

文章编号: 1001-0920(2013)09-1335-06

统计特性已知的复杂系统控制器设计方法

钱富才^{1,2}, 李江¹, 刘丁¹

(1. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 西安 710048; 2. 西安交通大学 系统工程国家重点实验室, 西安 710054)

摘要: 对于具有白噪声加性干扰的复杂系统的控制问题, 建立了 Takagi-Sugeno 模糊控制模型, 利用 Kalman 滤波对系统状态信息进行局部估计, 用动态规划获得了控制增益, 这样导出的控制器具有学习特点, 使得闭环系统具有期望的性能指标. 以倒立摆为仿真实例, 仿真结果表明了所设计控制器的有效性.

关键词: 线性二次型高斯控制; Takagi-Sugeno 模型; Kalman 滤波; 动态规划

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Controller design method for complex systems with known statistics feature

QIAN Fu-cai^{1,2}, LI Jiang¹, LIU Ding¹

(1. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710054, China. Correspondent: QIAN Fu-cai, E-mail: fcqian@xaut.edu.cn)

Abstract: The control problem for a class of complex systems with the disturbance of white noise and additivity is considered. The Takagi-Sugeno fuzzy control model is established, the local state information is estimated by Kalman filter, and the control gain is obtained by dynamic programming. Then the controller is designed, which has the active learning feature and the desired performance. Using an inverted pendulum as a simulation example, the results show the effectiveness of the designed controller.

Key words: linear quadratic Gaussian control; Takagi-Sugeno model; Kalman filter; dynamic programming

0 引言

线性二次型高斯(LQG)问题以其工程上的实用性和数学上的易处理性, 受到了控制理论和工程界的普遍重视. 迄今为止, 航空、航天、工业系统和社会经济系统中的大量问题都可以在LQG框架下获得令人满意的控制效果. 在经典的LQG问题中被控对象是线性随机系统, 控制目标是状态与控制的二次形式累加和的均值. 基于这种理论设计出控制器的突出特点是最优控制增益与最优滤波之间具有分离性, 即控制律等于控制增益与系统当前时刻最佳状态估计之积. 控制增益与状态估计无关, 可以用Bellman的动态规划离线求出; 状态估计可以用Kalman滤波在线获得, 两者之间独立计算, 在线合成. 对于一类不具有分离性的复杂系统, 文献[1-5]用一系列具有未知参数的线性系统模型逼近复杂系统, 提出了自适应对偶控制

方法, 控制器一方面能够使系统朝着期望的目标运行, 另一方面又能充分激励系统, 获得丰富的信息, 减少了系统中的部分不确定性, 从而获得了较好的控制性能. 对于一类具有多项式形的非线性随机复杂系统, 文献[6]在LQG的框架下, 用迭代线性化策略给出了原系统的次优控制, 证明了算法的收敛性, 但由于每次迭代都要计算Riccati方程、Lyapunov方程和线性化系数, 产生了巨大的计算量, 仅适用低维系统.

就一般复杂系统而言, Takagi和Sugeno在20世纪80年代提出了著名的T-S模型, 基本思想是用模糊规则对复杂系统进行简化, 也就是用一系列线性系统逼近原来的复杂系统, 线性系统的个数等同于模糊规则数. 模糊规则的前件变量选为工程上容易测量的变量, 后件部分选用最简单的线性系统. 这种处理复杂系统的思想具有普适性, 一经出现就受到了工程界

收稿日期: 2012-05-18; 修回日期: 2012-07-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273127); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20116118110008).

作者简介: 钱富才(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机控制、系统辨识、最优控制等研究; 李江(1983-), 男, 博士生, 从事鲁棒控制、全球定位的研究.

和理论界的广泛关注,目前已经成功解决了一大批工程与理论问题,并且演化出了许多新的方法^[7-8].为使闭环系统稳定,这些方法的共同特点就是对所有局部线性模型必须找出一个公共的 Lyapunov 矩阵,导致控制器具有极大的保守性.为克服这一困难,模糊 Lyapunov 函数法^[9]、分段 Lyapunov 函数法^[10]和基于隶属函数形状与结构^[11]的众多方法应运而生.

文献[12]在最大-最小框架下研究了一类复杂系统的控制问题,在最坏情况下对系统实施最优控制,但假定系统的状态能够实时获取.文献[13]用全局线性化和 T-S 规则,在 LMIs 框架下设计了随机系统的滤波器,但没有考虑控制问题.文献[14]研究了状态依赖噪声的线性系统的 H_2/H_∞ 控制问题,获得了一些有意义的结果. T-S 模型的本质就是模糊规则设计与规则后件部分系统模型的选取,不同的模型必然有不同的闭环性能.因此,为数学处理上的方便,模型选取越简单越好,极端情况就是线性模型,这种简化以减少甚至牺牲闭环系统的性能为代价.

系统的复杂性往往和不确定性密切相关,如果不确定性能够先前知道统计特性,则 LQG 控制方法应该是模糊规则后件模型的最佳选择.作为尝试,本文对于具有白噪声加性干扰的复杂系统的控制问题,建立了 T-S 模糊控制模型,利用 Kalman 滤波对系统状态信息进行估计,用动态规划获得了控制增益,这样导出的控制器具有学习特点,使得闭环系统具有期望的性能指标,也减少了控制器的保守性.

1 问题描述

考虑下列离散时间动态系统:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k), \quad (1)$$

$$y(k) = h(x(k)) + v(k). \quad (2)$$

其中: $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $u(k) \in R^p$ 是输入向量, $y(k) \in R^q$ 是测量向量, $w(k) \in R^n$ 和 $v(k) \in R^q$ 是不相关的过程噪声和测量噪声, f 和 h 分别是 n 维和 q 维非线性函数.系统的复杂性体现于模型函数 f 和 h 未知,或者已知但高度复杂,导致控制难、测量难.这类问题是目前复杂系统研究的热点之一,同时系统在运行过程中状态与测量都受到统计特性已知的随机干扰 $w(k)$ 和 $v(k)$ 的影响.

用不同的输入序列 $\{u(k)\}$ 对系统实施控制必然产生不同的性能,下面的泛函定义为性能指标:

$$J = x^T(N)Q_0x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Q_1x(k) + u^T(k)Q_2u(k)]. \quad (3)$$

其中: $k=0$ 和 N 分别表示控制过程的初始时刻和终端时刻; Q_0 和 Q_1 为半正定矩阵, Q_2 为正定矩阵,它

们有适当维数,可以是定常的,也可以是时变的,处理方法完全相同.为书写简单起见,本文讨论定常情况.

对于随机非线性系统(1),在 k 时刻,控制器关于系统除了知道先验信息外(如 $w(k)$ 、 $v(k)$ 的统计特性及以加性方式对系统进行干扰),还有 k 时刻以前,施加于系统的控制输入序列 $\{u(0), u(1), \dots, u(k-1)\}$ 及直至当前时刻观测到的系统输出 $\{y(1), y(2), \dots, y(k)\}$. 因此,定义 k 时刻控制器能够利用的实时信息集如下:

$$I^k = \{u(0), \dots, u(k-1); y(1), \dots, y(k)\}.$$

本文解决的问题是,求具有 $u(k) = \mu_k(I^k)$ 形式的控制律,使性能指标(3)在统计意义下最小,即

$$(P) \quad \min_{\{u(k)\}} E\{J\}.$$

$$\text{s.t.} \quad x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$y(k) = h(x(k)) + v(k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

其中 $E\{\cdot\}$ 为期望算子.

对于离散时间随机非线性系统(1)和(2), T-S 随机模糊模型第 i 条规则取为如下形式:

$$R^i: \quad \text{If } z_1(k) \in M_{i1}, \dots, z_m(k) \in M_{im}, \text{ Then}$$

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + w_i(k), \quad (4)$$

$$y(k) = C_i x(k) + v_i(k). \quad (5)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, r$, r 表示 If-Then 规则的个数; $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]^T$ 为前件变量; M_{ij} 为模糊论域; $w_i(k)$ 、 $v_i(k)$ 和 $x(0)$ 为局部不相关的过程噪声、量测噪声和初始状态,它们服从高斯分布,即 $w_i(k) \sim N(0, \Omega_i)$, $v_i(k) \sim N(0, \Theta_i)$; A_i , B_i 和 C_i 是第 i 条规则下局部线性系统的模型矩阵.

用 r 条模糊规则将复杂系统进行局部简化,由于系统中的不确定性有明确的统计特征,每一条规则表示了复杂系统需要解决的局部线性化随机控制问题,这是一个标准的 LQG 问题.这样,在第 R^i 条规则下,对应的局部控制问题为

$$(LOP) \quad \min_{\{u(k)\}} E\{J\}.$$

$$\text{s.t.} \quad x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + w_i(k),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$y(k) = C_i x(k) + v_i(k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

2 模糊控制器设计

下面建立 T-S 随机模糊模型的控制律 $u(k)$ 设计的理论基础.假设初始状态 $x(0)$ 的均值为 m_0 , 方差为 P_0 , 且与噪声 $\{w_i(k)\}$ 、 $\{v_i(k)\}$ 不相关.

定义 1 k 时刻基于实时信息 I^k 对第 i 个子

系统的状态 $x_i(k)$ 的估计为 $\hat{x}_i(k) = E\{x(k)|I^k, R^i\}$, 则 $\hat{x}_i(k)$ 可用如下的 Kalman 滤波递推方程得到^[1]:

$$\hat{x}_i(k+1) = A_i\hat{x}_i(k) + B_iu(k) + K_i(k)\nu_i(k). \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} K_i(k) &= A_iP_i(k|k-1)C_i^T[C_iP_i(k|k-1)C_i^T + \Theta_i]^{-1}, \\ P_i(k+1|k) &= A_iP_i(k|k)A_i^T + \Omega_i, \\ P_i(k|k) &= [I - K_i(k)C_i]P_i(k|k-1), \\ \nu_i(k) &= y(k) - C_i\hat{x}_i(k|k-1). \end{aligned}$$

边界条件为 $\hat{x}_i(0) = m_0$ 和 $P_i(0|0) = P_0$.

定理 1 对于第 i 条规则 R^i , 局部最优控制为

$$u_i^*(k) = -L_i(k)\hat{x}_i(k). \quad (7)$$

其中

$$L_i(k) = D_i^{-1}(k)B_i^T S_i(k+1)A_i, \quad (8)$$

$$D_i(k) = B_i^T S_i(k+1)B_i + Q_2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S_i(k) &= A_i^T S_i(k+1)A_i + Q_1 - \\ &L_i^T(k)D_i(k)L_i(k), \end{aligned} \quad (10)$$

边界条件为 $S_i(N) = Q_0$.

证明 对于给定的第 i 条规则 R^i 对应的局部控制问题, 其最优控制可用动态规划获得.

在阶段 $N-1$, 有

$$\begin{aligned} J(N-1) &= E\{[x^T(N-1)Q_1x(N-1) + \\ &u^T(N-1)Q_2u(N-1)] + \\ &x^T(N)S_i(N)x(N)|I^{N-1}\} = \\ &E\{[x^T(N-1)Q_1x(N-1) + u^T(N-1)Q_2u(N-1)] + \\ &[A_ix(N-1) + B_iu(N-1) + w_i(N-1)]^T S_i(N) \times \\ &[A_ix(N-1) + B_iu(N-1) + w_i(N-1)]|I^{N-1}\} = \\ &E\{x^T(N-1)[Q_1 + A_i^T S_i(N)A_i]x(N-1) + \\ &u^T(N-1)[Q_2 + B_i^T S_i(N)B_i]u(N-1) + \\ &2u^T(N-1)B_i^T S_i(N)A_ix(N-1)|I^{N-1}\} + \\ &\text{Tr}(S_i(N)\Omega_i), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\text{Tr}(X)$ 表示方阵 X 的迹.

将 Kalman 滤波公式 (6) 代入式 (11), 整理后有

$$\begin{aligned} J(N-1) &= \hat{x}_i^T(N-1)[Q_1 + A_i^T S_i(N)A_i]\hat{x}_i(N-1) + \\ &\text{Tr}[(Q_1 + A_i^T S_i(N)A_i)P_i(N|N-1)] + \\ &u^T(N-1)[Q_2 + B_i^T S_i(N)B_i]u(N-1) + \\ &2u^T(N-1)B_i^T S_i(N)A_i\hat{x}_i(N-1) + \\ &\text{Tr}[S_i(N)\Omega_i]. \end{aligned} \quad (12)$$

$J(N-1)$ 关于 $u(N-1)$ 最小化, 即

$$\frac{\partial J(N-1)}{\partial u(N-1)} = 0,$$

可得在规则 R^i 下, 局部最优控制为

$$u_i^*(N-1) = -L_i(N-1)\hat{x}_i(N-1),$$

表明定理 1 的结论在 $k = N-1$ 时成立.

将最优控制 $u_i^*(N-1)$ 代入式 (12), 在 $N-1$ 阶段的最优指标为

$$\begin{aligned} J^*(N-1) &= \hat{x}_i^T(N-1)S_i(N-1)\hat{x}_i(N-1) + \\ &\text{Tr}[S_i(N)P_i(N|N-1)]. \end{aligned}$$

剩下的证明, 采用归纳法. 假定在 $k+1$ 阶段, 最优指标为

$$\begin{aligned} J^*(k+1) &= \hat{x}_i^T(k+1)S_i(k+1)\hat{x}_i(k+1) + \\ &\sum_{j=k+2}^N \text{Tr}[S_i(j)P_i(j|j-1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

根据 Bellman 动态规划方程, 在 k 阶段, 关于 $u(k)$, 必须最小化下面方程:

$$\begin{aligned} J(k) &= E\{x^T(k)Q_1x(k) + u^T(k)Q_2u(k) + \\ &J^*(k+1)|I^k\}. \end{aligned} \quad (14)$$

由实时信息集 I^k 的定义, 显然 $I^k \subset I^{k+1}$. 对式 (11) 使用期望算子的光滑性

$$E\{(\cdot)|I^k\} = E\{E\{(\cdot)|I^{k+1}\}|I^k\},$$

有如下方程成立:

$$\begin{aligned} J(k) &= E\{x^T(k)Q_1x(k) + u^T(k)Q_2u(k) + \\ &\hat{x}_i^T(k+1)S_i(k+1)\hat{x}_i(k+1)|I^k\} + \\ &\sum_{j=k+2}^N \text{Tr}[S_i(j)P_i(j|j-1)]. \end{aligned} \quad (15)$$

将 Kalman 滤波方程 (6) 代入式 (15), 有

$$\begin{aligned} J(k) &= E\{x^T(k)Q_1x(k) + u^T(k)Q_2u(k) + \\ &[A_i\hat{x}_i(k) + B_iu(k) + K_i(k)\nu_i(k)]^T \times \\ &S_i(k+1)[A_i\hat{x}_i(k) + B_iu(k) + K_i(k)\nu_i(k)]|I^k\} + \\ &\sum_{j=k+2}^N \text{Tr}[S_i(j)P_i(j|j-1)]. \end{aligned} \quad (16)$$

整理式 (16), 有

$$\begin{aligned} J(k) &= \hat{x}_i^T(k)[Q_1 + A_i^T S_i(k+1)A_i]\hat{x}_i(k) + \\ &u^T(k)[Q_2 + B_i^T S_i(k+1)B_i]u(k) + \\ &2u^T(k)B_i^T S_i(k+1)A_i\hat{x}_i(k) + \\ &\sum_{j=k+1}^N \text{Tr}[S_i(j)P_i(j|j-1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

目标函数 $J(k)$ 关于 $u(k)$ 最小化, 得

$$u^*(k) = -L_i(k)\hat{x}_i(k).$$

将 $u^*(k)$ 代回 $J(k)$, 则 k 阶段的最优指标为

$$J^*(k) = \hat{x}^T(k)S_i(k)\hat{x}(k) + \sum_{j=k+1}^N \text{Tr}[S_i(j)P_i(j|j-1)]. \quad (18)$$

定理 1 得证. \square

由定理 1 可看出, 第 i 子系统模型对应的最优控制 $u_i^*(k)$ 由两部分组成: 一部分为控制增益 $L_i(k)$, 另一部分为状态估计 $\hat{x}_i(k)$. 前者由式 (8)~(10) 确定, 它们仅与系统的局部模型矩阵 A_i, B_i, C_i 和性能指标中的矩阵 Q_0, Q_1, Q_2 有关, 与系统的测量、状态无关, 因此可以事先离线计算后存储起来. 后者由式 (6) 确定, 它与新息 $\nu_i(k) = y(k) - C_i\hat{x}_i(k)$ 有关. 显然, $\nu_i(k)$ 由当前测量 $y(k)$ 所确定, 这是一个实时信息, 必须在线确定. 这说明, 控制增益 $L_i(k)$ 与状态估计 $\hat{x}_i(k)$ 之间具有分离性, 这个特点为工程应用带来了极大的方便.

每条规则在不同的工作点对复杂系统进行局部线性化, 这样规则 R^i 对应一个子系统, r 条规则对应 r 个子系统. 根据定理 1 每一个子系统模型可以确定一个相应的最优控制, 则整个控制过程中, 每个时刻 k 都有 r 个最优控制 $u_1^*(k), u_2^*(k), \dots, u_r^*(k)$ 可供选择. 如何确定出施加于实际系统的控制律, 下面的定理对此做出了回答.

定理 2 对于问题(P), 在 k 时刻施加于系统的控制为

$$u^*(k) = -L(k)\hat{x}(k).$$

其中

$$L(k) = \sum_{i=1}^r w_i(k)L_i(k), \quad \hat{x}(k) = \sum_{i=1}^r w_i(k)\hat{x}_i(k),$$

$$w_i(z(k)) = h_i(z(k)) / \sum_{i=1}^r h_i(z(k)),$$

$$h_i(z(k)) = \prod_{j=1}^m M_{ij}(z_j(k)).$$

证明 在 k 时刻, 对于在 T-S 模糊规则 R^i 下, 复杂系统被简化为 (4) 和 (5), 根据定理 1, 有如下结论:

$$R^i: \text{ If } z_1(k) \in M_{i1}, \dots, z_m(k) \in M_{im},$$

$$\text{ Then } u_i^*(k) = -L_i(k)\hat{x}_i(k).$$

运用单点模糊化、乘积推理和平均加权解模糊化原理, 在 k 时刻, 有

$$h_i(z(k)) = \prod_{j=1}^m M_{ij}(z_j(k)),$$

$$w_i(z(k)) = h_i(z(k)) / \sum_{i=1}^r h_i(z(k)).$$

上面计算出的 $w_i(z(k))$ 为 k 时刻第 i 个子系统在整个

复杂系统中所占的权重, 因此, k 时刻的增益 $L(k)$ 和状态估计 $\hat{x}(k)$ 可以如下给出:

$$L(k) = \sum_{i=1}^r w_i(k)L_i(k),$$

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=1}^r w_i(k)\hat{x}_i(k).$$

定理得证. \square

定理 2 表明, 用 r 条规则将复杂系统简化为 r 个子系统, 每个子系统在 k 时刻可以求出最优的局部控制增益 $L_i(k)$ 和局部状态估计 $\hat{x}_i(k)$. 然后, 用 PDC 原理, 对 r 个局部增益和状态估计用隶属度进行加权和, 即得 k 时刻的最优控制.

3 仿真分析

以具有随机噪声干扰的倒立摆系统为例, 说明本文提出的控制方法的具体实施.

倒立摆系统是一个典型的非线性控制系统, 其模型如下:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + w(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g \sin(x_1(t)) - a_1 x_2^2 \sin(2x_1(t))/2}{4l/3 - a_1 \cos^2(x_1(t))} - \frac{a_2 \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - a_1 \cos^2(x_1(t))} + w(t),$$

$$y_1(t) = x_1(t) + v(t),$$

$$y_2(t) = x_2(t) + v(t).$$

其中: x_1 为角度, x_2 为角速度, $u(t)$ 为系统的控制, $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 为系统的输出, $w(t)$ 和 $v(t)$ 分别为独立增量过程与测量噪声; $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, $l = 0.5 \text{ m}$ 为摆长, $a_1 = \frac{ml}{M+m}$, $a_2 = \frac{1}{M+m}$, $m = 2 \text{ kg}$ 为摆的质量, $M = 8 \text{ kg}$ 为小车质量. 假设 $x_1(t) \in [-1.34, 1.34]$, 单位为 rad; $x_2 \in [-5, 5]$, 单位为 rad/s.

在上述模型中, 可以明显地看出第 2 个动态方程是一个复杂的非线性方程, 导致控制器设计极为困难. 根据验前信息, 可以假定系统运行在某个范围内, 如图 1 所示的矩形.

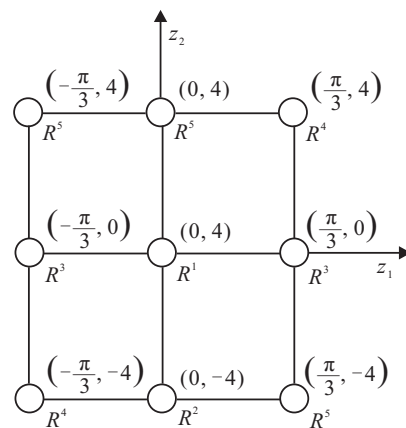


图 1 控制区域

为使问题简化, 在矩形域中取出9个点, $(0, 0)$, $(0, \pm 4)$, $(\pi/3, \pm 4)$, $(\pm\pi/3, 0)$, $(-\pi/3, \pm 4)$, 用T-S模糊规则对非线性系统在这9个点进行局部线性化, 每条规则对应一个线性系统, 即

$$R^1: \text{ If } z_1(k) \in M_{11} \text{ and } z_2(k) \in M_{12},$$

$$\text{ Then } x(k+1) = A_1x(k) + B_1u(k) + w_1(k),$$

$$y(k) = C_1x(k) + v_1(k).$$

$$R^2: \text{ If } z_1(k) \in M_{21} \text{ and } z_2(k) \in M_{22},$$

$$\text{ Then } x(k+1) = A_2x(k) + B_2u(k) + w_2(k),$$

$$y(k) = C_2x(k) + v_2(k).$$

$$R^3: \text{ If } z_1(k) \in M_{31} \text{ and } z_2(k) \in M_{32},$$

$$\text{ Then } x(k+1) = A_3x(k) + B_3u(k) + w_3(k),$$

$$y(k) = C_3x(k) + v_3(k).$$

$$R^4: \text{ If } z_1(k) \in M_{41} \text{ and } z_2(k) \in M_{42},$$

$$\text{ Then } x(k+1) = A_4x(k) + B_4u(k) + w_4(k),$$

$$y(k) = C_4x(k) + v_4(k).$$

$$R^5: \text{ If } z_1(k) \in M_{51} \text{ and } z_2(k) \in M_{52},$$

$$\text{ Then } x(k+1) = A_5x(k) + B_5u(k) + w_5(k),$$

$$y(k) = C_5x(k) + v_5(k).$$

其中第*i*条规则 R^i 中的隶属度函数 M_{ij} 的解析表达式如下:

$$M_{11} = e^{-\frac{(z_1-0)^2}{2 \cdot 0.3^2}}, M_{12} = e^{-\frac{(z_2-0)^2}{2 \cdot 1.2^2}},$$

$$M_{21} = e^{-\frac{(z_1-0)^2}{2 \cdot 0.3^2}}, M_{22} = e^{-\frac{(z_2 \pm 4)^2}{2 \cdot 1.2^2}},$$

$$M_{31} = e^{-\frac{(z_1 \pm \frac{\pi}{3})^2}{2 \cdot 0.3^2}}, M_{32} = e^{-\frac{(z_2-0)^2}{2 \cdot 1.2^2}},$$

$$M_{41} = e^{-\frac{(z_1 \pm \frac{\pi}{3})^2}{2 \cdot 0.3^2}}, M_{42} = e^{-\frac{(z_2 \pm 4)^2}{2 \cdot 1.2^2}},$$

$$M_{51} = e^{-\frac{(z_1 \pm \frac{\pi}{3})^2}{2 \cdot 0.3^2}}, M_{52} = e^{-\frac{(z_2 \pm 4)^2}{2 \cdot 1.2^2}}.$$

取系统采样时间 $T = 0.1$ s, 对倒立摆局部连续模型离散化, 相应的离散子系统模型矩阵如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.088 & 1.780 \\ 0.103 & 1.088 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.016 \\ -0.018 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.073 & 1.490 \\ 0.102 & 1.073 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.013 \\ -0.018 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.029 & 0.591 \\ 0.101 & 1.029 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.008 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.037 & 0.753 \\ 0.104 & 1.093 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} -0.003 \\ -0.008 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1.036 & 0.714 \\ 0.099 & 0.983 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} -0.003 \\ -0.008 \end{bmatrix}, C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在*k*时刻, 尽管系统的状态变量 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 是不可量测的, 但利用已知实时信息 I^k 对它的估计

$\hat{x}_1(k)$ 和 $\hat{x}_2(k)$ 是已知的. 因此, 前件变量 $z_1(k)$ 和 $z_2(k)$ 分别用 $\hat{x}_1(k)$ 和 $\hat{x}_2(k)$ 代替状态变量 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$, 这样每条规则对应的局部线性模型即可完全确定.

图2给出了状态量 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 的隶属度函数形状, 它们与其他参考文献的隶属函数形状完全相同, 因此, 本文也将隶属度函数假设为正态分布. 由于 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 的不可测量性, 同样用估计 $\hat{x}_1(k)$ 和 $\hat{x}_2(k)$ 对它们进行代换.

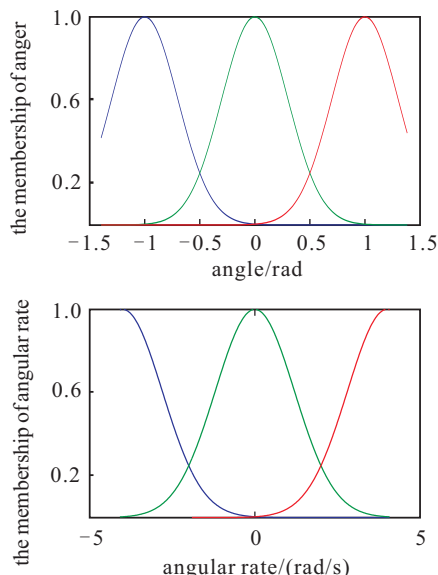


图2 状态向量*x*的隶属度函数

为书写方便起见, 假设系统在每个局部模型噪声有完全相同的统计特性, 即 $w_i(k) \sim N(0, 0.8)$, $v_i(k) \sim N(0, 0.1)$. 这表明, 干扰在每个局部模型噪声的均值与方差不变. 假如不是这种情况, 即各局部模型的统计特性不同, 仿真中只是统计特性的数值大小不同而已, 则控制器设计方法没有任何区别. 再假定系统的初始状态是图1所示的矩形内的随机数, 则仿真结果如图3和图4所示.

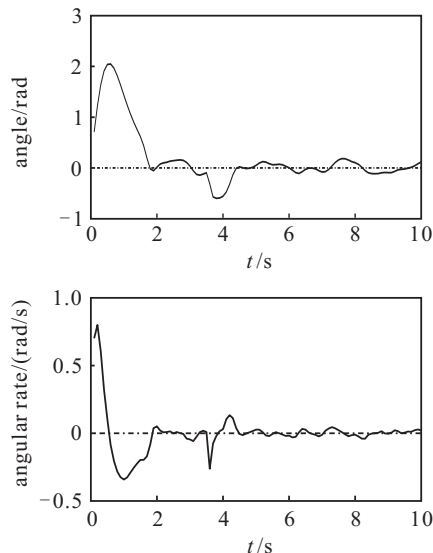


图3 状态向量 (x_1, x_2) 响应曲线

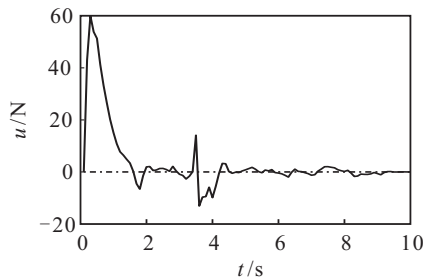


图 4 系统的控制向量 (u) 曲线

图 3 是系统的状态响应曲线,“虚线”表示系统状态的目标值,“实线”表示在本文的控制策略下,系统状态的实际响应曲线.从状态曲线可以看出,用本文提出的方法,非线性系统的状态向量在控制向量 u 的作用下,系统状态向量快速趋于期望位置.图 4 是控制 u 的曲线图,在有限步数内, u 趋向于零,表明用最小的控制能量实现了期望的控制.

4 结 论

本文研究了具有噪声的离散随机非线性系统在二次性能指标下的最优控制问题.传统的对偶控制方法采用一系列线性模型逼近复杂系统,线性模型必须适应复杂系统,因此,控制器必须在控制与参数学习间做出平衡.由于两者互相耦合,使得最优控制的解析解无法获得.本文在 T-S 模糊控制框架下,设计出了能够调节随机非线性系统的控制器,仿真结果也表明了控制器的有效性.用本文的方法设计出的控制器,由于控制增益与状态估计间满足分离性,因此,计算量小,容易实现.

然而,本文的方法也有一定的局限性.例如,利用模糊加权所得到的控制律,对于非线性很强的系统,未必会有很好的控制效果,这源于每个局部模型都采用了线性化方法.另外,在每条规则下获得的局部最优控制合并后是否为全局最优控制? 这些问题都有待于进一步深入研究.

参考文献(References)

- [1] Li Duan, Qian Fucui, Gao Jianjun. Performance-first control for discrete-time LQG problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(9): 2225-2230.
- [2] Li Duan, Qian Fucui, Fu Peilin. Optimal nominal dual control for discrete-time LQG problem with unknown parameters[J]. Automatica, 2008, 44(1): 119-127.
- [3] Li Duan, Qian Fucui, Fu Peilin. Variance minimization approach for a class of dual control problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(12): 2010-2020.
- [4] 钱富才, 朱少平, 刘丁. 噪声未知的 LQG 控制问题研究[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(8): 1017-1022.
- (Qian F C, Zhu S P, Liu D. On LQG problems with unknown noises[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(8): 1017-1022.)
- [5] 钱富才, 宋俐, 刘丁, 等. 基于滚动优化的对偶控制策略[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 855-860.
- (Qian F C, Song L, Liu D, et al. Dual control strategy based on receding horizon[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(6): 855-860.)
- [6] Piotr Kaczynski, Leslaw Socha. Iterative procedures in application of the LQG approach to control problem for polynomial stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(8): 1875-1881.
- [7] Dong Jiuxiang, Yang Guanghong. Control synthesis of T-S fuzzy systems based on a new control scheme[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2011, 19(2): 323-338.
- [8] Liu X, Zhang Q. Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for T-S fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(6): 830-839.
- [9] Wang W J, Chen Y J, Sun C H. Relaxed stabilization criteria for discrete time T-S fuzzy control system based on a switching fuzzy model and piecewise Lyapunov function[J]. IEEE Trans on System, Man and Cybern B, 2007, 37(3): 551-559.
- [10] Kruszewski A, Wang R, Guerra T M. Nonquadratic stabilization condition for a class of uncertain nonlinear discrete time T-S fuzzy models: A new approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(2): 606-611.
- [11] Sala A, Arino C. Relaxed stability and performance LMI conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with polynomial constraint on membership function overlap[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2008, 16(5): 1328-1336.
- [12] 姜因, 井元伟. 基于 T-S 模型的非线性系统极小极大控制[J]. 系统工程学报, 2009, 24(4): 469-473.
- (Jiang N, Jing Y W. Minimax control of nonlinear systems based on T-S model[J]. J of Systems Engineering, 2009, 24(4): 469-473.)
- [13] Chen B S, Chen W, Wu H. Robust H_2/H_∞ global linearization filter design for nonlinear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems—I, 2009, 56(7): 1441-1454.
- [14] Zhang Weihai, Feng Gang. Nonlinear stochastic H_2/H_∞ control with (x, u, v) -dependent noise: Infinite horizon case[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(5): 1323-1328.