第 28 卷 第 10 期 控 制 与 决 策 2013 年 10 月
Vol. 28 No. 10 Control and Decision Oct. 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 10-1441-05

压缩感知综述

尹宏鹏[a], 刘兆栋[a], 柴 毅[a,b], 焦绪国[a]

(重庆大学 a. 自动化学院，b. 输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室，重庆 400044)

摘 要: 压缩感知理论的诞生使得采样速率与信号的结构和内容相关, 并以低于奈奎斯特采样定理要求的频率采样、编码和重构. 在实际应用中, 为解决数据冗余和资源浪费的瓶颈问题开拓了一条新道路, 也为其他学科发展提供了新的契机. 从发展历史和研究现状等方面入手, 对稀疏表示、测量矩阵的构造、稀疏重构算法和主要应用方面进行了详细的梳理和研究. 对当前研究的热点、难点作了分析和探讨, 并指出了未来的发展方向和应用前景.

关键词: 压缩感知；稀疏表示；测量矩阵；稀疏重构算法

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Survey of compressed sensing

YIN Hong-peng[a], *LIU Zhao-dong*[a], *CHAI Yi*[a,b], *JIAO Xu-guo*[a]

(a. College of Automation，b. State Key Laboratory of Power Transmission Equipment and System Security and New Technology，Chongqing University，Chongqing 400044，China. Correspondent：YIN Hong-peng，E-mail: yinhongpeng@gmail.com)

Abstract: The presence of compressed sensing theory makes the sample rate relate to the signal structure and content. The sample rate of compressed sensing for the signal sample, coding and reconstruction is less than the Nyquist theorem methods. Therefore, a method is proposed to solve the bottleneck problem of data redundancy and resource-wasting. Moreover, it offers new developing chances for other research fields. The development and current situation of compressed sensing theory are involved. A detailed carding and research on the sparse representation, measurement matrix design, reconstruction algorithm and application aspects is discussed. Therefore, the current hot spots and difficulties are analyzed and discussed. Finally, the direction of future development and application prospect are discussed.

Key words: compressed sensing；sparse representation；measurement matrix；reconstruction algorithm

0 引 言

信号处理中基本的原理依据是奈奎斯特采样定理, 在信号采样时, 只有满足大于信号最高频率两倍的频率进行信号采样, 才能精确地重构原始信号. 信号采样过程中产生大量的冗余数据, 最终只有部分重要的信息被应用, 造成了大量资源的浪费和在特殊环境中数据使用的限制. 由此学者们提出, 可否利用被采样数据精确地重构原始信号或图像, 这部分重要数据是可以直接采集到的.

最初, Mistretta 等[1]提出: 能否利用有限的采样数据使得原始信号或图像被精确或近似精确地重构, 以缩减核磁共振成像的时间. Mistretta 等依据此观念进行模拟实验, 实验采用经典的图像重构算法. 实验结构证明重构的图像边缘模糊, 且分辨率低. 之后, Candes 等[2]利用有限的采样数据精确地重构了原始信号, 但采用的是惩罚思想, 实验结果证明, 在图像的稀疏表示中, 随机选取的稀疏系数只有不少于 $2K$ 个 (K 是非零稀疏系数的个数), 原始信号或图像才能被精确地重构, 且具有惟一性的特点, 由此诞生了压缩传感理论.

针对可稀疏压缩信号, Donoho 等[3-6]在稀疏分解和信号恢复等思想的基础上提出压缩感知 (CS) 理论框架, 随后该理论迅速发展, 为解决瓶颈问题提供了理论基础. 在此基础上, Donoho[3]正式提出了“压缩传感”这一术语, 此后文献 [2-3,6-7] 针对稀疏表示的稀疏性和不相干性、稳健的压缩采样、随机测量等方

收稿日期: 2012-10-16；**修回日期:** 2013-01-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203321)；中国博士后基金项目(2012M521676)；中央高校基金科研业务费项目(106112013CD-JZR170005).

作者简介: 尹宏鹏(1981−), 男, 副教授, 博士, 从事压缩感知、计算机视觉等研究；刘兆栋(1985−), 男, 硕士生, 从事压缩感知、计算机视觉的研究.

面进行了许多研究, 并将压缩感知作为测量技术应用于天文学、核磁共振、模式识别等领域, 取得了良好的发展.

压缩感知引起了国外众多学者和组织机构的关注, 被美国科技评为2007年度十大科技进展之一, 如Waheed等[8]提出了网络数据的压缩传感; 西雅图Intel、贝尔实验室、Google等知名公司也开始研究压缩感知; 莱斯大学提出了一种利用光域压缩的新颖的压缩图像照相机框架和新的数字图像/视频照相机以直接获取随机映射, 并建立CS专业网站, 涵盖了理论和应用的各个方面[9]. 在国内, 近几年对CS理论和实际应用的研究也成为热门的研究方向. 以压缩感知为检索主题词在国家自然科学基金网络信息系统(ISIS)[10]中查询近3年的项目资助情况, 其资助力度呈逐年递增趋势(2010年资助39项, 合计1 627万元; 2011年资助54项, 合计2 691万元; 2012年资助77项, 合计4 135万元). 以上结果显示, 对压缩感知的研究已经受到国家层面的大力重视, 也吸引了越来越多的优秀学者参与.

国内众多学者对压缩感知进行了深入研究, 其中具有代表性的有: 文献[11]针对压缩感知稀疏重建算法进行了研究; 文献[12]详细探讨了压缩传感的理论框架及其关键技术问题; 文献[13]深入研究了压缩感知的理论框架和基本思想, 并讨论了未来的应用前景; 文献[14]探索了在探地雷达三维成像中压缩感知理论的应用; 文献[15]将压缩感知理论应用于无线传感网, 并在分布式压缩传感理论基础上提出了一种数据抽样压缩和重构的方法; 文献[16]将可压缩传感理论运用于实际传感器网络数据恢复问题.

在各个领域, 压缩传感虽然已经取得了显著的成果, 但是国内外学者认为仍存在很多问题需要研究[12]: 1) 对于越来越完善的重构算法, 如何使构造的确定性测量矩阵是最好的; 2) 如何探索稳定的重构算法, 使得原始可压缩信号或图像被精确地重构, 且所构造的重构算法要求计算复杂度低、对观测次数限制少; 3) 如何在冗余字典或非正交分解下找到一种快速有效的稀疏分解算法; 4) 如何运用压缩感知理论设计有效的软硬件解决大量的实际问题; 5) 针对p-范数的最优化求解问题, 如何深入研究; 6) 如何在含噪信号的重构或采样过程中收入噪声后寻求最优的信号重构算法. 此外, 将压缩感知理论应用于其他领域, 如医学信号检测、特征提取、故障诊断、图像融合等, 也是众多学者研究的难点和热点.

压缩感知理论是新颖的理论, 是对经典信号处理领域的补充和完善, 其研究成果显著影响了图像处理、数据融合等其他领域, 然而专家学者认为还有许多问题有待研究.

1 压缩感知研究方向

在信号处理过程中, 抽样的目的是运用最少的抽样点数获得有效的信息. 在设计抽样系统时, 完整恢复信号所需的最少抽样点数是必须考虑的问题, 经典奈奎斯特定理给出了关于带限信号的答案, 而在经典理论的基础上提出的压缩传感理论, 由于低于奈奎斯特采样定理要求的频率采样、编码和重构, 适用于更广泛的信号类型. CS理论主要涉及信号的稀疏表示、稀疏测量和重构3个基本核心问题.

1.1 稀疏表示

稀疏表示的基本思想是假设自然信号可以被压缩表示, 从数学角度而言, 是对多维数据进行线性分解的一种表示方法. 稀疏表示具有两个特征: 过完备性和稀疏性. 字典的过完备性表示字典的行数大于列数, 即信号的维数小于原子的个数. 相比于正交变换基, 构造的过完备字典含有的原子数目更多, 能提供更稳定的稀疏表示. 因此, 稀疏表示(即构造具有稀疏表示能力的基或者设计过完备字典$\varPsi$)的目的是希望信号非零元个数足够少, 即令$\varPsi$足够稀疏以确保信号或图像“少采样”.

目前较流行的信号稀疏表示方法多数基于稀疏变换, 对信号的Fourier变换、小波变换、Gabor变换等都具有一定的稀疏性. 多尺度几何分析为一些特殊形态提供了最稀疏的表示, 如Curvelet变换、Bandelet变换、Contourlet变换等. 部分学者研究了在混合基下的信号稀疏表示, 如文献[17]将其应用于形态成分分析, 文献[11]应用于图像CS重构, 文献[18]应用于MRI(magnetic resonance imaging)重构等, 均取得了比单一稀疏表示下更好的效果.

传统的信号分解方法都是将信号分解到一组完备的正交基上, 有较大的局限性. 在表达任意信号时, 当选用某个特定函数作为基时, 基函数便决定了信号的展开形式. 伴随着信息技术不断发展, 信号或图像处理的理论也日新月异, 更有效的非正交分解方法也因此产生. 非正交分解日益引起专家学者们的重视, 给信号的稀疏分解指明了一个新方向.

信号在冗余字典下的稀疏分解是稀疏表示的研究热点, 而构造稀疏字典的研究热点是过完备字典. 冗余字典设计或学习必须遵循的基本准则是: 对于信号本身的各种固有特征, 在构造字典的过程中各元素应尽可能匹配. 在稀疏基或字典的构造过程中, 选择合适的稀疏字典能够确保信号的表示系数足够稀疏, 进而确保直接与非零系数相关的压缩测量数目足够少, 同时能够高概率地重构信号或图像.

经过对国内外众多优秀学者的研究和理论进行梳理, 常用的稀疏表示算法主要包括基追踪算法(BP)[19]、贪婪匹配追踪算法 (MP)[20]、正交匹配追踪算法 (OMP)[21]等. 在稀疏分解算法研究中, 大多数只从原子库构造或分解算法角度出发, 然后对稀疏分解算法进行各种改进. 未来利用原子库自身结构特性的稀疏分解算法是压缩感知理论研究的热点之一.

从现有的文献来看, 众多学者对稀疏表示的研究重点主要集中在两个方面: 如何找到信号的最佳稀疏基和如何从这些基或字典中找到最佳的K项组合来逼近源信号; 针对已有算法如何实现冗余字典的快速计算或者设计新的低复杂度的稀疏分解算法.

1.2 稀疏测量

为了保证精确地重构原始信号, 对信号的线性投影采用一个与稀疏变换矩阵不相关的测量矩阵, 从而得到感知测量值, 即所谓的稀疏测量. 因此, 稀疏测量主要集中在两个方面: 如何构造随机测量矩阵使得测量值的数目尽可能的少和如何使构造的测量矩阵与系统不相关.

从原理角度看, 测量矩阵的选择需要满足非相干性和限制等容性 (RIP) 两个基本原则. 文献 [22] 给出并证明了测量矩阵必须满足 RIP 条件; 文献 [23] 给出了测量矩阵的一个等价条件是测量矩阵与稀疏基之间不相关, 即若运用与稀疏变换基不相关的测量矩阵对信号压缩测量, 则原始信号可以经过某种变换后稀疏表示.

构造一个与稀疏矩阵不相关的 $M \times N (M \ll N)$ 测量矩阵 Φ 对信号进行线性投影, 获取感知测量值 $y = \Phi f$, y 是 $M \times 1$ 矩阵, 使测量对象从 N 维降为 M 维[22-23]. 稀疏测量过程是非自适应的, 即测量矩阵 Φ 的选择不依赖于信号 f. 构造的测量矩阵要求信号从 f 转换为 y 的过程中获取的 K 个测量值能够保留原始信号的全部信息, 以保证信号的精确重构.

在测量矩阵的设计过程中, 有 $y = \Phi f = \Phi\Psi\alpha = A\alpha$, 其中 A 需满足有限等距性质[22-23], 即对于任意 K 值的稀疏信号 f 和常数 $\delta_k \in (0, 1)$, 有

$$1 - \delta_k \leqslant \frac{\|Af\|_2^2}{\|f\|_2^2} \leqslant 1 + \delta_k, \tag{1}$$

由此 K 个系数可根据 M 个感知测量值准确重构.

依据测量矩阵的限制性条件, 专家学者提出的随机性测量矩阵有随机高斯测量矩阵[2-4,7]、随机贝努力矩阵[2-4]、部分正交矩阵[2]、稀疏随机矩阵[24]. 当前, 随机性测量矩阵的劣势是存在一定的不确定性, 若要消除压缩测量的不确定性, 则必须进行后续处理. 此外, 利用实际硬件生成随机测量矩阵也较为困难. 针对随机测量矩阵的不确定性和不易用硬件实现两大缺点, 学者展开了对确定性测量矩阵的研究. 确定性测量矩阵有利于降低内存、设计快速的恢复算法, 主要分为托普利兹和循环矩[25-29]、轮换矩阵[30-31]、哈达玛矩阵[4]、改进的轮换矩阵的构造[32]等. 目前, 一些学者提出了通过 QR 分解、正交变换改进的随机测量矩阵和改进非线性相关性的确定性测量矩阵的方法. 通常, 压缩测量过程中存在难以在硬件上实现和采样过程中数据多等难题, 测量矩阵的构造还不够完善, 因此, 将压缩传感理论推向实际应用的关键是构造高效且在硬件上易于实现的测量矩阵.

1.3 信号重构

信号重构算法是指运用压缩测量的低维数据精确地重构高维的原始信号或图像, 即利用 M 维测量值重建 $N (M \ll N)$ 维信号的过程. 重构是压缩感知研究中最为重要且关键的部分, 在信号重构方面, 最初研究的是对最小化 l_2 范数约束求解的优化问题, 获取的解通常是不稀疏的, 于是转而对最小化 l_0 范数和 l_1 范数约束求解.

目前, 重构算法主要分为 3 类: 1) 基于 l_1 范数的凸优化算法; 2) 基于 l_0 范数的贪婪算法; 3) 组合算法. 对于大规模的数据问题, 重构速度有时候会很快, 但是原始信号的采样要支持快速分组测试重建. 凸松弛算法有基追踪算法[25]、梯度投影法[30]、凸集交替投影算法[5-6]和内点迭代法[31]等; 贪婪算法有匹配追踪算法[20]、正交匹配追踪算法[33]、分段式正交匹配追踪算法[34]和一些改进算法等; 组合算法有链式追踪算法[35]、HHS(heavy hitter on steroids) 追踪算法[36]和 I-wen 算法[37]等.

凸优化方法是基于 l_1 范数最小进行求解的方法, 相比于其他算法, 重建效果较好. 因其计算量大、时间复杂度高, 在大规模信号处理中不便广泛应用. 然而, 近些年来, 一些凸优化方法在重建稀疏信号方面获得了较快的重构速度, 例如交替方向算法等[38]. 该算法不同于其他算法将凸优化问题视为一般的极小化问题而忽略了其可分离结构, 在求解凸优化问题时将各变量分离求解, 极大地提高了算法的速度.

相对基于 l_1 范数最小的凸优化算法模型而言, 贪婪追踪算法计算速度很快, 但精度稍差, 然而也能满足实际应用的一般要求. 因此, 基于 l_0 范数最小的贪婪追踪算法很实用, 应用广泛. 此类算法针对 l_0 范数最小化问题求解, 但是改进系列算法允许在重建过程中存在一定的误差. 此外, 迭代阈值法也得到了广泛的应用, 此类算法也较易实现, 计算量适中, 在贪婪算法和凸优化算法中都有应用. 但是, 迭代阈值法对于迭代初值和阈值的选取均较为敏感, 且不能保证求出的解是稀疏的.

Gilbert 等[35-36]提出链追踪、HHS 追踪等组合优化算法, 采用结构式采样矩阵线性投影, 利用群测试实现精确重构. 此类算法运算速度高, 但采样测量矩阵复杂, 现实中难以推广应用.

目前, 重构算法可以精确地重构原始信号或图像, 但这些稀疏重构算法都存在一些无法改善的缺点. 此外, 现有的算法对含有噪声信号或采样过程中收入噪声信号的重构效果较差, 鲁棒性也较差, 如何改善有待进一步研究.

2 压缩感知理论的应用

压缩感知理论可以高效地采集稀疏信号的信息, 通过非相关性感知测量值, 此特性使得压缩传感广泛地应用于现实生活中. CS 理论解决了信息采集和处理技术目前遇到的瓶颈, 带来了革命性的突破, 受到各国学者的广泛关注, 从医学成像和信号编码到天文学和地球物理学均有所应用. 其中代表性的有"单像素"压缩数码照相机[9]、MRI RF 脉冲设备[39]、超谱成像仪[40]、DNA 微阵列传感器[41]、MPST (multi-pixel but single time) 相机[42]等. 此外, 压缩感知表现出强大的生命力, 已发展形成了分布式 CS 理论、贝叶斯 CS 理论、无限维 CS 理论等, 并得到广泛应用, 如文献 [43] 利用分布式 CS 理论实现视频的压缩和联合重构; 文献 [44] 利用贝叶斯 CS 理论改善了分布式认知网络中频谱感知的精度.

目前, 压缩感知理论在数据压缩、信道编码、数据获取等方面获得了广泛应用, 然而其自身理论还不够完善, 在应用方面也是新兴学科, 未来的研究中尚有许多难点问题需要解决和突破.

3 结 论

压缩感知理论的应用已经引起众多学者的高度重视, 其采样速率与信号的结构和内容相关, 以低于奈奎斯特采样定理要求的频率采样、编码和重构. 压缩感知理论在压缩成像系统、医学成像、信息转换、雷达成像、天文和通讯等[45]领域均获得了较好的应用. 通过对国内外众多学者文献的梳理和研究, 总结了压缩感知理论进一步的研究方向:

1) 算法层面. 在非正交分解或适合某一类冗余字典中, 探索更有效更快速的稀疏分解算法; 在多信息、多误差、多故障融合的情况下, 研究新的复杂度低、精确率高的重构算法, 并在测量次数、重建误差和重建速度上达到最优的平衡.

2) 理论层面. 在随机测量矩阵方面, 提高列向量之间的非线性相关性和类似噪声的独立随机性, 构造一个平稳观测矩阵寻求占用存储空间小、测量数和信号长度最优的确定性测量矩阵, 并给出相应的理论条件验证方法.

3) 应用层面. 针对现实生活中噪声等实际问题, 探索基于压缩感知的软硬件设计; 结合现有的贝叶斯、分布式等压缩感知理论的优点, 进一步探讨压缩感知与其他领域的融合.

参考文献(References)

[1] Marple S L. Digital spectral analysis with applications[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987: 35-101.

[2] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.

[3] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

[4] Donoho D L, Tsaig Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.

[5] Candès E. Compressive sampling[C]. Proc of the Int Congress of Mathematicians. Madrid, 2006, 3: 1433-1452.

[6] Candès E, Romberg J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2006, 6(2): 227-254.

[7] Candès E, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223.

[8] Waheed Bajwa, Jarvis Haupt, Akbar Sayeed. Compressive wireless sensing[C]. Proc of the 5th Int Conf on Information Processing in Sensor Networks. New York: Nashville, 2006: 134-142.

[9] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83-91.

[10] 国家自然科学基金网络信息系统(ISIS)[EB/OL]. [2012-12-27]. http://isis.nsfc.gov.cn/portal/Proj-List.asp.

[11] 王艳, 练秋生, 李凯. 基于联合正则化及压缩传感的MRI图像重构[J]. 光学技术, 2010, 36(3): 350-355.
(Wang Y, Lian Q S, Li K. Based on joint regularization and compressed sensing MRI image reconstruction[J]. Beijing: Optical Technology, 2010, 36(3): 350-355.)

[12] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究发展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.
(Shi G M, Liu D H, Gao D H. Compressive sensing theory and its research and development[J]. Beijing: Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070-1081.)

[13] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究[J]. 计算机学报, 2011, 34(3) 425-434.
(Dai Q H, Fu C J, Ji X Y. Compressive sensing research[J]. Chinese J of Computers, 2011, 34(3): 425-434.)

[14] 余慧敏, 方广有. 压缩感知理论在探地雷达三维成像中的应用[J]. 电子与信息学报, 2010, 1(32): 12-16.
(Yu H M, Fang G Y. The application of compressive sensing in the ground penetrating radar three dimensional imaging[J]. J of Electronics and Information Technology, 2010, 1(32): 12-16.)

[15] Du Bing, Liu Liang, Zhang Jun. Multisensor information compression and reconstruction[C]. Proc of Society of Photo Optical Instrumentation Engineers, Multisensor, Multisource Information Fusion: Architectures, Algorithms and Applications. Orlando, 2009, 7345: 1-11.

[16] Guo Di, Qu Xiao-bo, Xiao Ming-bo. Comparative analysis on transform and reconstruction of compressed sensing in sensor networks[C]. World Resources Institute International Conf. Kunming, 2009, 1: 441-445.

[17] Starck J L, Elad M, Donoho D. Redundant multiscale transforms and their application for morphological component analysis[J]. Advances in Imaging and Electron Physics, 2004, 132(82): 287-348.

[18] Qu Xiao-bo, Guo Di, Ning Ben-de. Undersampled MRI reconstruction with the patch-based directional wavelets[J]. Magnetic Resonance Imaging, 2012, 30(7): 964-977.

[19] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics J of Scientific Computing, 1999, 20(1): 33-61.

[20] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time frequency dictionaries[J]. IEEE Trans on Signal Process, 1993, 41(12): 3397-3415.

[21] Pati Y, Rezaiifar R, Krishnaprasad P. Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]. IEEE Proc of the 27th Annual Asilomar Conf on Signals, Systems and Computers. Los Alamitos, 1993, 1(11): 40-44.

[22] Candès E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Computers Rendus Mathematique, 2008, 346(9/10): 589-592.

[23] Richard Baraniuk, Mark Davenport, Ronald DeVore, et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices[J]. Constructive Approximation, 2008, 28(3): 253-263.

[24] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于非常稀疏随机投影的图像重构方法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(22): 25-27.
(Fang H, Zhang B Q, Wei S. Image reconstruction methods based on the very sparse random projection[J]. Beijing: Computer Engineering and Applications, 2007, 43(22): 25-27.)

[25] Yin W T, Morgan S P, Yang J F, et al. Practical compressive sensing with toeplitz and circulant matrices[C]. Proc of Visual Communications and Image Processing. Huangshan, 2010, 7744: 1-10.

[26] Bajwa W, Haupt J, Raz G, et al. Toeplitz structured compressed sensing matrices[C]. Proc of the IEEE Workshop on Statistical Signal Processing. Washington, 2007: 294-298.

[27] Sebert F, Zou Y M, Ying L. Toeplitz block matrices in compressed sensing and their Applications in imaging[C]. Proc of Int Conf on Technology and Applications in Biomedicine. Washington, 2008: 47-50.

[28] Holger Rauhut. Circulant and toeplitz matrices in compressed sensing[C]. Proc of Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations. Saint Malo, 2009: 1-6.

[29] Berinde R, Piotr Indyk. Sparse recovery using sparse random matrices[R]. Cambridge: MIT's Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory, 2008.

[30] Lorne Applebaum, Stephen Howard, Stephen Searle, et al. Chirp sensing codes: Deterministic compressed sensing measurements for fast recovery[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(2): 283-290.

[31] Romberg J. Compressive sensing by random convolution[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM) J on Imaging Sciences, 2009, 2(4): 1098-1128.

[32] 付强, 李琼. 压缩感知中构造测量矩阵的研究[J]. 电脑与电信, 2011, 7(1): 39-41.
(Fu Q, Li Q. The research of constructing the measurement matrix in compressive sensing[J]. Computer and Telecommunication, 2011, 7(1): 39-41.)

[33] Trop J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.

[34] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[R]. Standford, 2006.

[35] Gilbert A, Strauss M, Tropp J, et al. Algorithmic linear dimension reduction in the norm for sparse vectors[C]. Proc of the 44th Annual Allerton Conf on Communication. Allerton, 2006: 9.

[36] Gilbert A, Strauss M, Tropp J, et al. One sketch for all: Fast algorithms for compressed sensing[C]. Proc of 39th Association for Computing Machinery(ACM) Symposium: Theory of Computing. San Diego, 2007, 7: 237-246.

(下转第1453页)