

文章编号: 1001-0920(2013)10-1559-05

一种新型分层模糊系统及其逼近性能

朱晓东, 王杰

(郑州大学 电气工程学院, 郑州 450001)

摘要: 针对分层模糊系统, 提出一种新的结构形式, 该分层模糊系统将各层中间变量作为后一层模糊单元输出结果中的一部分, 而不再是输入项, 这样不仅能够减少规则数目和辨识参数, 而且避免了对不具物理含义的中间变量的模糊处理. 给出新型分层模糊系统的解析表达式, 证明了该分层模糊系统具有通用逼近性能, 并给出存在性定理和逼近性能的充分条件. 通过实例仿真表明所提出分层模糊系统具有较好的应用基础.

关键词: 分层模糊系统; 逼近性能; 充分条件

中图分类号: TP273

文献标志码: A

A new type of hierarchical fuzzy system and its approximation performance

ZHU Xiao-gong, WANG Jie

(School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China. Correspondent: ZHU Xiao-Dong, E-mail: zhu_xd@zzu.edu.cn)

Abstract: A new type of hierarchical fuzzy system(HFS) is presented in this paper. Outputs in the previous layer which is called intermediate variables are not used in the IF-parts, but used only in the output of the following fuzzy unit in this hierarchical fuzzy system, which can reduce the number of fuzzy rules and the parameters to be identified, and the intermediate variables with little physical meaning can avoid to be fuzzified. Analytic expression of the system is given, and the approximation ability and its sufficient condition are proved. The simulation results show that the proposed HFS has a broad prospect of application.

Key words: hierarchical fuzzy systems; approximation; sufficient condition

0 引言

模糊系统逼近性能作为其应用的理论基础已得到了很多研究^[1-2]. 传统模糊系统在实际应用中会遇到维数灾问题, 即规则维数、参数维数会随着输入变量的增加呈指数级增加, 从而限制了传统模糊系统的应用^[3]. 为了克服传统模糊系统在高维输入空间建模所遇到的困难, Raju等^[4]提出了分层模糊系统(HFS)的概念, 通过低维模糊单元的分层连接来构成整个系统. 分层模糊系统得到了研究人员的广泛重视, 并在控制、模式识别、语言建模等方面进行了研究^[5-6].

分层模糊系统作为解决高维模糊系统维数灾的一种有效手段, 同样具有逼近性能, 王立新等^[7-11]分别从不同角度进行了探讨, 给出了不同种类分层模糊系统具有任意逼近性能的结论. 然而, 分层模糊系统

在解决规则维数灾的同时, 也带来了其他问题, 一是系统结构复杂, 辨识参数较多; 二是层次之间中间变量没有明确的物理含义, 无法进行合理的模糊化设计和解释^[12]. 对此, Joo等^[13]提出了一种新的解决思路, 将分层模糊系统中前一层的输出直接作为后一层规则的后件参数, 但Joo所采用的层次结构过于复杂, 引入了大量待辨识的参数, 增加了计算工作量.

本文在已有文献的基础上, 提出一种新型分层模糊系统结构形式——后件直联型分层模糊系统(CCHFS). 该系统能够避免中间变量所带来的问题, 又不会增加后件的辨识参数. 证明了该新型分层模糊系统的逼近性能, 并给出了逼近性能的充分条件.

1 后件直联型分层模糊系统结构

目前, 常用的分层模糊系统结构主要有“优先级”

收稿日期: 2012-10-21; 修回日期: 2013-03-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60905039).

作者简介: 朱晓东(1970—), 男, 副教授, 博士生, 从事智能控制、数据挖掘的研究; 王杰(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能计算、智能控制信息等研究.

型、“增一”型、“二叉树”型、“FNN”(模糊神经网络)和“Kolmogrov”型等结构类型^[14-15]. 简单清晰的结构能够降低计算复杂性,也能够提升系统的可解释性. 图1所示的增一型结构具有结构简洁、规则数目和辨识参数较少的特点,并已证明具有通用逼近性能^[7],但是系统层次之间的中间变量没有明确的物理含义,需要人为地进行模糊处理.

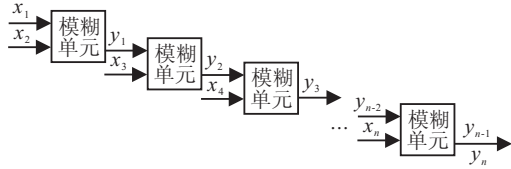


图1 增一型分层模糊系统结构

本文在文献 [13] 的基础上,提出一种新的分层模糊系统结构——后件直联型分层模糊系统,其结构如图2所示. 由于MIMO系统可以看作是多个MISO系统的组合,本文仅就MISO系统进行分析. 整个系统由两输入一输出模糊单元串接而成,图2中, F_1, F_2, \dots, F_L 为分层模糊系统的每一层. 除第1层模糊单元有2个输入变量外,其他各层均有3个输入变量,其中2个是实际的输入变量,参与该层模糊单元的模糊推理,另1个输入量是前1层的输出即中间变量. 该中间变量既不出现在模糊规则前件中,也不作为规则后件的一部分,而是直接作用于模糊单元的输出结果中,作为输出调节项的一部分,将这种结构形式称为后件直联型分层模糊系统(CCHFS).

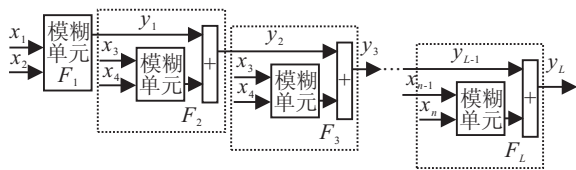


图2 后件直联型分层模糊系统结构

CCHFS的每一层模糊单元均采用TS模糊模型,当模糊系统采用单点模糊化、乘积推理、加权平均解模糊方法时,对于输入 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,可以得到模糊系统的表达式为

$$y = f(x) = \frac{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \in I} \left(\prod_{j=1}^n A_j^{i_j}(x_j) \right) y_{i_1, i_2, \dots, i_n}}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \in I} \left(\prod_{j=1}^n A_j^{i_j}(x_j) \right)}$$

$$y_{i_1, i_2, \dots, i_n} = a_0^{i_1, i_2, \dots, i_n} + a_1^{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1 + \dots + a_k^{i_1, i_2, \dots, i_n} x_k + \dots + a_n^{i_1, i_2, \dots, i_n} x_n. \quad (1)$$

其中: $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n | i_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2, \dots, n\}$, n 为变量个数, N_j 为第 j 个变量的模糊集个数; $A_j^{i_j}$ 为第 j 个变量第 i_j 个模糊集的隶属度; $a_k^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ 为规则后件多项式中的系数, $k=0, 1, \dots, n$.

对于如图2所示的CCHFS,第1层模糊单元的规则为

$$\text{if } x_{11} \text{ is } A_{11}^{i_1} \text{ and } x_{12} \text{ is } A_{12}^{i_2},$$

$$\text{then } y_1^{i_1 i_2} = a_{10}^{i_1 i_2} + a_{11}^{i_1 i_2} x_{11} + a_{12}^{i_1 i_2} x_{12}. \quad (2)$$

其中: 变量 A 下标中第1位数字代表层数,第2位数字代表变量序号,上标代表模糊集序号,其他上下标含义类似. 第1层模糊单元的输出为

$$y_1 = \frac{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{1j}^{i_j}(x_{1j}) \right) y_1^{i_1 i_2}}{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{1j}^{i_j}(x_{1j}) \right)} = b_1^0 + b_1^1 x_{11} + b_1^2 x_{12}. \quad (3)$$

其中

$$\mu(x_{11}, x_{12}) = \prod_{j=1}^2 A_{1j}^{i_j}(x_{1j}),$$

$$I = \{i_1 i_2 | i_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2\},$$

$$b_k^m = \sum_{i_1 i_2 \in I} \mu(x_{k1}, x_{k2}) a_{km}^{i_1 i_2} / \sum_{i_1 i_2 \in I} \mu(x_{k1}, x_{k2}),$$

k 为层数序号, $m = 0, 1, 2$. 第 $k(k = 2, 3, \dots, L)$ 层模糊单元的规则为

$$\text{if } x_{k1} \text{ is } A_{k1}^{i_1} \text{ and } x_{k2} \text{ is } A_{k2}^{i_2},$$

$$\text{then } y_k^{i_1 i_2} = a_{k0}^{i_1 i_2} + a_{k1}^{i_1 i_2} x_{k1} + a_{k2}^{i_1 i_2} x_{k2}. \quad (4)$$

第 k 层模糊单元的输出为

$$y_k = f(x) = \frac{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{kj}^{i_j}(x_{kj}) \right) y_k^{i_1 i_2}}{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{kj}^{i_j}(x_{kj}) \right)} + b_k^3 y_{k-1} = b_k^0 + b_k^1 x_{k1} + b_k^2 x_{k2} + b_k^3 y_{k-1}. \quad (5)$$

其中: y_{k-1} 为前1层模糊单元输出, b_k^3 为相应系数. 将式(5)展开,有

$$y = y_L = \sum_{k=1}^L b_k^0 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 + \sum_{k=1}^L b_k^1 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 x_{k1} + \sum_{k=1}^L b_k^2 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 x_{k2},$$

$$b_i^3 = \{1 | i > L\}. \quad (6)$$

这种新的分层模糊系统结构将中间变量作为模糊单元输出的一个调整项,不但避免了模糊推理过程中对中间变量的处理,而且能够大量减少规则数目和辨识参数.

定理1 若采用如上定义的后件直联型分层模糊系统结构, n 为变量数目, m 为每个变量的模糊集数目, L 为分层数,则这种分层模糊系统具有最少的规则数目. 当每一层输入变量个数 $c = 2$ 时,模糊

规则数 $M = nm^2/2$. 当输入变量 n 为奇数时, 有一层模糊单元只有一个输入变量, 此时规则数为 $(n - 1)m^2/2 + m$.

定理 1 表明, 当模糊子集个数一定时, CCHFS 的规则数目仅是输入变量个数的线性比例关系. 由式 (4) 和 (5) 可知, CCHFS 总的后件需辨识参数为 $3M + L - 1$ 个. 作为对比, 增一型分层模糊系统规则数为 $(n - 1) \times m^2$, 每一规则有 3 个辨识参数. 因此, CCHFS 的规则数目远低于传统模糊系统的规则数目, 而且, 由于对中间变量的处理使得辨识参数也少于增一型分层模糊系统.

2 逼近性能

若模糊子集为定义在论域区间 U 上的等度划分, 则采用单点模糊化、乘积推理、加权平均解模糊方法, 可得到如式 (5) 所示的后件直联型分层模糊系统.

定理 2 (逼近性存在性定理) 若给定函数 g 在区间 U 上可微, 常数 $\varepsilon > 0$, 则存在如式 (5) 所示的 CCHFS $y = f(x)$, 使得 $\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

证明 由式 (4)~(6) 可知, 分层模糊系统的输出为

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) = \\
 y_L &= b_L^0 + b_L^1 x_{L1} + b_L^2 x_{L2} + b_L^3 y_{L-1} = \\
 &\sum_{k=1}^L b_k^0 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 + \sum_{k=1}^L b_k^1 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 x_{k1} + \sum_{k=1}^L b_k^2 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 x_{k2} = \\
 &\sum_{k=1}^L b_k^0 \prod_{i=k+1}^L b_i^3 + \prod_{i=2}^L b_i^3 b_1^1 x_{11} + \prod_{i=2}^L b_i^3 b_1^2 x_{12} + \dots + \\
 &\prod_{i=3}^L b_i^3 b_2^1 x_{21} + \prod_{i=3}^L b_i^3 b_2^2 x_{22} + \dots + b_L^1 x_{L1} + b_L^2 x_{L2} \triangleq \\
 &B_0 + B_{11}x_{11} + B_{12}x_{12} + \dots + B_{L1}x_{L1} + B_{L2}x_{L2}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |g(x) - f(x)| &= |g(x) - (B_0 + B_{11}x_{11} + B_{12}x_{12} + \\
 &\dots + B_{L1}x_{L1} + B_{L2}x_{L2})|. \tag{8}
 \end{aligned}$$

取 $x_k^\Delta \in \text{Ker}A_k^{i_k}$, 即 x_k^Δ 为输入变量 x_k 在其第 i_k 个模糊子集最大值所对应的输入值, 令 $x_\Delta = (x_{11}^\Delta, x_{12}^\Delta, x_{21}^\Delta, x_{22}^\Delta, \dots, x_{L1}^\Delta, x_{L2}^\Delta)$, 将函数 $g(x)$ 在 x_Δ 处进行 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \\
 g(x_\Delta) &+ \frac{\partial g}{\partial x_{11}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{11} - x_{11}^\Delta) + \\
 &\frac{\partial g}{\partial x_{12}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{12} - x_{12}^\Delta) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_{L1}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{L1} - x_{L1}^\Delta) + \\
 &\frac{\partial g}{\partial x_{L2}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{L2} - x_{L2}^\Delta) + O(\|x - x_\Delta\|_\infty).
 \end{aligned}$$

通过调整参数 $a_{km}^{i_1 i_2}$ 可使得

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{\partial g}{\partial x_{11}} \Big|_{x=x_\Delta}, B_{12} = \frac{\partial g}{\partial x_{12}} \Big|_{x=x_\Delta}, \dots, \\
 B_{L1} &= \frac{\partial g}{\partial x_{L1}} \Big|_{x=x_\Delta}, B_{L2} = \frac{\partial g}{\partial x_{L2}} \Big|_{x=x_\Delta}, \\
 B_0 &= g(x_\Delta) - \frac{\partial g}{\partial x_{11}} \Big|_{x=x_\Delta} - \frac{\partial g}{\partial x_{12}} \Big|_{x=x_\Delta} - \dots - \\
 &\frac{\partial g}{\partial x_{L1}} \Big|_{x=x_\Delta} - \frac{\partial g}{\partial x_{L2}} \Big|_{x=x_\Delta}.
 \end{aligned}$$

代入式 (8) 有

$$\begin{aligned}
 |g(x) - f(x)| &= \\
 |g(x) - (B_0 + B_{11}x_{11} + B_{12}x_{12} + \dots + \\
 &B_{L1}x_{L1} + B_{L2}x_{L2})| = \\
 |g(x_\Delta) + \frac{\partial g}{\partial x_{11}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{11} - x_{11}^\Delta) + \\
 &\frac{\partial g}{\partial x_{12}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{12} - x_{12}^\Delta) + \dots + \\
 &\frac{\partial g}{\partial x_{L1}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{L1} - x_{L1}^\Delta) + \frac{\partial g}{\partial x_{L2}} \Big|_{x=x_\Delta} (x_{L2} - x_{L2}^\Delta) + \\
 &O(\|x - x_\Delta\|_\infty) - \dots - \\
 &(B_0 + B_{11}x_{11} + B_{12}x_{12} + \dots + B_{L1}x_{L1} + B_{L2}x_{L2})| = \\
 |O(\|x - x_\Delta\|_\infty)| &\leq O(\delta_\Delta) \leq O(\delta).
 \end{aligned}$$

其中: δ_Δ 为隶属函数 A_Δ 的支撑集, $\delta = \max(\delta_\Delta)$. 进而有 $\lim_{\delta \rightarrow 0} |f(x) - g(x)| = 0$, 并得到 $\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. \square

证明过程中没有涉及模糊子集隶属函数的具体参数, 说明只通过对模糊子集个数和模糊规则后件参数的调整, 即可保证后件直联型分层模糊系统的逼近性能. 逼近定理仅表明了这种模糊系统的存在性, 如何确定模糊子集的个数才能够保证逼近性则由逼近性的充分条件定理给出.

定理 3 (逼近性能的充分条件) 对于如式 (5) 所定义的后件直联型分层模糊系统, 设每个输入变量均有 n_0 个模糊子集, 输入变量论域均取 $U = [0, 1]$, 则对于任意连续可微多项式 $g(x) \in U$, 有 $\varepsilon > 0$, 只要

$$n_0 > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_\infty} + 1,$$

便一定存在后件直联型分层模糊系统 $f(x)$ 使得 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

证明 设 $U = [0, 1]$, 对于输入变量 x_i , 其论域空间上有 k 个模糊集, 每个模糊集的中心点设为 c_i^k , 且假设 $c_i^1 < c_i^2 < \dots < c_i^k$. 其中: $c_i^0 = 0, c_i^{k+1} = 1, k_i$ 为输入变量 x_i 的模糊划分数. 对于每一层的每一条规则

$$\text{if } x_{k1} \text{ is } A_{k1}^{i_1} \text{ and } x_{k2} \text{ is } A_{k2}^{i_2},$$

$$\text{then } y_k^{i_1 i_2} = a_{k0}^{i_1 i_2} + a_{k1}^{i_1 i_2} x_{k1} + a_{k2}^{i_1 i_2} x_{k2},$$

均存在一个特别的输入变量 $x_\Delta = (c_1^{i_1}, c_2^{i_2}, \dots, c_n^{i_n})$ 恰好为模糊集的中心点. 对于不同的规则, 输入变量

也不一样, 令 $S = \{x_\Delta = (c_1^{i_1}, c_2^{i_2}, \dots, c_n^{i_n})\}$, 由式(5) 得到 CCHF S 系统在 x_Δ 上的模糊输出为

$$f(x_\Delta) = y_L(x_\Delta) = y_L^{i_1 i_2} + b_L^3 y_{L-1} = y_L^{i_1 i_2} + b_L^3 y_{L-1}^{i_1 i_2} + b_L^3 b_{L-1}^3 y_{L-2}^{i_1 i_2} + \dots + b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 y_1^{i_1 i_2}.$$

对于任意多项式函数 $g(x)$, 由 Taylor 展开式得

$$g(x) = g(x_\Delta) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=x_\Delta} (x - x_\Delta) + r_2.$$

其中: r_2 为拉格朗日余项, 且有

$$r_2 = \frac{1}{2} (x - x_\Delta)^T \nabla^2 g|_{x=\eta} (x - x_\Delta);$$

$\nabla^2 g$ 为 $g(x)$ 的 Hessian 矩阵. 若令

$$y_L^{i_1 i_2} + b_L^3 y_{L-1}^{i_1 i_2} + b_L^3 b_{L-1}^3 y_{L-2}^{i_1 i_2} + \dots + b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 y_1^{i_1 i_2} = g(x_\Delta) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=x_\Delta} (x - x_\Delta),$$

则有

$$\begin{aligned} & |y_L^{i_1 i_2} + b_L^3 y_{L-1}^{i_1 i_2} + b_L^3 b_{L-1}^3 y_{L-2}^{i_1 i_2} + \dots + \\ & b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 y_1^{i_1 i_2} - g(x)| = \\ & \left| \frac{1}{2} (x - x_\Delta)^T \nabla^2 g|_{x=\eta} (x - x_\Delta) \right| \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_\infty \frac{1}{(n_0 - 1)^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

因此有

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| = & \left| \frac{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L_j}^{i_j}(x_{L_j}) \right) y_L^{i_1 i_2}}{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L_j}^{i_j}(x_{L_j}) \right)} + b_L^3 y_{L-1} - g(x) \right| = \\ & \left| \frac{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L_j}^{i_j}(x_{L_j}) \right) y_L^{i_1 i_2}}{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L_j}^{i_j}(x_{L_j}) \right)} + \right. \\ & \left. \frac{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L-1,j}^{i_j}(x_{L-1,j}) \right) y_{L-1}^{i_1 i_2}}{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L-1,j}^{i_j}(x_{L-1,j}) \right)} + \dots + \right. \\ & \left. \frac{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{1j}^{i_j}(x_{1j}) \right) y_1^{i_1 i_2}}{\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{1j}^{i_j}(x_{1j}) \right)} - g(x) \right|. \end{aligned} \tag{10}$$

为简便起见, 将 $\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{L_j}^{i_j}(x_{L_j}) \right)$ 简写为 $\sum_{k_L} A_L^{k_L}$,

$\sum_{i_1 i_2 \in I} \left(\prod_{j=1}^2 A_{1j}^{i_j}(x_{1j}) \right)$ 简写为 $\sum_{k_1} A_1^{k_1}$, k_L, k_{L-1}, \dots, k_1

为 $i_1 i_2$ 的组合数. 式(10)可简写为

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| = & \left| \frac{\sum_{k_L} A_L^{k_L} y_L^{k_L}}{\sum_{k_L} A_L^{k_L}} + \right. \\ & \left. \frac{b_L^3 \sum_{k_{L-1}} A_{L-1}^{k_{L-1}} y_{L-1}^{k_{L-1}}}{\sum_{k_{L-1}} A_{L-1}^{k_{L-1}}} + \right. \\ & \dots + \left. \frac{b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 \sum_{k_1} A_1^{k_1} y_1^{k_1}}{\sum_{k_1} A_1^{k_1}} - g(x) \right| = \\ & \left| \left(\frac{\sum_{k_L} A_L^{k_L} \sum_{k_{L-1}} A_{L-1}^{k_{L-1}} \dots \sum_{k_1} A_1^{k_1} [y_L^{k_L} + \right. \right. \\ & \left. \left. b_L^3 y_{L-1}^{k_{L-1}} + \dots + b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 y_1^{k_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. g(x)] \right) / \sum_{k_L} A_L^{k_L} \sum_{k_{L-1}} A_{L-1}^{k_{L-1}} \dots \sum_{k_1} A_1^{k_1} \right| \leq \\ & \left| \left(\frac{\sum_{k_L} A_L^{k_L} \sum_{k_{L-1}} A_{L-1}^{k_{L-1}} \dots \sum_{k_1} A_1^{k_1} [|y_L^{k_L} + \right. \right. \\ & \left. \left. b_L^3 y_{L-1}^{k_{L-1}} + \dots + b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 y_1^{k_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. g(x)] \right) / \sum_{k_L} A_L^{k_L} \sum_{k_{L-1}} A_{L-1}^{k_{L-1}} \dots \sum_{k_1} A_1^{k_1} \right|. \end{aligned}$$

对于任意给定的逼近误差 $\varepsilon > 0$, 由式(9)有

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| \leq & \left| \left(\frac{\sum_{k_L} A_L^{k_L} \dots \sum_{k_1} A_1^{k_1} [|y_L^{k_L} + b_L^3 y_{L-1}^{k_{L-1}} + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. b_L^3 \dots b_2^3 y_1^{k_1} - g(x)] \right) / \sum_{k_L} A_L^{k_L} \dots \sum_{k_1} A_1^{k_1} \right| \leq \\ & |y_L^{k_L} + b_L^3 y_{L-1}^{k_{L-1}} + \dots + b_L^3 b_{L-1}^3 \dots b_2^3 y_1^{k_1} - g(x)| \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_\infty \frac{1}{(n_0 - 1)^2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

可得当输入变量模糊子集个数

$$n_0 > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_\infty} + 1$$

时, 有 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. \square

由定理3可知, 只要分层模糊系统各模糊单元模糊子集个数满足一定条件, 这种后件直联型分层模糊系统仅通过对各层模糊单元 TS 模糊模型后件参数的调整即可以任意精度逼近给定连续函数.

3 仿真算例

以时间序列函数 Mackey_Glass 为例^[16]进行仿真, Mackey_Glass 微分方程为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0.2x(t-17)}{1+x(t-17)^{10}} - 0.1x(t).$$

取4个输入变量 x_1, x_2, x_3, x_4 分别为 $x(t-8), x(t-3), x(t-1), x(t)$, 对于给定的连续函数 $y = g(x) = x_1^2 + 0.8x_2^2 + x_3x_4$, 由定理3可知, 当

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_\infty = 2$$

时, 给定误差 $\varepsilon = 0.1$, 则有模糊子集数

$$n_0 \geq \sqrt{\frac{2}{2 \times 0.1}} + 1 = 4.16.$$

取模糊子集数目为整数 $n_0 = 5$, 即对于每个模糊变量确定 5 个模糊子集. 给出一批输入输出数据 (1 200 个点), 前 600 个数据点为训练数据, 后 600 个为校验数据. 采用本文所提出的后件直联型分层模糊系统结构, 利用递推最小二乘法求解后件参数^[17], 分别计算模型输出 $f(x)$ 和绝对误差 $e = |f(x) - g(x)|$.

仿真结果如图 3 所示. 图 3 中, $g(x)$ 为给定函数, $f(x)$ 为后件直联型分层模糊系统输出, 仿真结果中训练和校验最大误差 e 分别为 0.049 7 和 0.079 8, 均小于所要求的 0.1. 作为对比, 利用增一型分层模糊系统^[9]、传统模糊系统^[2]对算例进行仿真, 对比满足给定误差时的规则数、后件辨识参数数目、校验数据的均方误差 (RMSE), 仿真时间取训练 5 次的平均时间, 结果如表 1 所示.

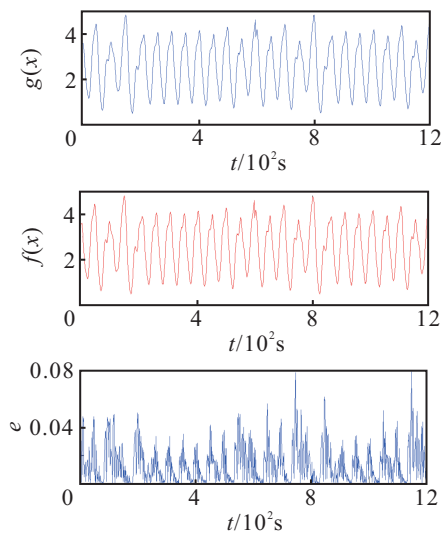


图 3 模糊子集数为 5 时的仿真结果

表 1 不同模糊系数的仿真对比

	CCHFS	增一型分层模糊系统	传统模糊系统
规则数	72	108	1296
后件辨识参数	217	324	6 480
仿真时间/s	0.893 7	1.270 8	28.286 5
RMSE	0.023	0.013 5	0.009 7

仿真结果进一步验证了在满足给定误差的前提下, CCHFS 的规则数目、后件辨识参数和仿真时间均小于常用的增一型分层模糊系统, 能够有效解决模糊系统的维数灾问题.

4 结 论

本文提出一种新的分层模糊系统的结构形式, 将各层之间的中间变量直接作为各层模糊单元输出的调节项, 称为后件直联型分层模糊系统. 该分层模糊

系统不仅能够减少模糊规则数目, 待辨识参数少, 而且避免了对中间变量的模糊推理, 有利于利用人类经验知识, 具有较强的可解释性和较好的实时性. 通过给出这种分层模糊系统的解析表达式, 证明了其具有通用逼近性能, 表明规则数目的减少并不影响其逼近性能, 进而给出了保证通用逼近性能的充分条件. 通过仿真实例进一步验证了分析结果, 表明所提出的新型分层模糊系统在模糊建模、规则提取等方面具有较好的应用前景.

参考文献(References)

- [1] Shieh H L, Bao C Y. A robust fuzzy CMAC for function approximation[C]. Int Conf on Machine Learning and Cybernetics. Qingdao: IEEE, 2010, 6: 2962-2966.
- [2] Wang L X. Fuzzy systems are universal approximators[C]. IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. San Diego: IEEE, 1992: 1163-1170.
- [3] Ke Z, Nai-Yao Z, Wen-Li X. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773-780.
- [4] Raju G V S, Jun Z. Adaptive hierarchical fuzzy controller[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(4): 973-980.
- [5] 王贵君, 段晨霞. 广义分层混合模糊系统及其泛逼近性[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(5): 673-680. (Wang G J, Duan C X. Generalized hierarchical hybrid fuzzy system and its universal approximation[J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(5): 673-680.)
- [6] 孙多青, 霍伟. 基于分层模糊系统的间接自适应控制[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(4): 303-307. (Sun D Q, Huo W. Indirect adaptive control based on hierarchical fuzzy systems[J]. J of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(4): 303-307.)
- [7] Li-Xin W. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 93(2): 223-230.
- [8] Xiao-Jun Z, Keane J A. Approximation capability analysis of hierarchical Takagi-Sugeno fuzzy systems[C]. Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Budapest: IEEE, 2004, 3: 1227-1232.
- [9] 孙多青, 霍伟. 具有任意形状隶属函数的分层模糊系统逼近性能研究[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 377-381. (Sun D Q, Huo W. Study on universal approximation of hierarchical fuzzy systems with arbitrary membership functions[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(3): 377-381.)

(下转第1567页)