

文章编号: 1001-0920(2013)10-1459-06

振荡型 GM(1,1) 幂模型及其应用

王正新

(浙江财经大学 经济与国际贸易学院, 杭州 310018)

摘要: 针对现实世界广泛存在的小样本振荡序列建模和预测问题, 提出含有系统延迟和时变参数的振荡型 GM(1,1) 幂模型. 给出最小二乘准则下的两级参数包计算公式, 在此基础上构建非线性优化模型以寻求最佳幂指数和时间作用参数, 以此识别原始数据所蕴含的振荡特征. 将该模型应用于应急资源需求预测, 并将建模结果与传统 GM(1,1) 幂模型、ARIMA 和 EMD-ARIMA 方法进行比较, 结果表明振荡型 GM(1,1) 幂模型具有较高的精度.

关键词: 灰色系统; 小样本振荡序列; GM(1,1) 幂模型; 预测

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Oscillating GM(1,1) power model and its application

WANG Zheng-xin

(School of Economics and International Trade, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China. E-mail: jenkins226@163.com)

Abstract: In view of the problem of modeling and forecasting for small sample oscillating series, which exists widely in the real world but to be paid less attention by people, this paper proposed oscillating GM(1,1) power model with system latency and time-varying parameters. The two ranks' parameters package formula is presented under the least squares criterion. On this basis, a nonlinear optimization model is employed to seek the best exponent and time interaction parameters, in order to identify the oscillating characteristics behind raw data. Finally, the proposed model is applied to forecast emergency resource demand, and the modeling precisions are compared among the traditional GM(1,1) power model, ARIMA and EMD-ARIMA. The results show that the oscillating GM(1,1) power model has the highest accuracy.

Key words: grey system; oscillating series of the small sample; GM(1,1) power model; forecasting

0 引言

由于现实经济社会系统内外部影响因素的复杂多变性, 人们在进行系统分析和建模时, 能够获得的系统行为数据往往也是杂乱无章的. 统计分析方法以概率分布为出发点, 研究数据的统计规律, 但是其建模过程依赖于大样本的原始数据, 对小样本 (小于 30) 时间序列难以建立可靠的预测模型.

20 世纪 80 年代初, 邓聚龙提出的灰色 GM(1,1) 模型^[1]能够适用于“小样本, 贫信息”系统的建模和预测. 近年来, 该模型已被国内外学者广泛接受, 并应用于解决多个领域的实际预测问题^[2-5]. 同时, 对模型灰导数^[6]、背景值^[7]、初始条件^[8]、参数估计^[9]、组合预测^[10,11]等方面的理论研究也取得了很多有价值的成果, 进一步提高了 GM(1,1) 模型的预测精度. 然而, 这些改进模型的预测响应式依旧是单调的指数函数,

因此, 对于具有非指数律或波动性较强的原始数据, GM(1,1) 模型及其改进方法并不适用. 为此, 邓聚龙曾提出陡变型灰色预测模型^[12]和摆动型灰色预测模型^[13], 以适应传统模型不能有效拟合的非光滑序列. 由于模型中参数取值具有一定的随意性, 人们对这两种新模型的后续研究和应用较为少见.

GM(1,1) 幂模型是近几年发展起来的新型灰色预测模型, 其实质是 GM(1,1) 模型的一种扩展. 该模型的主要特点是模型中的幂指数可以有效体现灰色系统的能量特性并灵活地决定模型的形式, 因此适用范围宽于 GM(1,1) 模型. 文献 [14] 利用信息覆盖的思想给出了幂指数的白化公式, 首次提出了 GM(1,1) 幂模型的求解方法, 并讨论了幂指数的不同取值对于模型解的性质的影响. 文献 [15-16] 将 GM(1,1) 幂模型称为非线性灰色伯努利模型, 并分别应用该模型预测

收稿日期: 2012-06-13; 修回日期: 2012-08-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71101132).

作者简介: 王正新(1981-), 男, 副教授, 博士, 从事小样本时间序列分析、预测与决策方法的研究.

台湾的失业率和台币汇率. 文献 [17-18] 分别采用粒子群优化算法和遗传算法对模型中的幂指数进行优化, 取得了较好的预测效果. 文献 [19] 建立非线性优化模型对背景值和幂指数同时优化, 进一步增强了模型的预测能力, 并将优化模型应用于我国 31 个行政区工业废水排放达标率的预测和预警. 文献 [20] 应用 GM(1,1) 幂模型预测中国 CO₂ 排放量、能源消耗和经济增长, 结果表明其预测精度高于统计预测方法. 从误差分析角度来看, 上述 GM(1,1) 幂模型及其优化模型仍然含有来自模型内部的偏差. 文献 [21] 基于误差来源分析提出了无偏 GM(1,1) 幂模型, 并证明了无偏模型对传统模型及其本身的时间响应函数所表达的曲线进行模拟和预测具有完全重合性. 文献 [22] 试图应用优化幂指数的 GM(1,1) 幂模型预测振荡序列, 尽管该模型比传统模型具有更好的灵活性和适应非指数律原始序列的能力, 但它对波动性较强的振荡序列建模预测时, 难以取得理想的结果.

小样本振荡序列预测问题是现实世界广泛存在而现有理论和方法尚未妥善解决的一类复杂问题, 如应急资源需求预测、新产品销售预测等. 文献 [23] 采用 EMD-ARIMA 方法对我国某一次灾害应急资源的需求进行预测, 尽管该方法的建模精度显著高于传统 ARIMA 方法, 但由于可获得的样本量过少, 导致预测平均相对误差仍高达 9.1%. 在这种情况下, 采用灰色预测方法或许是更加明智的选择, 但是现有灰色预测方法也不适用于振荡序列的预测. 本文试图进一步拓展灰色预测方法的应用范围, 建立振荡型 GM(1,1) 幂模型, 并通过实例验证模型的有效性和实用性.

1 振荡型 GM(1,1) 幂模型和求解

1.1 传统 GM(1,1) 幂模型和缺陷分析

设非负原始序列为 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 对原始序列 $X^{(0)}$ 作一阶累加生成

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\},$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$. $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)\}$ 为序列 $X^{(1)}$ 邻均值生成序列, 其中 $z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$, $k = 2, 3, \dots, n$.

定义 1^[14] 称灰色微分方程

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^\gamma, \quad \gamma \neq 1 \quad (1)$$

为 GM(1,1) 幂模型. 其中: $x^{(0)}(k)$, $x^{(1)}(k)$ 和 $z^{(1)}(k)$ 如前文所述, $x^{(0)}(k)$ 为灰导数, $z^{(1)}(k)$ 为灰导数的背景值, b 为灰色作用量.

灰导数 $x^{(0)}(k)$ 推导过程如下: $x^{(1)}(k)$ 的导数为

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^{(1)}(t) - x^{(1)}(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

对于离散的时间序列, 有 $\Delta t \Rightarrow 1$, 则有

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \Rightarrow 1} x^{(1)}(t) - x^{(1)}(t-1) = x^{(0)}(t).$$

根据式 (1) 对参数列 $(a, b)^T$ 作最小二乘估计

$$(a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (2)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^\gamma \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^\gamma \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^\gamma \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}.$$

式 (1) 所描述的系统变量之间的关系均处于相同的时刻 k , 因此, 在利用式 (2) 估计出结构参数后还不能直接对 $x^{(0)}(k)$ 在时刻 $k = n+1, n+2, \dots$ 进行外推预测, 必须采用类似于传统 GM(1,1) 模型的白化预测方法, 即借助与式 (1) 对应的白化微分方程的解来预测样本以外的数据.

定义 2^[14] 称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^\gamma \quad (3)$$

为 GM(1,1) 幂模型白化微分方程, 其中参数 a 和 b 如前文所述.

解以上微分方程, 可得到白化时间响应式

$$x^{(1)}(k+1) = \left\{ \frac{b}{a} + \left[(x^{(0)}(1))^{1-\gamma} - \frac{b}{a} \right] e^{-(1-\gamma)ak} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad (4)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n-1$.

对 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 作一阶累减还原, 有

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k). \quad (5)$$

与传统灰色模型相比, GM(1,1) 幂模型在形式上具有更好的灵活性, 不同的幂指数 γ 可以帮助该模型适应一类近似幂指数律的非线性时间序列. 但现实中一般为小样本振荡序列, 本文通过理论分析和大量实验模拟验证了 GM(1,1) 幂模型仅适用于单峰变化或增长受阻的时间序列, 而对于更具一般性的小样本振荡序列并不适用.

1.2 振荡型 GM(1,1) 幂模型和参数包

定义 3 设 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $Z^{(1)}$ 分别为原始序列、一阶累加生成序列和背景值序列, 称灰色微分方程

$$x^{(0)}(k) + a \tan p(k-\tau) z^{(1)}(k-\tau) = b \sin p(k-\tau) (z^{(1)}(k-\tau))^\gamma \quad (6)$$

为振荡型 GM(1,1) 幂模型. 其中: $-a \tan p(k-\tau)$ 为发展系数, $b \sin p(k-\tau)$ 为灰色作用量, τ 为系统延迟时间, p 为时间作用参数, γ 为幂指数且 $\gamma \neq 1$.

因为 τ 表示的是非负时滞变量, 模型中考虑的是系统变量生成的背景值及其幂函数在 k 之前的 τ 时

刻对被预测变量 $x^{(0)}(k)$ 的影响, 所以, k 和 τ 是相减的关系. 本文选取 $\sin p(k - \tau)$ 和 $\tan p(k - \tau)$ 分别作为灰色作用量和发展系数的一部分, 是考虑到系统行为序列 X 以外的可控和不可控因素对 X 时滞振荡性的影响.

与传统 GM(1,1) 幂模型相比, 振荡型 GM(1,1) 幂模型增加了系统延迟参数 τ 、时变参数 $\tan p(k - \tau)$ 和 $\sin p(k - \tau)$. 振荡型 GM(1,1) 幂模型含有系统延迟参数, 且其发展系数和灰作用量均随时间推移而变化, 因此对于小样本波动型时间序列序列的适应能力应强于传统 GM(1,1) 幂模型.

由于系统延迟变量 τ 的存在, 振荡型 GM(1,1) 幂模型无需借助近似的白化微分方程便可直接用于预测. 具体原因如下: 对于给定的原始序列 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 可以用如下离散时间响应式对未来时刻 $k = n + 1, n + 2, \dots, n + \tau$ 的系统行为进行预测:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = b \sin p(k - \tau)(0.5x^{(1)}(k - \tau) + 0.5x^{(1)}(k - \tau - 1))^\gamma - a \tan p(k - \tau)(0.5x^{(1)}(k - \tau) + 0.5x^{(1)}(k - \tau - 1)). \quad (7)$$

下一步预测 $\hat{x}^{(0)}(k)$, 式 (7) 的右边所有变量均为已知变量, 可以直接用于实际预测, 这种方式可以避免传统灰色建模方法由差分方程向微分方程跳跃所导致的误差.

定义 4 对于振荡型 GM(1,1) 幂模型, 称:

1) $P_I = (a, b)^T$ 为振荡型 GM(1,1) 幂模型的一级参数包;

2) P_I 的构成成分为振荡型 GM(1,1) 幂模型的中间参数, 中间参数的全体为二级参数包, 记为 P_{II} .

定理 1 设 $X^{(0)}, X^{(1)}, Z^{(1)}$ 分别为原始序列、一阶累加生成序列和背景值序列, 系统延迟时间 τ , 时间作用参数 p 和幂指数 γ 均已给定, 则振荡型 GM(1,1) 幂模型一级参数包 P_I 在最小二乘准则下满足

$$P_I = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y. \quad (8)$$

其中

$$Y = [x^{(0)}(\tau + 2) \ x^{(0)}(\tau + 3) \ \dots \ x^{(0)}(n)]^T,$$

$B =$

$$\begin{bmatrix} -\tan 2pz^{(1)}(2) & \sin 2p(z^{(1)}(2))^\gamma \\ -\tan 3pz^{(1)}(3) & \sin 3p(z^{(1)}(3))^\gamma \\ \vdots & \vdots \\ -\tan p(n-\tau)z^{(1)}(n-\tau) & \sin p(n-\tau)(z^{(1)}(n-\tau))^\gamma \end{bmatrix}.$$

证明 将原始数据代入振荡型 GM(1,1) 幂模型的灰色微分方程, 得到

$$\begin{aligned} x^{(0)}(\tau + 2) + a \tan 2pz^{(1)}(2) &= b \sin 2p(z^{(1)}(2))^\gamma, \\ x^{(0)}(\tau + 3) + a \tan 3pz^{(1)}(3) &= b \sin 2p(z^{(1)}(3))^\gamma, \\ &\vdots \\ x^{(0)}(n) + a \tan p(n - \tau)z^{(1)}(n - \tau) &= \\ b \sin p(n - \tau)(z^{(1)}(n - \tau))^\gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

方程组 (9) 可改写为矩阵方程 $Y = B P_I$, 其中 B 为 $(n - \tau - 1) \times 2$ 矩阵. 由于 $n - \tau \leq 4$, 且 B 为列满秩, 在最小二乘准则下式 (8) 成立. \square

定理 2 令 C, F, G 为振荡型 GM(1,1) 幂模型的二级参数, 有

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=\tau+2}^n \sin p(k - \tau) \tan p(k - \tau) (z^{(1)}(k - \tau))^{\gamma+1}, \\ F &= \sum_{k=\tau+1}^n [\tan p(k - \tau) z^{(1)}(k - \tau)]^2, \\ G &= \sum_{k=\tau+2}^n [\sin p(k - \tau) (z^{(1)}(k - \tau))^\gamma]^2, \end{aligned}$$

$$\text{则 } (B^T B)^{-1} = \frac{1}{FG - C^2} \begin{bmatrix} G & C \\ C & F \end{bmatrix}.$$

证明 存在

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \sum_{k=\tau+2}^n (\tan p(k - \tau) z^{(1)}(k - \tau))^2 \\ - \sum_{k=\tau+2}^n \sin p(k - \tau) \tan p(k - \tau) (z^{(1)}(k - \tau))^{\gamma+1} \\ - \sum_{k=\tau+2}^n \sin p(k - \tau) \tan p(k - \tau) (z^{(1)}(k - \tau))^\gamma \\ \sum_{k=\tau+2}^n [\sin p(k - \tau) (z^{(1)}(k - \tau))^\gamma]^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \\ \leftarrow \\ \end{matrix} = \\ &\begin{bmatrix} F & -C \\ -C & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{FG - C^2} \begin{bmatrix} G & C \\ C & F \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

定理 3 令 D, E 为振荡型 GM(1,1) 幂模型的二级参数, 有

$$D = \sum_{k=\tau+2}^n \sin p(k - \tau) x^{(0)}(k) (z^{(1)}(k - \tau))^\gamma,$$

$$E = \sum_{k=\tau+2}^n \tan p(k - \tau) x^{(0)}(k) z^{(1)}(k - \tau),$$

$$\text{则 } B^T Y = [-E \ D]^T.$$

证明 存在

$$B^T Y = \begin{bmatrix} - \sum_{k=\tau+2}^n \tan p(k - \tau) x^{(0)}(k) z^{(1)}(k - \tau) \\ \sum_{k=\tau+2}^n \sin p(k - \tau) x^{(0)}(k) (z^{(1)}(k - \tau))^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ D \end{bmatrix}. \quad \square$$

将定理 2 和定理 3 的结论代入式 (8), 可得到以下

推论.

推论 1 令中间参数 C, D, E, F, G 如定理 2 和定理 3 所述, 则振荡型 GM(1,1) 模型的二级参数为

$$a = \frac{CD - EG}{GF - C^2}, b = \frac{FD - CE}{GF - C^2}.$$

若系统延迟时间 τ , 时间作用参数 p , 幂指数 γ 均已给定, 则通过推论 1 计算出 a 和 b 后可直接运用式 (7) 进行预测. 在实际应用中, 这 3 个参数都需要根据实际问题一一确定后才能确定预测模型, 其中系统延迟时间 τ 可以分别取 $\tau = 1, 2, \dots$ 并代入模型, 比较建模精度, 取精度较高者. 下面重点讨论给定延迟时间 τ 的情形下 p 和 γ 的求解问题.

1.3 振荡型 GM(1,1) 模型的参数求解

模型参数的确定可以转化为以误差最小化为目标的非线性优化模型求解问题. 由于中间参数 C, D, E, F, G 由原始数据和未知参数 p, γ 构成, 推论 1 所描述的结构参数 a 和 b 与中间参数的关系实质上就是它们与未知参数 p 和 γ 的关系. 以平均相对误差 (MAPE) 最小化为优化目标, 参数之间的关系为约束条件, p 和 γ 为待求变量, 建立以下优化模型:

$$\min_{\gamma, p} \text{MAPE} = \frac{1}{n - \tau - 1} \sum_{k=2+\tau}^n \frac{|\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)};$$

s.t. $\gamma \neq 1$,

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k) = & b \sin p(k - \tau)(0.5x^{(1)}(k - \tau) + \\ & 0.5x^{(1)}(k - \tau - 1))^\gamma - a \tan p(k - \tau) \times \\ & (0.5x^{(1)}(k - \tau) + 0.5x^{(1)}(k - \tau - 1)), \end{aligned}$$

$$a = \frac{CD - GE}{GF - C^2}, b = \frac{DF - CE}{GF - C^2},$$

$$k = 2 + \tau, 3 + \tau, \dots, n.$$

上述非线性优化模型可以借助相应的运筹学软件或一些智能算法(如遗传算法、粒子群算法等)求解, 此处不再论述. 由此得到最优参数 p^* 和 γ^* , 代入推论 1 中的二级参数表达式便可求得结构参数 a^* 和 b^* , 基于这些参数所构建的振荡型 GM(1,1) 模型

$$\hat{x}^{(0)}(k) =$$

$$b^* \sin p^*(k - \tau)(0.5x^{(1)}(k - \tau) + 0.5x^{(1)}(k - \tau - 1))^{\gamma^*} - a^* \tan p^*(k - \tau)(0.5x^{(1)}(k - \tau) + 0.5x^{(1)}(k - \tau - 1))$$

可以使得平均相对误差在理论上达到最小, 从而有效地表征原始数据中蕴含的振荡信息.

2 应用实例

我国是自然灾害多发的国家, 地震、泥石流、暴

雪、干旱等自然灾害已成为威胁社会经济发展、人民生命财产安全的重要因素. 一旦发生自然灾害, 有限的应急物资、实时有效的配置和调度是应急救援工作的重要内容之一, 而对应急物资的需求数量和结构实时而准确地预测又是灾害应急物资快速调度的前提和依据. 现有的灾害物资需求预测以专家经验判断为主, 定量预测的主要困难在于灾害的突发性和不确定性导致物资需求信息难以快速、准确地获取. 在灾害发生后较短的时间内往往只能收集到少量的应急物资需求数据, 且随着时间的推移数据呈现不规律的非线性波动. 在这种情形下, 依靠经典的理论和方法难以给出令人满意的预测方案. 下面应用本文提出的振荡型 GM(1,1) 模型对灾害应急物资的需求进行预测, 以验证该模型对振荡型小样本时间序列建模的适应性和有效性.

2008 年 1 月, 我国南方地区发生了大范围低温、暴雪、冰冻等自然灾害. 这场雪灾造成停水停电、旅客滞留车站和机场、农副产品运输受阻, 甚至证券指数也出现下跌现象, 可以说, 这场灾害已触及到整个国民经济. 文献 [23] 采用 ARIMA 和 EMD-ARIMA 方法研究了 2008 年 1 月雪灾发生后安徽省某大型农产品批发市场卷心菜日需求量的建模拟合问题, 原始数据呈现出一定程度的不规则波动, 见表 1. 下面基于文献 [23] 提供的 2008 年 1 月 21 日~1 月 29 日卷心菜日需求量数据建立振荡型 GM(1,1) 模型, 分析比较传统 GM(1,1) 模型、不同系统延迟参数下的振荡型 GM(1,1) 模型、ARIMA 和 EMD-ARIMA 方法的建模精度, 并取精度较高的模型对 1 月 30 日的需求量进行预测. 将表 1 中 1 月 21 日~1 月 29 日卷心菜日需求量记为原始数据序列 $X^{(0)}$.

1) 传统 GM(1,1) 模型. 根据文献 [21] 中的优化方法, 得到参数

$$a^* = -3.823\ 772, b^* = -1.720\ 247, \gamma^* = 1.052\ 008.$$

对应的时间响应式为

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k) = & (-3\ 056\ 611 + 3\ 811\ 057.7e^{0.218\ 925(k-1)})^{0.875\ 343}, \\ \hat{x}^{(0)}(k) = & \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), k = 2, 3, \dots, 9. \end{aligned}$$

该模型的平均相对误差为 9.89%, 各时点的模拟情况如图 1 所示.

2) 振荡型 GM(1,1) 模型. 取系统延迟 $\tau = 1$, 利用参数优化模型解得

表 1 2008 年雪灾期间某农产品批发市场卷心菜日需求量

日期	1-21	1-22	1-23	1-24	1-25	1-26	1-27	1-28	1-29
需求量	139 618.5	142 804.2	130 070.9	157 811.5	260 115.4	351 227.5	302 161.2	373 370.48	296 045.4

kg

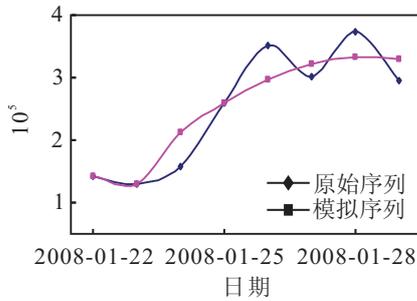


图 1 传统 GM(1,1) 幂模型预测结果

$$p^* = 0.203\ 929, \gamma^* = 0.045\ 672,$$

$$a^* = -0.002\ 247, b^* = 187\ 034.$$

对应的时间响应式为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 187\ 034 \sin 0.203\ 929(k-1)(0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k-2))^{0.045\ 672} + 0.002\ 247 \sin 0.203\ 929(k-1)(0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k-2)), k = 3, 4, \dots, 9.$$

该模型的平均相对误差为 7.70%, 各时点的模拟情况如图 2 所示.

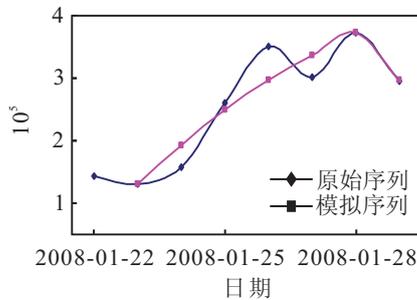


图 2 振荡型 GM(1,1) 幂模型 (tau = 1) 预测结果

3) 振荡型 GM(1,1) 幂模型. 取系统延迟 $\tau = 2$, 利用参数优化模型解得

$$p^* = 0.158\ 612, \gamma^* = 0.136\ 337,$$

$$a^* = 0.120\ 200, b^* = 100\ 118.$$

对应的时间响应式为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 100\ 118 \sin 0.158\ 612(k-2)(0.5x^{(1)}(k-2) + 0.5x^{(1)}(k-3))^{0.136\ 337} - 0.120\ 200 \tan 0.158\ 612(k-2)(0.5x^{(1)}(k-2) + 0.5x^{(1)}(k-3)), k = 4, 5, \dots, 9.$$

该模型的平均相对误差为 7.10%, 各时点的模拟情况如图 3 所示.

4) 振荡型 GM(1,1) 幂模型. 取系统延迟 $\tau = 3$, 利用参数优化模型解得

$$p^* = 0.390\ 803, \gamma^* = 0.067\ 373,$$

$$a^* = 0.001\ 376, b^* = 161\ 844.$$

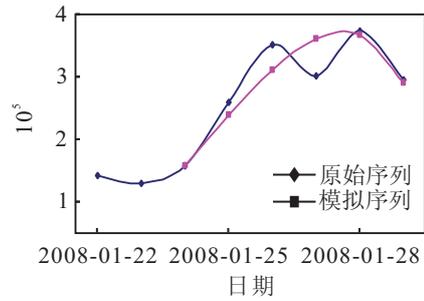


图 3 振荡型 GM(1,1) 幂模型 (tau = 2) 预测结果

对应的的时间响应式为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 161\ 844 \sin 0.390\ 803(k-3)(0.5x^{(1)}(k-3) + 0.5x^{(1)}(k-4))^{0.067\ 373} - 0.001\ 376 \tan 0.390\ 803(k-3)(0.5x^{(1)}(k-3) + 0.5x^{(1)}(k-4)), k = 5, 6, \dots, 9.$$

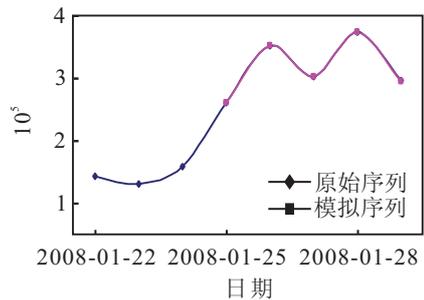


图 4 振荡型 GM(1,1) 幂模型 (tau = 3) 预测结果

从建模结果来看, 传统幂模型和取不同系统延迟 ($\tau = 1, 2, 3$) 的振荡型幂模型的平均模拟误差分别为 9.89%, 7.70%, 7.10% 和 0.10%. 总体而言, 本文提出的振荡型 GM(1,1) 幂模型的误差显著小于传统模型, 其中系统延迟参数 $\tau = 3$ 时建立的振荡型 GM(1,1) 幂模型误差最小. 由图 4 可见, 取 $\tau = 3$ 时振荡幂模型几乎可以完全拟合原始序列, 原因主要在于发展系数 $-a \tan p(k-\tau)$ 和灰色作用量 $b \sin p(k-\tau)$ 均随时间推移而变化, 因此对于小样本振荡时间序列序列具有更强的适应性. 进一步令 $k = 10$, 并代入振荡型 GM(1,1) 幂模型 ($\tau = 3$), 得到 2008 年 12 月 30 日的的需求量预测值为 166 077.27 kg, 与该日的实际需求 178 621 kg 较为接近, 预测精度为 93%.

文献 [23] 应用 ARIMA 和 EMD-ARIMA 方法的模拟误差分别为 19.7% 和 9.1%, 两者均大于上述几个灰色模型, 其原因主要在于 ARIMA 和 EMD-ARIMA 方法适用于拥有大样本数据情形下的分析和预测, 而对于小样本 (样本量小于 30) 的原始数据序列往往不能取得理想的建模效果.

3 结 论

鉴于传统灰色预测方法依赖于原始序列光滑平稳的前提, 本文提出的振荡型 GM(1,1) 幂模型突破了

这一限制, 无需借助近似的白化微分方程可直接用于预测, 避免了传统建模方法由差分方程向微分方程跳跃导致的误差. 其发展系数和灰色作用量均随时间的变化而变化, 同时考虑了系统延迟对预测结果的影响, 为小样本非线性波动时间序列预测问题提供了建模基础.

模型中的系统延迟参数、时间作用参数和幂指数取值的多样性赋予了振荡型 GM(1,1) 幂模型形式的灵活性. 借助参数优化算法, 振荡型 GM(1,1) 幂模型可以准确识别原始数据所蕴含的参数动态性. 应用实例表明, 建模和预测效果显著优于传统 GM(1,1) 幂模型、ARIMA 和 EMD-ARIMA 方法.

振荡型 GM(1,1) 幂模型仍然是一种单变量预测模型, 忽略了系统内外部相关变量对行为序列的影响, 对提高预测精度不利. 将影响系统建模精度的其他关键变量引入模型, 可以进一步提高振荡型灰色幂模型的精度, 但也为模型的参数估计造成困难, 这是下一步的研究方向.

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 77-89.
(Deng J L. The elements on grey theory[M]. Wuhan: HUST Press, 2002: 77-89.)
- [2] Lee S C, Shih L H. Forecasting of electricity costs based on an enhanced gray-based learning model: A case study of renewable energy in Taiwan[J]. Technological Forecasting & Social Change, 2011, 78(7): 1242-1253.
- [3] Li D C, Yeh C W, Chang C J. An improved grey-based approach for early manufacturing data forecasting[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 57(4): 1161-1167.
- [4] Pai T Y, Ho C L, Chen S W, et al. Using seven types of GM(1,1) model to forecast hourly particulate matter concentration in Banciao city of Taiwan[J]. Water Air Soil Pollut, 2011, 217(6): 25-33.
- [5] 王晓墩, 熊伟. 基于改进灰色预测模型的动态顾客需求分析[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(8): 1380-1388.
(Wang X D, Xiong W. Dynamic customer demand analysis based on the improved grey prediction model[J]. System Engineering Theory & Practice, 2010, 30(8): 1380-1388.)
- [6] Wang Y N, Chen Z J, Gao Z Q, et al. A generalization of the GM(1,1) direct modeling method with a step by step optimizing grey derivative's whiten values and its applications[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 382-389.
- [7] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 61-67.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. System Engineering Theory & Practice, 2008, 28(2): 61-67.)
- [8] Dang Y G, Liu S F. The GM models that $x(n)$ be taken as initial value[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 247-255.
- [9] 张岐山. 提高灰色 GM(1,1) 模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学, 2007, 15(5): 126-129.
(Zhang Q S. Improving the precision of GM(1,1) model by using particle swarm optimization[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(5): 126-129.)
- [10] 曾波, 刘思峰, 方志耕, 等. 灰色组合预测模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 150-155.
(Zeng B, Liu S F, Fang Z G, et al. Grey combined forecasting model and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 150-155.)
- [11] Erdal K, Baris U, Okyay K. Grey system theory-based models in time series prediction[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(2): 1784-1789.
- [12] Deng J L. A novel grey model GM(1,1- τ , r) [J]. The J of Grey System, 2001, 13(1): 18.
- [13] Deng J L. Undulating grey model (UGM) GM(1, 1| $\tan(k-\tau)p, \sin(k-\tau)p$) [J]. The J of Grey System, 2001, 13(3): 201-205.
- [14] 王正新, 党耀国, 刘思峰. GM(1,1) 幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2380-2383.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Solution of GM(1,1) power model and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2380-2383.)
- [15] Chen C I. Application of the novel nonlinear grey Bernoulli model for forecasting unemployment rate[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37(12): 278-287.
- [16] Chen C I, Chen H L, Chen S P. Forecasting of foreign exchange rates of Taiwan's major trading partners by novel nonlinear grey Bernoulli model NGBM(1,1) [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(6): 1194-1204.
- [17] Zhou J Z, Fang R C, Li Y H, et al. Parameter optimization of nonlinear grey Bernoulli model using particle swarm optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 207(2): 292-299.
- [18] Hsu L C. A genetic algorithm based nonlinear grey Bernoulli model for output forecasting in integrated circuit industry[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(6): 4318-4323.
- [19] Wang Z X, Hipel K W, Wang Q, et al. An optimized NGBM(1,1) model for forecasting the qualified discharge rate of industrial wastewater in China[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(12): 5524-5532.