齐次线性方程组

- $AX=0$
- 由于 $r(A)=r(A,0)$, 所以恒有解
- 当$r(A)=n$时，A可逆，方程组有唯一解：零
- 当$r(A)<n$时，方程组有无数解，才有非零解

例：设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda. \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组有(1) 唯一解；(2) 无解；(3) 有无限多个解？并在有无限多解时求其通解.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

解法1：对增广矩阵作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

附注：

✓ 对含参数的矩阵作初等变换时，由于 $\lambda+1$，$\lambda+3$ 等因式可能等于零，故不宜进行下列的变换：

$$r_2 - \frac{1}{1+\lambda} r_1 \qquad r_2 / \lambda \qquad r_3 \div (\lambda+3)$$

✓ 如果作了这样的变换，则需对 $\lambda+1=0$（或 $\lambda+3=0$）的情况另作讨论.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

分析：

- 讨论方程组的解的情况，就是讨论参数 λ 取何值时，r_2、r_3 是非零行.
- 在 r_2、r_3 中，有 5 处地方出现了λ，要使这 5 个元素等于零，$\lambda=0$，3，-3，1 .
- 实际上没有必要对这 4 个可能取值逐一进行讨论，先从方程组有唯一解入手.

$$
B=\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}
$$

于是

- 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，$R(A)=R(B)=3$，有唯一解.
- 当 $\lambda = 0$ 时，$R(A)=1$，$R(B)=2$，无解.
- 当 $\lambda = -3$ 时，$R(A)=R(B)=2$，有无限多解.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

解法2：因为系数矩阵 A 是方阵，所以方程组有唯一解的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2$$

于是当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda=0$ 时，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=1$，$R(B)=2$，方程组无解.

当 $\lambda=-3$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(B)=2$，方程组有无限多个解，其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

定理： 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, B) .$$

定理： 设 $AB = C$，则 $R(C) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}$.

证明： 因为 $AB = C$，所以矩阵方程 $AX = C$ 有解 $X = B$,
于是 $R(A) = R(A, C)$.
$R(C) \leqslant R(A, C)$，故 $R(C) \leqslant R(A)$.
又 $(AB)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$，即 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$，所以矩阵方程 $B^{\mathrm{T}}X = C^{\mathrm{T}}$ 有解
$X = A^{\mathrm{T}}$，同理可得，$R(C) \leqslant R(B)$.
综上所述，可知 $R(C) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}$.
问： $\leqslant$能否改成$=$？

向量组及其线性组合

定义：n 个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量（vector），这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量.

- 分量全为实数的向量称为实向量.
- 分量全为复数的向量称为复向量.

备注：

- ✓ 本书一般只讨论实向量（特别说明的除外）.
- ✓ 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量.
- ✓ 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.
- ✓ 本书中，列向量用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 等表示，行向量则用 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 表示.

定义：若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合称为**向量组**.

✓ 当$R(A) < n$时，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的全体解组成的向量组含有无穷多个向量.

有限向量组

$$A_{34} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

结论：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

定义：给定向量组 A： $a_1, a_2, \cdots, a_m$， 对于任何一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，表达式

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合.

$k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为这个线性组合的系数(linear combination).

定义：给定向量组 A： $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组实数 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，使得

$$b = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \cdots + l_m a_m$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合，这时称向量 b 能由向量组 A 线性表示.

e_1, e_2, e_3的线性组合

例： 设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

那么 $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2e_1+3e_2+7e_3$

线性组合的系数

一般地，对于任意的 n 维向量b，必有

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

回顾：线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组有解？ $\Longleftrightarrow$ **向量** $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **是否能用** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **线性表示？**

结论：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_m a_m = (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = b$$

向量b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ **线性方程组 $Ax = b$ 有解** $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b)$

定义：设有向量组 $A: a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \ldots, b_l$，若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**.

若向量组 A 与向量组 B 能互相线性表示，则称这两个**向量组等价（equivalent）**.

设有向量组 A : $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 B : $b_1, b_2, \ldots, b_l$， 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

$$b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{m1}a_m$$

$$b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{m2}a_m$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_l = k_{1l}a_1 + k_{2l}a_2 + \cdots + k_{ml}a_m$$

线性表示的系数矩阵

$$(b_1, b_2, \cdots, b_l) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}$$

设有向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \ldots, b_l$， 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

- 对于 b_1， 存在一组实数 $k_{11}, k_{21}, \ldots, k_{m1}$， 使得

$$b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \ldots + k_{m1}a_m \quad ;$$

- 对于 b_2， 存在一组实数 $k_{12}, k_{22}, \ldots, k_{m2}$， 使得

$$b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \ldots + k_{m2}a_m \quad ;$$

……

- 对于 b_l， 存在一组实数 $k_{1l}, k_{2l}, \ldots, k_{ml}$， 使得

$$b_l = k_{1l}a_1 + k_{2l}a_2 + \ldots + k_{ml}a_m$$

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{array}\right)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

结论：矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，

B 为这一线性表示的系数矩阵.

若 $C_{m\times n} = A_{m\times l} B_{l\times n}$，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则
$$\begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_l^T \end{pmatrix}$$

结论：矩阵 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示，

A 为这一线性表示的系数矩阵.

口诀：左行右列

定理：设A是一个 $m\times n$ 矩阵，

✓ 对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

✓ 对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

结论：若 $C=AB$，那么

- 矩阵 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示，A为这一线性表示的系数矩阵.（A 在左边）

- 矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，B为这一线性表示的系数矩阵.（B 在右边）

口诀：左行右列.

$A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow$ A 经过有限次初等列变换变成 B

$\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_l$，使 $AP_1 P_2 \ldots, P_l = B$

$\Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $AP = B$

把 P 看成是线性表示的系数矩阵

$\Leftrightarrow$ 矩阵 B 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

同理可得

$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow$ 矩阵 B 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

向量组 $B: b_1, b_2, \ldots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 K，使得 $AK = B$

$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 有解

$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$

$\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$　　因为 $R(B) \le R(A, B)$

推论：向量组 $A: a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \ldots, b_l$ 等价的充分必要条件是 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

证明：向量组 A 和 B 等价

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{向量组 } B \text{ 能由向量组 } A \text{ 线性表示} & \Leftrightarrow R(A) = R(A, B) \\ \text{向量组 } A \text{ 能由向量组 } B \text{ 线性表示} & \Leftrightarrow R(B) = R(A, B) \end{cases}$$

从而有 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$

证明向量 b 能由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示，并求出表示式.

解：向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示当且仅当 $R(A) = R(A, b)$.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A) = R(A, b) = 2$，所以向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \quad\quad +3x_3=2\\ \quad\quad x_2-2x_3=-1\end{cases}$

通解为 $$x=c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$$

所以 $b=(-3c+2)\,\boldsymbol{a}_1+(2c-1)\,\boldsymbol{a}_2+c\,\boldsymbol{a}_3$.

n 阶单位矩阵的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

设有$n\times m$ 矩阵 $A=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$， 试证：$n$ 维单位坐标向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示的充分必要条件是

$$R(A)=n.$$

分析：

n 维单位坐标向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示

$\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A, E)$

$\Leftrightarrow$ $R(A)=n$.

（注意到：$R(A, E)=n$ 一定成立）

小结

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b)$

向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程组 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$

$\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(B) = R(A, B)$

知识结构图

n维向量

↓

向量组 → 向量组与矩阵的对应

↓

向量组的线性组合

↓

向量组的线性表示 → 判定定理及必要条件

↓

向量组的等价 → 判定定理

引言

问题1：给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示？

问题2：如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数是否不全为零？

向量b 能由 向量组 A 线性表示	⇔	线性方程组 $Ax = b$ 有解	⇔	$R(A) = R(A,b)$

问题1：给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示？

问题1′：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在解？

回答：齐次线性方程组 $Ax= 0$ 一定存在解.

事实上，可令$k_1 = k_2 = \dots = k_m =0$，则

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m =0$$（零向量）

问题2：如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数是否不全为零？

问题2′：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在非零解？

回答：齐次线性方程组不一定有非零解，从而线性组合的系数不一定全等于零.

例：设 $$E=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

若 $$k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

则 $k_1=k_2=k_3=0$.

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \cdots, a_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0$$ （零向量）

则称向量组 A 是线性相关(linearly dependent)的，否则称它是线性无关(linearly independent)的.

向量组 $A: a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关	$\Leftrightarrow$	m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解	$\Leftrightarrow$	$R(A) < m$

备注:

- 给定向量组 A，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关，通常是指 $m \geqslant 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量：当 a 是零向量时，线性相关；当 a 不是零向量时，线性无关.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \cdots, a_m$ $(m \geqslant 2)$ 线性相关，也就是向量组 A 中，至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

  特别地，

  - a_1, a_2 线性相关当且仅当 a_1, a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线.
  - a_1, a_2, a_3 线性相关的几何意义是三个向量共面.

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$， 使得

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0 \text{（零向量）}.$$

$\Leftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow$ 矩阵$A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m .

$\Leftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 如果 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0$（零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0 .$$

$\Longleftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

例：试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

例：已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组a_1, a_2 的线性相关性.

解：

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2, a_3) = 2$，故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关；

同时，$R(a_1, a_2) = 2$，故向量组 a_1, a_2 线性无关.

例：已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解题思路：

- ✓ 转化为齐次线性方程组的问题；
- ✓ 转化为矩阵的秩的问题.

例：已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法1：转化为齐次线性方程组的问题.

已知 $$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ，记作 $B = AK$.

设 $Bx = 0$，则$(AK)x = A(Kx) = 0$.

因为向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，所以$Kx = 0$.

又 $|K| = 2$，那么$Kx = 0$ 只有零解 $x = 0$，

从而向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

例：已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法2：转化为矩阵的秩的问题.

已知 $$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$ 记作 $B = AK$.

因为$|K| = 2 \neq 0$，所以K 可逆，$R(A) = R(B)$,

又向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，$R(A) = 3$,

从而$R(B) = 3$，向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

定理

- 若向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关， 则向量组 B：$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关.

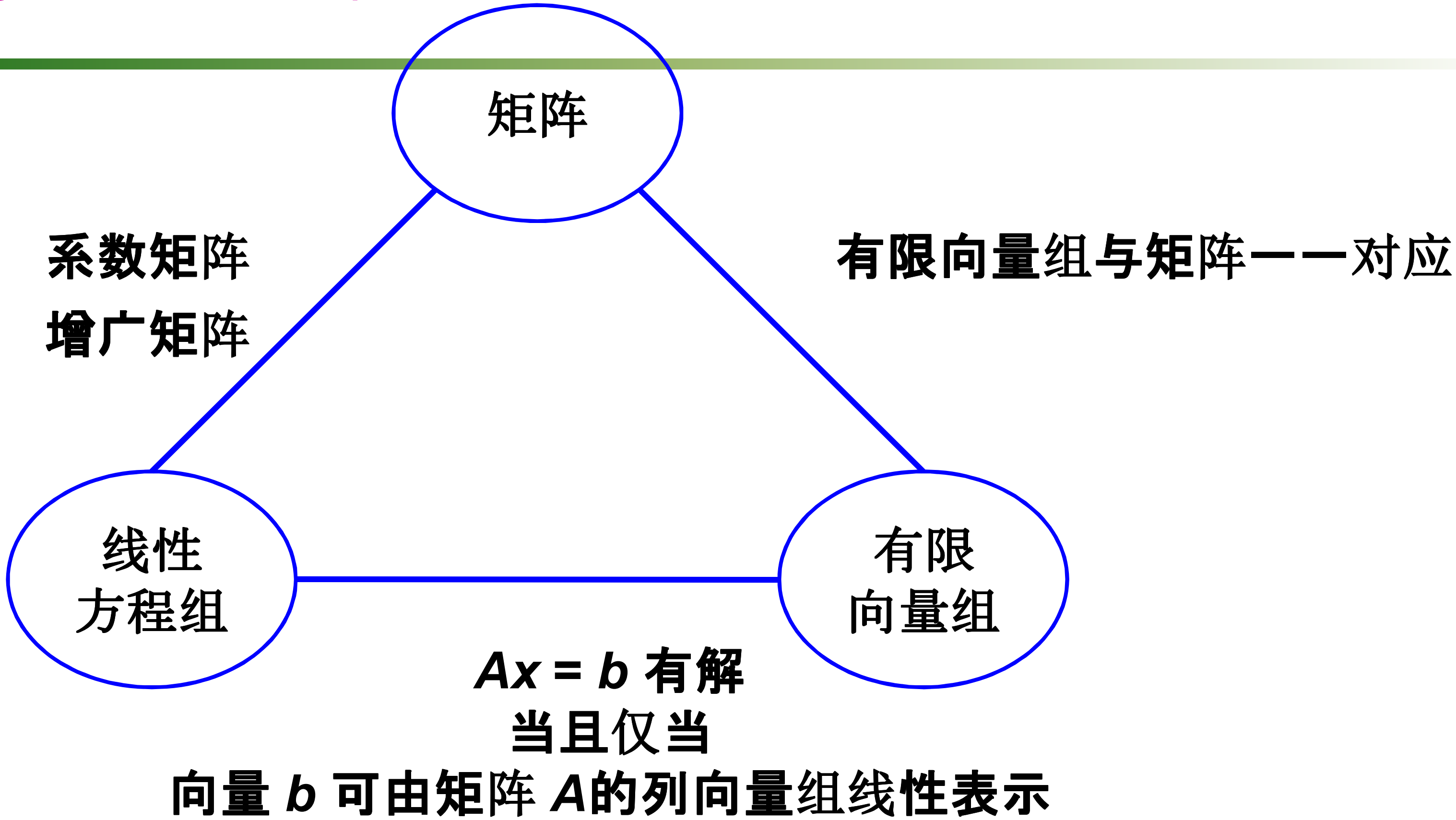
  其逆否命题也成立，即若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

- m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时，一定线性相关.

  特别地， $n+1$个 n 维向量一定线性相关.

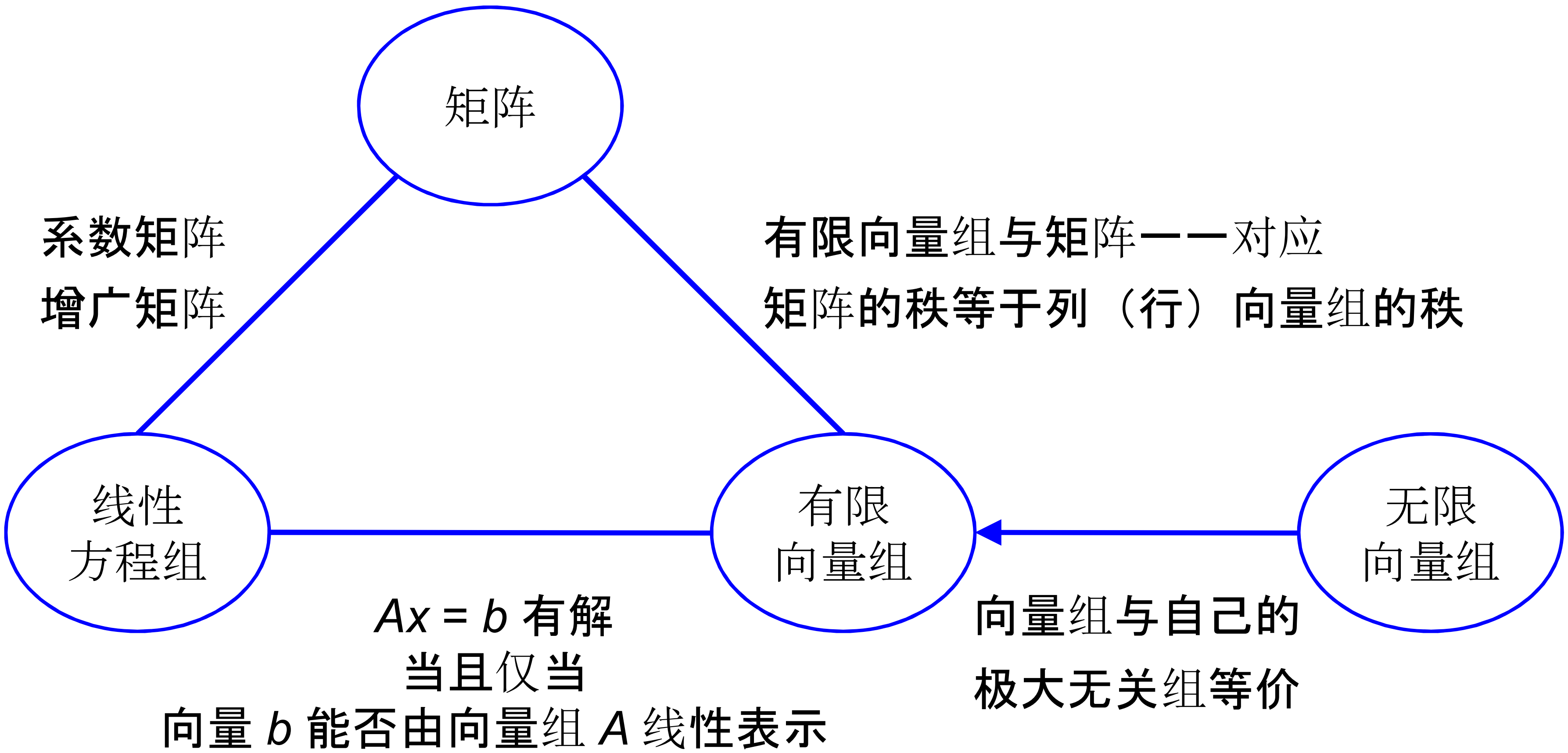
- 设向量组 A： $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关， 而向量组 B： $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.
- 证明：教材P122

§3　向量组的秩



- 向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ **线性相关**的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩**小于**向量的个数 m；
- 向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ **线性无关**的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩**等于**向量的个数 m .

极大线性无关组：一向量组A的一部分向量组Ar，若Ar线性无关，再加入A中的任意其他向量a_j，则新向量组(Ar, a_j)线性相关，则称Ar为A的一个极大线性无关组。



n元线性方程组 $Ax = b$ 其中 A 是 $n \times m$ 矩阵	矩阵 (A, b)	向量组 A: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 及向量 b
是否存在解？	$R(A) = R(A, b)$ 成立？	向量 b 能否由向量组 A线性表示？
无解	$R(A) < R(A, b)$	NO
有解	$R(A) = R(A, b)$	YES x 的分量是线性组合的系数
唯一解	$R(A) = R(A, b)$ = 未知数个数	表达式唯一
无穷解	$R(A) = R(A, b)$ < 未知数个数	表达式不唯一

向量组的秩的概念

极大无关组所含向量个数 r 称为**向量组 A 的秩**，记作R_A .

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A) = 3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式. 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0 = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

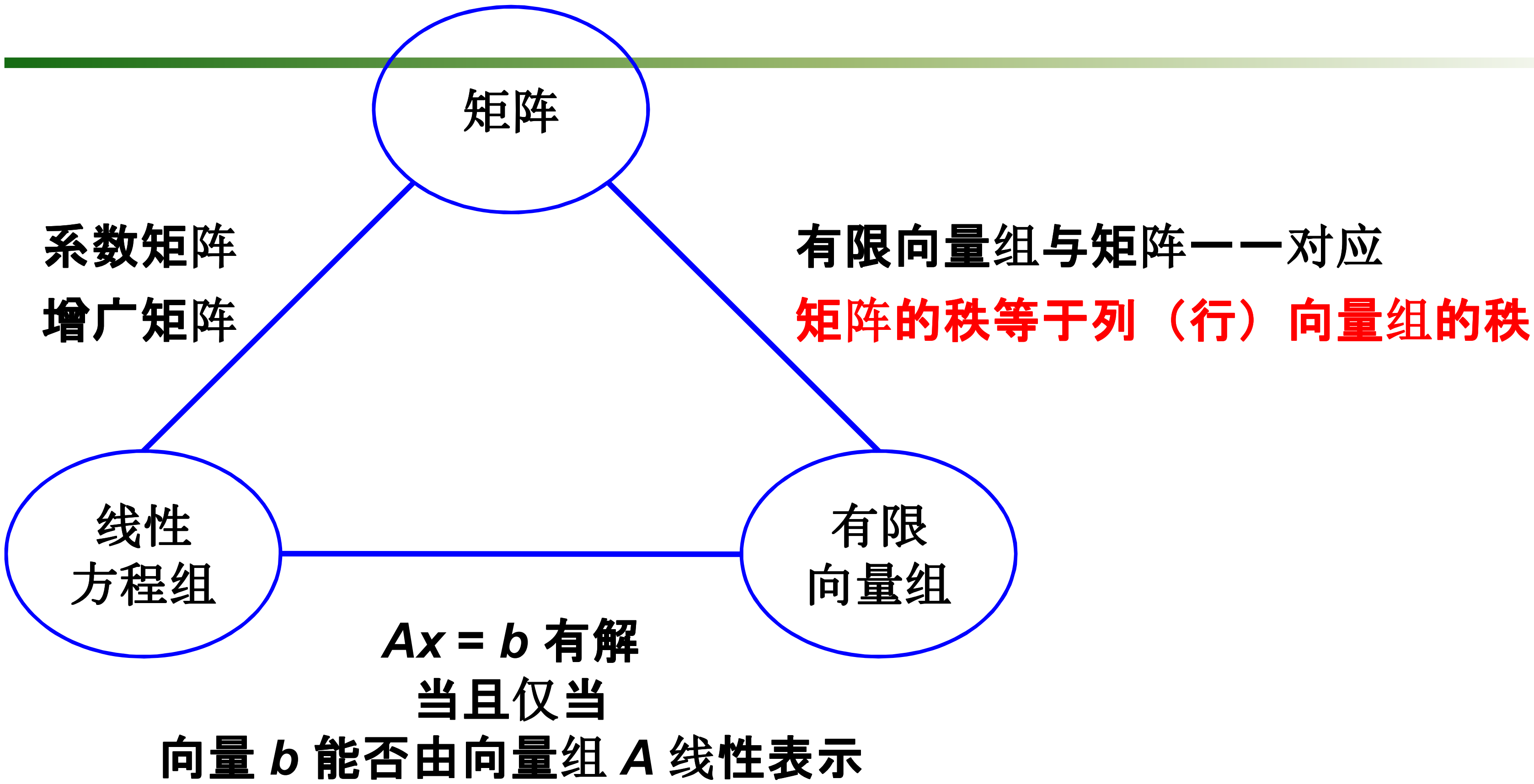
因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

结论：矩阵的最高阶非零子式一般不是唯一的，但矩阵的秩是唯一的.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

事实上，

- 根据 $R(A_0)=3$ 可知：A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个线性无关的部分组.
- 在矩阵 A 任取 4 个列向量，根据 $R(A)=3$ 可知：A中所有4 阶子式都等于零，从而这 4 个列向量所对应的矩阵的秩小于 4，即这 4 个列向量线性相关.
- A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个极大线性无关组.
- 矩阵 A 的列向量组的秩等于 3.
- 同理可证，矩阵 A 的行向量组的秩也等于 3.



一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

  矩阵的秩等于它的行向量组的秩.

一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

  矩阵的秩等于它的行向量组的秩.

- 今后，向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 的秩也记作 $R(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

- 若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个极大无关组，D_r 所在的 r 行是 A 的行向量组的一个极大无关组.

- 向量组的极大无关组一般是不唯一的.

例： 已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组 a_1, a_2 的线性相关性.

解：

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2)=2$，故向量组 a_1, a_2 线性无关，

同时， $R(a_1, a_2, a_3)=2$，故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关，

从而 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个极大无关组.

事实上， a_1, a_3 和 a_2, a_3 也是极大无关组.

极大无关组的等价定义

结论：向量组 A 和它自己的极大无关组 A_0 是等价的.

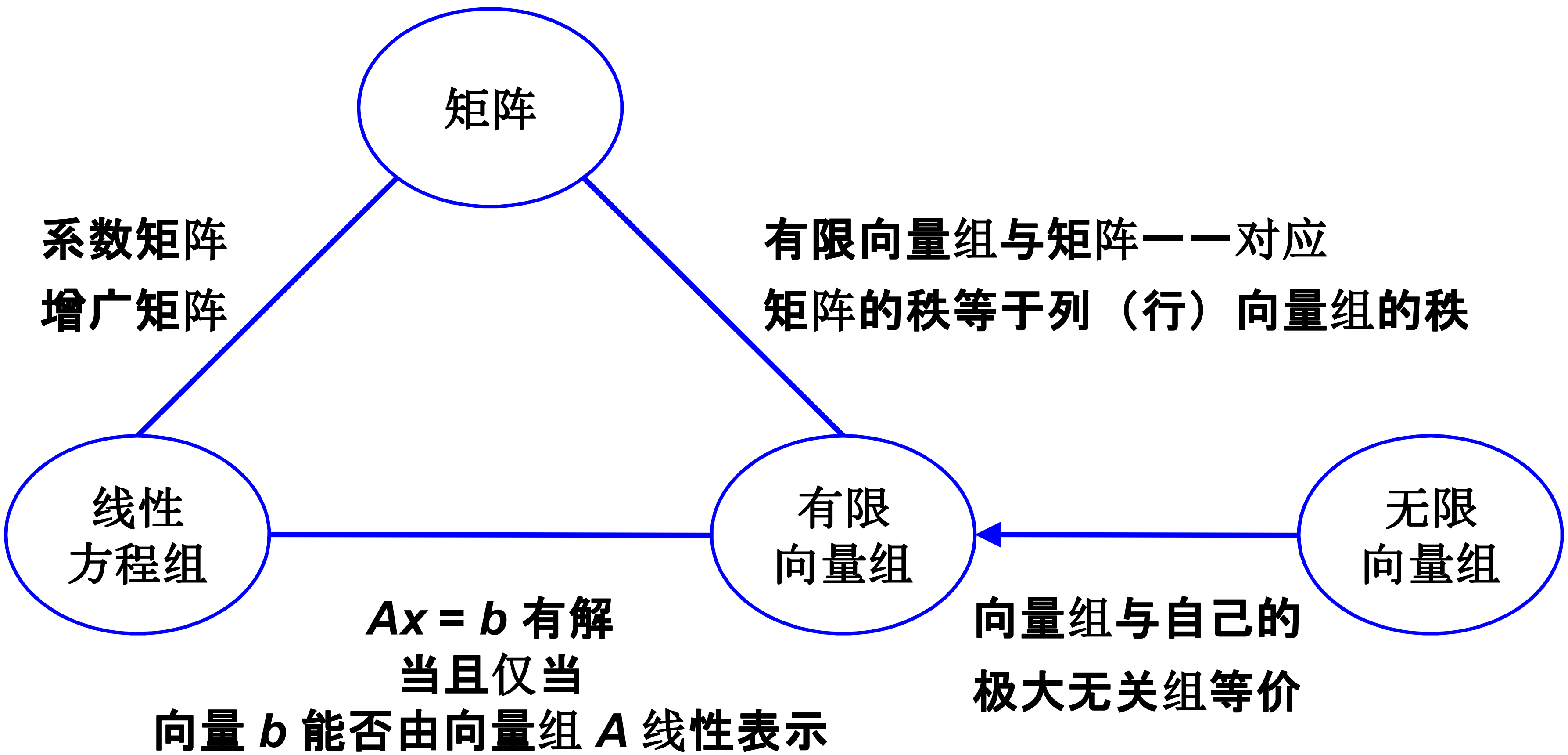
定义：设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots,$ a_r，满足

① 向量组 A_0：$a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关；

② 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个极大无关组.


矩阵
系数矩阵
增广矩阵
有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩
线性
方程组
有限
向量组
无限
向量组
$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示
向量组与自己的
极大无关组等价

极大无关组的意义

结论：向量组 A 和它自己的极大无关组 A_0 是等价的.

- 用 A_0 来代表 A，掌握了极大无关组，就掌握了向量组的全体.

  特别，当向量组 A 为无限向量组，就能用有限向量组来代表.

- 凡是对有限向量组成立的结论，用极大无关组作过渡，立即可推广到无限向量组的情形中去.

例： 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n，求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩.

解： n 阶单位矩阵 $E=(e_1,e_2,\cdots,e_n)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个极大无关组，R^n 的秩等于n .

思考：上三角形矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个极大无关组吗？

例： 设齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2 \qquad\quad -x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$$
的通解是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试求全体解向量构成的向量组 S 的秩.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.**

例：设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

求矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A) = 3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式．选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组.

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

思考：如何把 a_3, a_5 表示成a_1, a_2, a_4 的线性组合？

思路1：

向量 b 能由向量组 A 线性表示	$\Leftrightarrow$	线性方程组 $Ax=b$ 有解	令 $A_0=(a_1, a_2, a_4)$ 求解 $A_0x=a_3$ $A_0x=a_5$

思路2：利用矩阵 A 的行最简形矩阵.

解（续）：为把 a_3, a_5 表示成 a_1, a_2, a_4 的线性组合，把矩阵 A 再变成**行最简形矩阵**

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

于是 $Ax=0$ 与 $Bx=0$，即

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4+x_5a_5=0$$

$$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4+x_5b_5=0$$

同解.

即矩阵 A 的**列向量组**与矩阵 B 的**列向量组**有相同的线性关系.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-1} & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & \boxed{-3} \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} = B$$

可以看出：

$$b_3 = -b_1 - b_2$$
$$b_5 = 4b_1 + 3b_2 - 3b_4$$

所以

$$a_3 = -a_1 - a_2$$
$$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4$$