形心; $\mathbf{X} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3$ 表示参考构形中 B 点的位置向量, 其中 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ 为坐标基向量; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(X_1)$ 为当前构形中形心的位置向量; \mathbf{x} 表示当前构形中 B 点的位置向量; Λ 为截面的转动张量.

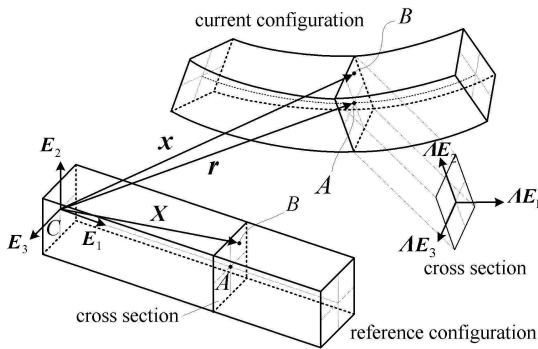


图 1 几何精确梁理论的运动学描述

Fig. 1 Kinematic description in geometrically exact beam theory

在几何精确梁理论中, 基本位移变量取为

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, \mathbf{r} 如前所述为当前构形中形心的位置向量, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(X_1)$ 为梁截面的转动向量. 梁截面的转动张量 Λ 由 $\boldsymbol{\theta}$ 确定, 同为梁轴坐标 X_1 的函数^[8]

$$\Lambda = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \quad (2)$$

其中, $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$.

由此, 当前构形中任意一点的位置可用下式表示

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \Lambda (X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3) \quad (3)$$

根据以上定义, 在平截面假定和刚性截面假定

的前提下, 可得到基本变量与截面广义应变的关系 (几何关系)^[1-2,6]

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Lambda^T \mathbf{r}' - \mathbf{E}_1 \quad (4a)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' \quad (4b)$$

其中, $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 \mathbf{K} 为参考构形下的广义应变, 分别表示为拉伸/剪切应变和曲率; \mathbf{r}' 和 $\boldsymbol{\theta}'$ 分别表示位置及转动向量对轴向坐标的导数; \mathbf{T} 为空间旋转张量^[6]

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \quad (5)$$

1.2 虚功方程及其线性化

以前一节给出的运动学描述和几何关系为基础, 可以建立梁的虚功方程并进行线性化. 文献 [8] 给出了具体推导过程, 本文不再重复, 仅在此列出主要的表达式.

首先, 虚功方程可表示为

$$G(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) = G_{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) - G_{\text{ext}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) = 0 \quad (6)$$

式中, G_{int} 和 G_{ext} 分别表示内力虚功和外力虚功

$$G_{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) = \int_S (\mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{K}) dS \quad (7)$$

$$G_{\text{ext}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) = \int_S (\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{r} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}) dS + [\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}]_0^L \quad (8)$$

其中, S 为单元形心线的弧长参数, \mathbf{N} 表示参考构形下截面的轴力和剪力, \mathbf{M} 表示参考构形下截面的弯矩和扭矩, $\bar{\mathbf{n}}$ 和 $\bar{\mathbf{m}}$ 表示当前构形下单元分布力和分布力矩, \mathbf{n} 和 \mathbf{m} 表示当前构形下单元截面内力, $\boldsymbol{\omega}$ 为当前构形的截面旋转向量. 任一截面在两种构形中的内力关系为 $\mathbf{n} = \Lambda\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{m} = \Lambda\mathbf{M}$.

对式 (4) 两端取变分, 整理后可得

$$\delta\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda^T}(\mathbf{r}')\delta\boldsymbol{\theta} + \Lambda^T\delta\mathbf{r}' \quad (9a)$$

$$\delta\mathbf{K} = \boldsymbol{\Xi}_{DT^T}(\boldsymbol{\theta}')\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{T}^T\delta\boldsymbol{\theta}' \quad (9b)$$

式中, $\boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda^T}(\mathbf{r}')$ 和 $\boldsymbol{\Xi}_{DT^T}(\boldsymbol{\theta}')$ 为三阶方阵. 利用式 (9) 可以得到单位长度内力虚功的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{K} &= \boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda^T}^T(\mathbf{N})\mathbf{r}' \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \Lambda\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r}' + \\ &\boldsymbol{\Xi}_{DT^T}^T(\mathbf{M})\boldsymbol{\theta}' \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{T}\mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}' \end{aligned} \quad (10)$$

由此, 虚功方程中的内外力虚功可进一步表示为

$$G_{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) = \int_S [\Lambda\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r}' + \mathbf{T}\mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}' + (\boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda^T}^T(\mathbf{N})\mathbf{r}' + \boldsymbol{\Xi}_{DT^T}^T(\mathbf{M})\boldsymbol{\theta}')\delta\boldsymbol{\theta}] dS \quad (11)$$

$$G_{\text{ext}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) = \int_S [(\Delta\bar{\mathbf{n}}^f + \bar{\mathbf{n}}^s)\delta\mathbf{r} + (\mathbf{T}\bar{\mathbf{m}}^f + \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{m}}^s + \bar{\mathbf{m}}^f)\delta\boldsymbol{\theta}] dS + \bar{\mathbf{n}}_0 \cdot \delta\mathbf{r}_0 + \bar{\mathbf{m}}_0^\theta \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_0 + \bar{\mathbf{n}}_L \cdot \delta\mathbf{r}_L + \bar{\mathbf{m}}_L^\theta \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_L \quad (12)$$

其中, 上标 f 和 s 分别表示随从力 (力矩) 和空间方向固定的力 (力矩); $\bar{\mathbf{m}}^f$ 表示与转动向量增量共轭的扭矩; $\bar{\mathbf{n}}_0, \bar{\mathbf{m}}_0^\theta, \bar{\mathbf{n}}_L$ 和 $\bar{\mathbf{m}}_L^\theta$ 表示梁的端部截面力和力矩.

采用牛顿-拉夫森迭代进行求解时, 单元的切线刚度矩阵可由虚功方程的线性化表达式推得. 用 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 表示基本位移变量的增量, 则内外虚功的线性化可分别表示为

$$DG_{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta\boldsymbol{\phi} = \Delta \int_S (\mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{K}) dS = \int_S (\Delta\mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma} + \Delta\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{K} + \mathbf{N} \cdot \Delta\delta\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \Delta\delta\mathbf{K}) dS = D_{\text{mat}}G(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta\boldsymbol{\phi} + D_{\text{geo}}G(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta\boldsymbol{\phi} \quad (13)$$

$$DG_{\text{ext}}(\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta\boldsymbol{\phi} = \int_S \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda}(\bar{\mathbf{n}}^f) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{DT}(\bar{\mathbf{m}}^f) + \boldsymbol{\Xi}_{DT^T}(\bar{\mathbf{m}}^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} dS + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}_0 \\ \delta\boldsymbol{\theta}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda}(\bar{\mathbf{n}}_0^f) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{DT}(\bar{\mathbf{m}}_0^f) + \boldsymbol{\Xi}_{DT^T}(\bar{\mathbf{m}}_0^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r}_0 \\ \Delta\boldsymbol{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}_L \\ \delta\boldsymbol{\theta}_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{D\Lambda}(\bar{\mathbf{n}}_L^f) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Xi}_{DT}(\bar{\mathbf{m}}_L^f) + \boldsymbol{\Xi}_{DT^T}(\bar{\mathbf{m}}_L^s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r}_L \\ \Delta\boldsymbol{\theta}_L \end{bmatrix} \quad (14)$$

由式 (13) 可见, 单元切线刚度阵包含弹性刚度部分和几何刚度部分. 由式 (14) 可见, 当结构受到非保守载荷作用时, 在切线刚度阵中需增加与其相应的刚度系数, 而这部分刚度往往是非对称的.

2 有限元离散与求解

2.1 插值函数

由于几何精确梁理论将截面的形心位置和转动向量作为独立的基本变量, 在空间框架分析中, 单元之间仅需满足 C^0 连续性要求. 因此, 现有的相关文献中多采用了拉格朗日插值函数构造单元, 即取

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{I_p} N_{Li}\mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{I_p} N_{Li}\boldsymbol{\theta}_i \quad (15)$$

其中, N_{Li} 表示第 i 个拉格朗日插值函数, I_p 为单元插值点总数. 本文在采用拉格朗日插值时仅考虑四节点单元, 故 $I_p = 4$.

为了进一步提高单元的数值稳定性, 并为进一步研究薄壁杆件作准备, 本文还构造和研究基于如下三次埃米特插值函数的单元

$$\mathbf{r} = N_{H1}\mathbf{r}_1 + N_{H2}\mathbf{r}'_1 + N_{H3}\mathbf{r}_2 + N_{H4}\mathbf{r}'_2 \quad (16a)$$

$$\boldsymbol{\theta} = N_{H1}\boldsymbol{\theta}_1 + N_{H2}\boldsymbol{\theta}'_1 + N_{H3}\boldsymbol{\theta}_2 + N_{H4}\boldsymbol{\theta}'_2 \quad (16b)$$

其中, N_{Hi} 为第 i 个埃米特插值函数, \mathbf{r}'_i 和 $\boldsymbol{\theta}'_i$ 分别为位置向量和转动向量的轴向梯度的节点值.

2.2 内部自由度凝聚

采用式 (15) 给出的拉格朗日插值格式, 得到的四节点空间梁单元将具有 24 个节点自由度, 这样的单元不易在通用有限元程序实现 (常规空间梁单元自由度数为 12). 同时, 在结构层面分析时, 结构总自由度数会较多, 导致结构平衡方程组的求解工作量增大. 基于此考虑, 本文提出对单元中间节点自由度进行凝聚, 将单元两端节点的位移和转角取为外部自由度, 2 个内部节点的位移和转角取为内部自由度 (见图 2). 在结构分析中构造凝聚后的 12×12 的单元切线刚度阵进行结构总刚组装, 单元内力的计算则通过单元内部平衡迭代来完成.

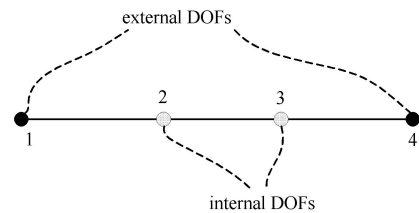


图 2 拉格朗日单元的外部 and 内部自由度

Fig. 2 Internal and external DOFs in Lagrange element

对于三次埃米特插值单元, 强制单元间位移和转角的一阶导数连续有可能导致错误结果, 例如当相邻单元交点处存在集中力 (力矩)、或单元不共线时, 某些位移和转角分量的导数实际并不连续. 因此, 为避免引入过强的连续性条件, 本文同样进行凝聚处理, 以单元端部节点的位移和转角作为单元外部自由度, 其导数值作为内部自由度 (见图 3).

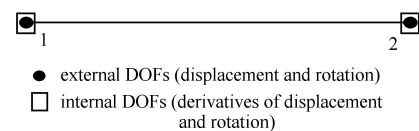


图 3 三次埃米特单元的外部 and 内部自由度

Fig. 3 Internal and external DOFs in cubic Hermite element

结构非线性求解常采用增量-迭代方法, 增量的控制可用载荷增量法或柱面弧长法^[19]等. 对于一般的拉格朗日插值单元, 可直接采用牛顿-拉夫森类迭代来完成. 但对于本文提出的两种单元, 由于定义了单元内部自由度, 在标准的牛顿-拉夫森迭代求解过程中需要在单元层次上增加单元内部自由度的凝聚和单元的平衡迭代过程. 因此, 不同于线性静力分析中成熟的内部自由度凝聚方法^[20], 非线性分析中的凝聚还需进行如下的特别处理.

为方便表达, 可将单元的平衡方程表示如下

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{EE} & \mathbf{K}_{EI} \\ \mathbf{K}_{IE} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_E \\ \Delta \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}_E \\ \Delta \mathbf{P}_I \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中, 下标 E 和 I 分别对应于单元的外部自由度和内部自由度, 右端项为当前节点非平衡力向量.

进行结构刚度矩阵的组装之前, 先由式

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{EE} - \mathbf{K}_{EI} \mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IE} \quad (18)$$

得到凝聚后的单元切线刚度阵, 通过坐标转换后即可用于组装结构总体刚度矩阵. 凝聚后, 单元对整体平衡的贡献可表示为 $\Delta \tilde{\mathbf{P}}_E = \Delta \mathbf{P}_E - \mathbf{K}_{EI} \mathbf{K}_{II}^{-1} \Delta \mathbf{P}_I$.

单元内力的计算 (也可称为单元状态确定) 通过单元内部平衡迭代实现. 分析过程中, 每次在求解结构的平衡方程获得各单元外部自由度的增量位移和转角后, 即可进入单元状态确定过程, 具体的实现过程如图 4 所示. 计算过程中, 单元内部自由度对应的位移量除初始化时给定初值外, 在单元状态确定过

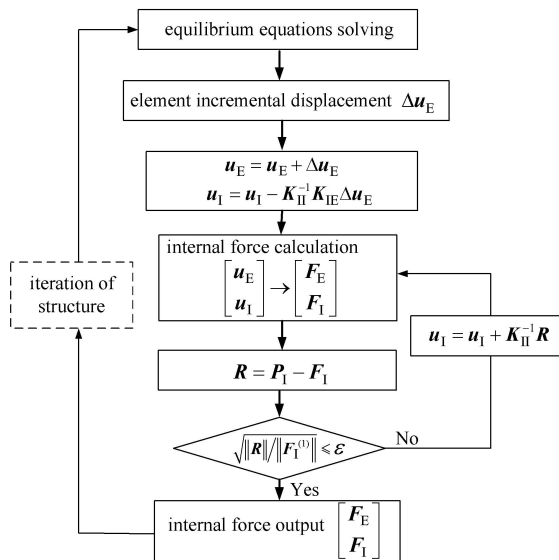


图 4 单元状态确定流程

Fig. 4 Flowchart of element state determination

程中逐步更新, 并在内存中存储以备下一次循环中读取. 图中, \mathbf{P}_I 表示由单元载荷得到的等效节点载荷中与内部自由度相应的部分, $\mathbf{F}_I^{(i)}$ 表示在本次单元状态确定中首次计算得到的与内部自由度对应的内力, \mathbf{R} 表示与单元内部自由度对应的不平衡力, ε 为预先设定的迭代误差限值.

3 数值算例研究

为便于表达和结果分析, 将所研究的 3 种单元和算法分别记为:

(1) LIE (Lagrange interpolation element): 采用拉格朗日插值, 整体分析中保留全部节点自由度;

(2) LIEI (Lagrange interpolation element with equilibrium iteration): 采用拉格朗日插值, 通过单元平衡迭代凝聚内部自由度;

(3) HIEI (cubic Hermite interpolation element with equilibrium iteration): 采用三次埃米特插值, 通过单元平衡迭代凝聚内部自由度.

本节给出的算例中, 整体结构非线性分析的不平衡力容许相对误差限^[26] 取为 $\beta = 1.0 \times 10^{-6}$.

3.1 算例 1: 悬臂梁线性分析

结构模型及相关无量纲化参数如图 5 所示, 共考虑 4 种载荷工况: (1) C 点竖向集中力; (2) C 点力矩; (3) B 点竖向集中力; (4) B 点力矩.

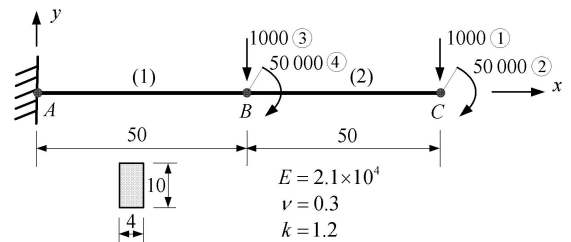


图 5 悬臂梁结构图

Fig. 5 Initial geometry of a cantilever beam

本算例用于研究和测试 HIEI 单元在线性静力分析中的性能. 横向位移 v , 转角 θ 以及对应的导数 v' 和 θ' 的分析结果如表 1 所示. 计算中每一节点处的横向位移和转角均取唯一值; 但允许横向位移和转角的导数在 B 点有 2 个独立值, 分别对应于单元 (1) 和单元 (2) 的端点值, 表中用上标区分.

与解析解对比发现, 表 5 的结果为精确解.

值得注意的是, 在集中力作用处, 横向位移的导数发生跳跃 (见工况 (3), $v_B^{(1)} \neq v_B^{(2)}$); 在力矩作用处,

表 1 算例 1 分析结果

Table 1 Analysis results of Example 1

Item	Case (1)	Case (2)	Case (3)	Case (4)
v_A	0	0	0	0
v_B	-15.066 67	-8.928 57	-6.138 10	-8.928 57
v_C	-47.990 48	-35.714 29	-15.066 67	-26.785 71
θ_A	0	0	0	0
θ_B	-0.535 71	-0.357 14	-0.178 57	-0.357 14
θ_C	-0.714 29	-0.714 29	-0.178 57	-0.357 14
$v_A^{(1)}$	-0.003 71	0	-0.003 71	0
$v_B^{(1)}$	-0.539 43	-0.357 14	-0.182 29	-0.357 14
$v_B^{(2)}$	-0.539 43	-0.357 14	-0.178 57	-0.357 14
$v_C^{(2)}$	-0.718 00	-0.714 29	-0.178 57	-0.357 14
$\theta_A^{(1)}$	-0.014 29	-0.007 14	-0.007 14	-0.007 14
$\theta_B^{(1)}$	-0.007 14	-0.007 14	0	-0.007 14
$\theta_B^{(2)}$	-0.007 14	-0.007 14	0	0
$\theta_C^{(2)}$	0	-0.007 14	0	0

转角的导数也不连续 (见工况 (4), $\theta_B^{(1)} \neq \theta_B^{(2)}$). 因此, 对于基本位移分量的导数, 无法取其节点值作为节点自由度, 而必须保留其单元端点值作为单元的内部自由度. 在单元层次对这些自由度进行凝聚, 可以保证得到的单元刚度矩阵具有与常规单元相同的节点自由度. 除此之外, 当有剪力作用时, 横向位移导数 (v') 不等于截面转角 (θ) (见工况 (1) 下的单元 (1) 和 (2), 以及工况 (3) 下的单元 (1)), 两者之差反映了剪切变形的影响.

3.2 算例 2: Lee 框架

结构模型及相关无量纲化参数如图 6 所示. 首先分别采用 7 个和 13 个 HIEI 单元 (立柱分别均分为 3 个和 6 个单元; 横梁集中力左侧 1 个单元, 右侧分别均分为 3 个和 6 个单元), 分析算法采用柱面弧长法. 本算例属于平面结构全过程平衡路径跟踪求解问题.

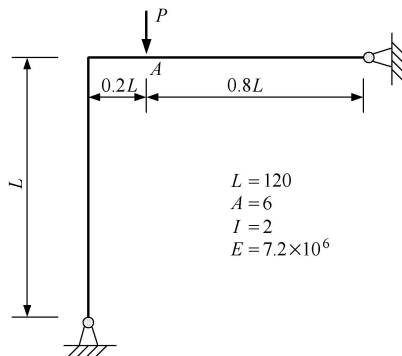


图 6 Lee 框架结构图

Fig. 6 Initial geometry of Lee frame

分析得到的载荷-位移曲线如图 7 所示. 此结果与文献 [2, 21] 的结果相吻合, 也与采用 41 个常规单元 [22] 进行更新拉格朗日列式法分析的结果一致.

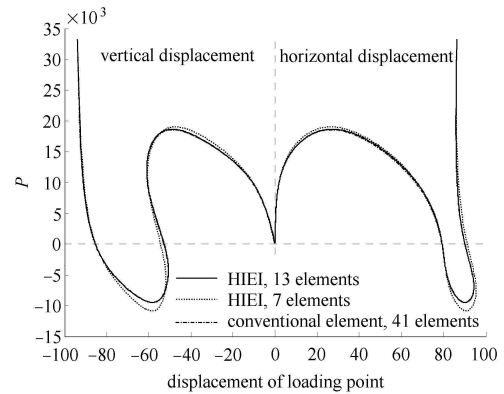


图 7 HIEI 分析结果 (载荷-位移曲线)

Fig. 7 Results of HIEI (load-displacement curve)

基于 13 单元模型, 取载荷值大于 3.0×10^4 作为结束条件, 对比采用 LIE, LIEI 和 HIEI 3 种不同单元进行分析的效果. 分析结果及计算耗时见表 2, 表中 P_{cr1} 和 P_{cr2} 表示载荷-位移曲线上前两个载荷极值. 由表可见, 对于本例, 即使单元平衡迭代使用较大的迭代误差限值, 也能得到正确结果. 同时, 由于进行了自由度凝聚处理, 结构层次计算量减少, LIEI 和 HIEI 的计算效率均得到较大幅度的提高.

表 2 算例 2 中 3 种单元分析结果

Table 2 Results of the three elements for Example 2

Model	ϵ	P_{cr1}	P_{cr2}	Time/s
LIE	—	18 658.091	-9 466.0501	1 395.60
	0.1	18 658.447	-9 466.702 3	523.02
	0.5	18 658.447	-9 466.448 4	490.24
	0.8	18 658.442	-9 466.704 6	485.86
HIEI	1.0	18 658.447	-9 466.679 2	351.96
	0.1	18 658.447	-9 466.688.9	481.70
	0.5	18 658.447	-9 466.703 4	463.13
	0.8	18 658.447	-9 466.801 1	466.00
	1.0	18 714.018	-9 286.178 8	305.18

3.3 算例 3 45° 弯曲悬臂梁

悬臂曲梁结构如图 8 所示, 矩形截面尺寸为 1×1 (无量纲量), 在悬臂端作用 Z 方向的集中载荷. 本算例为空间结构弯扭耦合计算问题.

将曲梁划分为 8 个等长直梁单元, 分别采用 LIE, LIEI 和 HIEI 进行分析, 分析过程采用载荷增量法,

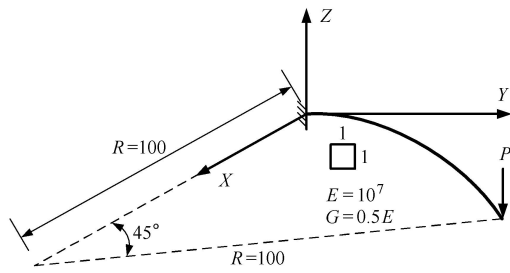


图 8 45° 弯曲悬臂梁结构图

Fig. 8 Initial geometry of 45°-curved cantilever beam

共 12 个相同增量步加载到 $P = 600$. 本文 HIEI 分析所得的悬臂端位移结果与参考文献中的结果对比见表 3; 其余两种方法与 HIEI 方法的计算结果一致, 计算耗时的对比则见表 4.

从表 3 可知, HIEI 单元计算结果与文献结果吻合良好, 说明对于弯扭耦合的情况, 本文算法可以得到准确结果, 同时也验证了通过单元平衡迭代进行内部自由度凝聚方法的可行性, 而且这种处理方法也适用于对于埃米特插值中以两端位移和转角的导数作为内部自由度的情况. 由表 4 可见, 相对于 LIE 和 LIEI 单元, HIEI 单元具有更高的计算效率.

表 3 算例 3 计算结果

Table 3 Comparison of results for Example 3

Model	Displacement components		
	X	Y	Z
Bathe and Bolourch ^[23]	-13.4	-23.5	-53.4
Simo and Vu-Quoc ^[2]	-13.49	-23.49	-53.37
Dvorkin et al. ^[24]	-13.6	-23.5	-53.3
Cardona and Geradin ^[25]	-13.74	-23.67	-53.50
Ibrahimbegovic ^[6]	-13.729	-23.814	-53.605
Crisfield ^[26]	-13.68	-23.87	-53.71
Schulz and Filippou ^[27]	-13.67	-23.81	-53.56
Ritto-Corrêa and Camotim ^[8]	-13.668	-23.697	-53.498
Proposed HIEI	-13.671	-23.800	-53.543

表 4 算例 3 运算时间

Table 4 Running times for Example 3

ϵ	Running times		
	LIE	LIEI	HIEI
—	13.766	—	—
0.1	—	12.156	8.719
0.5	—	13.109	9.875
0.8	—	13.478	10.016

3.4 算例 4 悬臂直角刚架

图 9 所示直角悬臂框架, 在悬臂端作用平面内集中力 P_x . 为了研究其非线性屈曲性能, 在悬臂端施加面外微小挠动载荷 P_z , 取 $P_z = 0.001P_x$. 本算例

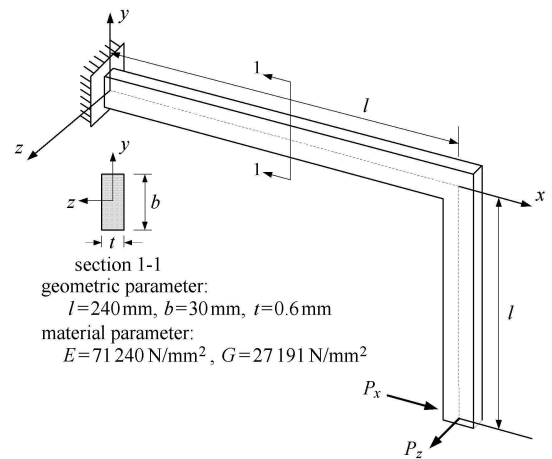


图 9 悬臂直角刚架结构图

Fig. 9 Initial geometry of cantilevered right-angle frame

是结构面外屈曲问题, 微小的挠动载荷将引起结构面外屈曲.

分别采用 3 种单元, 基于载荷增量法进行分析, 每根杆件均分为 5 个单元. P_x 从 0 经过 10 个等量载荷步加载至 1.02 N, 再经过 55 个载荷步加载到 1.16 N, 最后经过 35 个载荷步加载至 1.4 N. 相应的分析结果如表 5 所示, 载荷-位移曲线如图 10 所示.

当载荷接近屈曲临界值时, 常规算法可能会由于稳定性低而出现不收敛的现象. 本文采用单元平衡迭代, 通过适当地控制局部迭代的收敛, 能有效地保证分析计算过程的稳定性. 由表 5 可见, 采用 LIE 计算无法收敛, 而采用 LIEI 和 HIEI、通过设定一定的内部平衡迭代收敛条件可以获得可靠的收敛解. 而对比 LIEI 和 HIEI, 采用 HIEI 时可选用较大的

表 5 算例 4 中 3 种单元分析结果

Table 5 Results of the three elements for Example 4

Model	ϵ	Displacement Z of loading point/mm			Time/s
		$P_x = 1.2$	$P_x = 1.3$	$P_x = 1.4$	
Zhang ^[20]	—	45.75	55.51	59.84	—
LIE	—	—	—	—	diverged
LIEI	0.04	45.70	55.41	59.67	123.118
	0.08	45.70	55.41	59.67	118.125
	0.12	—	—	—	diverged
	0.16	—	—	—	diverged
	0.04	45.70	55.41	59.67	84.735
HIEI	0.08	45.70	55.41	59.67	85.797
	0.12	45.70	55.41	59.67	88.094
	0.16	—	—	—	diverged

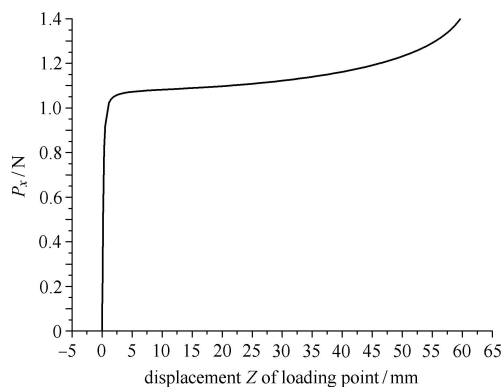


图 10 HIEI 分析结果 (载荷-位移曲线)

Fig. 10 Results of HIEI (load-displacement curve)

误差限值, 说明其数值稳定性更好; 在采用同样的计算参数情况下, HIEI 所需运算时间较短, 故其计算效率也更高。

另外值得说明的是, 若采用自适应弧长法^[19], 3 种单元均能得到收敛解, 但所需增量步数较多。

4 结 论

本文研究了几何精确梁单元及其在空间框架结构几何非线性分析中的应用. 建立了分别采用拉格朗日插值函数和埃米特插值函数的高阶单元, 提出了基于单元内部平衡迭代的改进算法, 并进行了算例验证, 获得了理想的效果。

基于本文研究, 可得以下结论:

(1) 采用内部自由度凝聚的方法不但使单元具有良好的程序通用性, 还能有效提高计算效率; 单元平衡迭代保证了非线性分析过程中凝聚的正确性, 并且有效提高了非线性计算的数值稳定性。

(2) 提出基于埃米特插值函数的高阶单元, 并通过单元平衡迭代, 有效地处理了节点导数自由度的凝聚, 实现了空间框架结构几何非线性的高效可靠分析。

(3) 采用埃米特插值可以提高位移场阶次, 并保证单元间的 C^1 连续性, 以本文工作为基础进行薄壁杆件几何非线性分析是可行的. 基于结论 (2), 在下一步研究中可以根据需要选择性地自由度凝聚。

参 考 文 献

- 1 Simo JC. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem, Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, 49(1): 55-70
- 2 Simo JC, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model, Part II: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Me-*

- chanics and Engineering*, 1986, 58(1): 79-116
- 3 Reissner E. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1972, 23: 794-804
- 4 Petrov E, G eradin M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids Part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 165(1-4): 43-92
- 5 Petrov E, G eradin M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids, Part 2: Anisotropic and advanced beam models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 165(1-4): 93-127
- 6 Ibrahimbegovi c A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: Three-dimensional curved beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 122(1-2): 11-26
- 7 Ibrahimbegovi c A, Frey F, Kozar I. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38(21): 3653-3673
- 8 Ritto-Corr ea M, Camotim D. On the differentiation of the Rodrigues formula and its significance for the vector-like parameterization of Reissner-Simo beam theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55(9): 1005-1032
- 9 Simo JC, Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions—A geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 66(2): 125-161
- 10 Zupan D, Saje M. Finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(49-50): 5209-5248
- 11 Nukala PKVV, White DW. A mixed finite element for three-dimensional nonlinear analysis of steel frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(23-26): 2507-2545
- 12 Nukala PKVV, White DW. Variationally consistent state determination algorithms for nonlinear mixed beam finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(33-35): 3647-3666
- 13 Alsafadie R, Hjjaj M, Battini JM. Three-dimensional formulation of a mixed corotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation. *Thin-Walled Structures*, 2011, 49(4): 523-533
- 14 Gonçalves R. A geometrically exact approach to lateral-torsional buckling of thin-walled beams with deformable cross-section. *Computers and Structures*, 2012, 106-107: 9-19
- 15 Mart n SC, Machado SP, Cort nez VH. A geometrically exact nonlinear finite element for composite closed section thin-walled beams. *Computers and Structures*, 2011, 89(23-24): 2337-2351
- 16 Goncalves R, Ritto-Corr ea M, Camotim D. Incorporation of wall finite relative rotations in a geometrically exact thin-walled beam element. *Computational Mechanics*, 2011, 48(2): 229-244
- 17 Goncalves R, Ritto Corr ea M, Camotim D. A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section

- deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(23-24): 1627-1643
- 18 李进京, 李明瑞, 李辛. 2 维梁有限变形的精确理论和近似理论. 中国农业大学学报, 1999, 4(2): 36-42 (Li Jinjing, Li Mingrui, Li Xin. Exact and approximate finite deformation theories of 2-D beam. *Journal of China Agricultural University*, 1999, 4(2): 36-42 (in Chinese))
- 19 罗永峰, 韩庆华, 李海旺. 建筑钢结构稳定理论与应用. 北京: 人民交通出版社, 2010 (Luo Yongfeng, Han Qinghua, Li Haiwang. Stability of Steel Structures—The Theory and Implement. Beijing: China Communications Press, 2010 (in Chinese))
- 20 Cook RD, Malkus DS, Plesha ME, et al. Concepts and Applications of Finite Element Analysis (4th edn). New York: Wiley, 2000
- 21 张年文. 框架几何非线性分析的若干问题. [博士论文]. 杭州: 浙江大学, 2010 (Zhang Nianwen. Several problems in geometrically nonlinear analysis for Frames. [PhD Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010 (in Chinese))
- 22 丁泉顺, 陈艾荣, 项海帆. 空间杆系结构实用几何非线性分析. 力学季刊, 2001, 22(3): 300-306 (Ding Quanshun, Chen Ai-rong, Xiang Haifan. Geometrically nonlinear practical analysis of spatial frames. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2001, 22(3): 300-306 (in Chinese))
- 23 Bathe KJ, Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14(7): 961-986
- 24 Dvorkin EN, Onate E, Oliver J. On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 26: 1597-1613
- 25 Cardona A, Geradin M. A Beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26(11): 2403-2438
- 26 Crisfield MA. A consistent co-rotational formulation for nonlinear, three-dimensional, beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 81: 131-150
- 27 Schulz M, Filippou FC. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 761-785

(责任编辑: 刘希国)

IMPROVEMENTS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS ALGORITHMS FOR SPATIAL FRAME STRUCTURES¹⁾

Li Wenxiong^{*,†} Ma Haitao^{*,2)} Chen Taicong^{*}

^{*}(State Key Laboratory of Subtropical Building Science, School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

[†](College of Water Conservancy and Civil Engineering, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract Two spatial beam elements based on the geometrically exact beam theory are developed using high order Lagrange interpolation and Hermite interpolation. An element-level equilibrium iteration procedure is proposed for condensing out internal degrees of freedom, enhancing the applicability of the elements to general-purposed finite element software. A geometrically nonlinear analysis algorithm with both load control and cylindrical arc-length control is developed for spatial frame structures. The presented results of numerical examples show that the proposed approach is effective both to increase the computational efficiency and to achieve better numerical stability. Especially, the proposed element based on the Hermite cubic interpolation performs better in the numerical tests and is therefore well suited for the post-buckling analysis of frame structures.

Key words nonlinear analysis, finite element method, geometrically exact beam, finite rotation, hermite interpolation, internal degree of freedom

Received 21 January 2013, revised 29 March 2013.

1) The project was supported by the State Key Laboratory of Subtropical Building Science (2010ZA03, 2013ZC22) and Guangxi Scientific and Technical Development Plan (1298011-1).

2) Ma Haitao, professor, research interests: finite element method theory and applications, structural analysis and optimization.

E-mail: maht@scut.edu.cn