文章编号: 1001-0920 (2013) 11-1630-07

基于二元联系数集结算子的多准则群决策方法

汪新凡[1,2], 王坚强[2], 杨恶恶[2]

(1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 定义了二元联系数的加性运算法则, 给出了几种新的算术集结算子, 即二元联系数加权算术平均 (BCNWAA) 算子、二元联系数有序加权平均 (BCNOWA) 算子和二元联系数混合集结 (BCNHA) 算子, 提出了一种基于二元联系数的准则权重信息不完全确定的群决策方法. 该方法利用 BCNWAA 算子和 BCNHA 算子对二元联系数准则值进行集结; 利用二元联系数准则值的方差和准则权重的随机性, 通过构建优化模型确定最优准则权重. 最后, 通过实例分析表明了该方法的可行性和有效性.

关键词: 群决策；集对分析；二元联系数；二元联系数加权算术平均算子；二元联系数有序加权平均算子；二元联系数混合集结算子

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Multiple criteria group decision making method based on binary connection number aggregation operators

WANG Xin-fan[1,2], *WANG Jian-qiang*[2], *YANG Wu-e*[2]

(1. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou 412007，China；2. School of Business，Central South University，Changsha 410083，China．Correspondent：WANG Xin-fan，E-mail：zzwxfydm@126.com)

Abstract: Some additive operational laws of binary connection numbers are defined, and several new arithmetic aggregation operators, such as the binary connection number weighted arithmetic averaging(BCNWAA) operator, the binary connection number ordered weighted averaging(BCNOWA) operator and the binary connection number hybrid aggregation(BCNHA) operator, are proposed. Then an approach is developed for solving multiple criterion group decision making based on binary connection numbers with incomplete uncertain information. In this method, binary connection number criterion values are aggregated using the BCNWAA operator and the BCNHA operator, some optimal models are constructed to determine the optimal criterion weights using the variance of binary connection number criterion values and the randomness of criterion weights. Finally, an example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the developed method.

Key words: group decision making；set pair analysis；binary connection numbers；BCNWAA operator；BCNOWA operator；BCNHA operator

0 引 言

多准则决策过程中, 决策者往往利用区间数、三角模糊数等描述和处理实际中的模糊性, 从而模糊多准则决策成为了决策领域的一个研究热点. 现有模糊决策方法很多, 但仍存在缺陷. 例如, 国外研究主要借助于 α 截集的方法[1-3], 但文献 [1-2] 的方法需要 α 遍历区间 $[0,1]$ 内的所有实数, 很不现实; 文献 [3] 的方法计算繁琐, 模糊极大集、极小集的隶属函数表达式难于理解, 同时, 工程技术人员也难以运用于实际. 国内研究虽然采用隶属函数的表达形式, 但建模之前决策信息就已经被精确化, 造成了大量信息的丢失. 从严格意义上讲，这些方法并没有脱离经典多准则决策的范畴.

集对分析[4]是一种新的不确定性理论, 其核心思想是把对客观事物的确定性测度与不确定性测度作为一个系统进行分析, 从而整体地处理由模糊、随

收稿日期: 2012-07-31；**修回日期:** 2012-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71221061, 71271218, 61174075)；教育部人文社科基金项目(10YJC630338, 12YJA630114); 湖南省自然科学基金项目(11JJ6068); 湖南省科技计划项目(2012FJ3036, 2012FJ4116); 湖南省高等学校科学研究重点项目(12A042).

作者简介: 汪新凡(1966−), 男, 教授, 博士生, 从事不确定决策和集成算子等研究；王坚强(1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究.

机、不确知和中介等不确定性所导致的混合不确定性问题, 主要数学工具是联系数. 集对分析为处理不确定多准则决策问题提供了一种新的思路, 能有效克服模糊决策的一些缺陷, 受到许多研究人员的高度关注[5-7]. 二元联系数作为联系数的一种, 目前其相关研究已取得一些成果, 但还很不完善[8-12]. 文献 [8-9] 利用二元联系数描述和处理网络计划和系统调度中的不确定性; 文献 [10] 对二元联系数的理论基础 (如运算法则) 进行了研究; 文献 [11] 通过将区间数转化为二元联系数, 提出了准则权重和准则值均以区间数形式给出的多准则决策方法; 文献 [12] 通过将模糊语言评估标度转化为二元联系数, 提出了一种决策者权重、准则权重和准则值均以语言形式给出的群决策方法. 但是, 有关二元联系数的排序规则、运算法则以及二元联系数信息的集结方法均有待进一步研究. 为此, 本文给出了一种二元联系数的比较与排序方法, 定义了二元联系数的加性运算法则; 基于这些运算法则, 定义了一些二元联系数信息的算术集结算子, 并将这些算子应用于群决策, 提出了一种准则值为二元联系数而准则权重信息不完全确定的群决策方法.

1 二元联系数及其集结算子

定义 1[4] 给定两个有一定联系的集合 F 和 G, 它们组成集对 $Y=(F,G)$. 在某一具体问题背景下, 一般用

$$U=A+Bi+Cj \tag{1}$$

表示两个集合同、异、反关系数及其相互联系. 其中: A 为同关系数, B 为异关系数, C 为反关系数, $j=-1$, $i\in[-1,1]$. 令 $N=A+B+C$, 则 N 为两个集合的关系总数, 也称联系范数. 用 N 除式 (1) 两边, 并令 $u=U/N$, $a=A/N$, $b=B/N$, $c=C/N$, 则由式 (1) 可得

$$u=a+bi+cj. \tag{2}$$

其中: a, b, c 依次称为两个集合 F 和 G 的同一度、差异度和对立度, 且 U 和 u 统称为三元联系数.

若式 (1) 和 (2) 简化为如下形式:

$$u=a+bi,\ U=A+Bi; \tag{3}$$

$$u=a+cj,\ U=A+Cj. \tag{4}$$

则 U 和 u 统称为二元联系数.

一般仅使用式 (3) 类型的二元联系数. 文献 [11] 中约定上述二元联系数中的 $i\in[0,1]$, 本文认为其更适合表达决策信息, 只是其中的 A, B 均为自然数, a, $b\in[0,1]$, 限制了其使用范围. 本文将其推广, 给出如下定义.

定义 2 设 μ,η 为任意非负实数, 称

$$\beta=\mu+\eta i \tag{5}$$

为二元联系数. 其中: μ 为确定数, η 为不确定度 (表示不确定的最大程度), ηi 为不确定数, $i\in[0,1]$ 且需根据问题的具体情境不确定取值, 有时 i 也可仅作为一个不确定量的标记使用. 如无特别说明, 本文所指均为此种类型的二元联系数, 并记 Ω 为所有这种二元联系数组成的集合.

设 $[x,y](0\leqslant x\leqslant y<+\infty)$ 为非负区间数 (如果为负区间数, 则经规范化处理后一定为非负区间数), 将其改写为二元联系数的形式, 有

$$\beta=x+(y-x)i,\ i\in[0,1]. \tag{6}$$

由式 (6) 可知, $\beta=\mu+\eta i$ 转化成区间数即为 $\tilde{\beta}=[\mu,\mu+\eta]$. 文献 [13] 认为准则值在 $[\mu,\mu+\eta]$ 内服从正态分布, 且其期望值为

$$E(\tilde{\beta})=\frac{1}{2}[\mu+(\mu+\eta)]=\mu+0.5\eta,$$

均方差为

$$\sigma(\tilde{\beta})=\frac{1}{6}[(\mu+\eta)-\mu]=\frac{\eta}{6}.$$

参照此可定义二元联系数的期望值和均方差.

定义 3 设 $\beta=\mu+\eta i$ 为二元联系数, 则称

$$E(\beta)=\mu+0.5\eta\,(i=0.5), \tag{7}$$

$$\sigma(\beta)=\eta/6 \tag{8}$$

分别为 β 的期望值和均方差.

根据期望-方差准则, 以下给出一种二元联系数的比较与排序方法.

定义 4 设 $\beta_1=\mu_1+\eta_1 i$ 和 $\beta_2=\mu_2+\eta_2 i$ 为任意的两个二元联系数, 则有:

1) 若 $E(\beta_1)<E(\beta_2)$, 则 $\beta_1<\beta_2$.

2) 若 $E(\beta_1)=E(\beta_2)$, 则:

①当 $\sigma(\beta_1)=\sigma(\beta_2)$ 时, $\beta_1=\beta_2$;

②当 $\sigma(\beta_1)<\sigma(\beta_2)$ 时, $\beta_1>\beta_2$;

③当 $\sigma(\beta_1)>\sigma(\beta_2)$ 时, $\beta_1<\beta_2$.

文献 [10] 将二元联系数的加法定义为

$$\beta_1\oplus\beta_2=\mu_1+\mu_2+(\eta_1+\eta_2)i, \tag{9}$$

但本文认为其有不合理之处, 现给出如下定义.

定义 5 设 $\beta_1=\mu_1+\eta_1 i$ 和 $\beta_2=\mu_2+\eta_2 i$ 为任意的两个二元联系数, 则其加性的运算法则为

$$\beta_1\oplus\beta_2=\mu_1+\mu_2+\sqrt{{\eta_1}^2+{\eta_2}^2}\ i. \tag{10}$$

若设 $\beta=\mu+\eta i$ 为二元联系数, 则由式 (10) 可得

$$2\beta=(\mu+\eta i)\oplus(\mu+\eta i)=$$
$$\mu+\mu+\sqrt{\eta^2+\eta^2}\ i=2\mu+\sqrt{2}\,\eta i,$$
$$3\beta=(2\mu+\sqrt{2}\eta i)\oplus(\mu+\eta i)=$$
$$2\mu+\mu+\sqrt{\left(\sqrt{2}\eta\right)^2+\eta^2}\ i=3\mu+\sqrt{3}\eta i,$$
$$4\beta=4\mu+\sqrt{4}\eta i,\ \cdots.$$

参照上式定义二元联系数的数乘运算法则为

$$\lambda\beta = \lambda\mu + \sqrt{\lambda}\eta i,\ \lambda \geqslant 0. \tag{11}$$

由此易知, 上述运算法则满足以下运算律:

$$\beta_1 \oplus \beta_2 = \beta_2 \oplus \beta_1; \tag{12}$$

$$(\beta_1 \oplus \beta_2) \oplus \beta_3 = \beta_1 \oplus (\beta_2 \oplus \beta_3); \tag{13}$$

$$\lambda(\beta_1 \oplus \beta_2) = \lambda\beta_1 \oplus \lambda\beta_2,\ \lambda \geqslant 0; \tag{14}$$

$$\lambda_1\beta_1 \oplus \lambda_2\beta_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)\beta_1,\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0. \tag{15}$$

基于二元联系数的运算法则 (10) 和 (11), 下面给出一些新的算术集结算子, 即二元联系数加权算术平均 (BCNWAA) 算子、二元联系数有序加权平均 (BCNOWA) 算子和二元联系数混合集结 (BCNHA) 算子, 以便对二元联系数信息进行集结.

定义 6 设 $\beta_r = \mu_r + \eta_r i\ (r = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组二元联系数, 且设 BCNWAA: $\Omega^n \to \Omega$, 若

$$\mathrm{BCNWAA}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = w_1\beta_1 \oplus w_2\beta_2 \oplus \cdots \oplus w_n\beta_n. \tag{16}$$

其中: $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的加权向量, $w_r \geqslant 0\ (r = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum\limits_{r=1}^{n} w_r = 1$. 则称函数 BCNWAA 为二元联系数加权算术平均算子. 特别地, 若 $w = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^{\mathrm{T}}$, 则相应的 BCNWAA 算子退化为二元联系数算术平均 (BCNAA) 算子, 即

$$\mathrm{BCNAA}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \frac{1}{n}(\beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \cdots \oplus \beta_n). \tag{17}$$

定理 1 设 $\beta_r = \mu_r + \eta_r i\ (r = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组二元联系数, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的加权向量, $w_r \geqslant 0\,(r = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum\limits_{r=1}^{n} w_r = 1$, 则由式 (16) 集结得到的结果仍为二元联系数, 且

$$\mathrm{BCNWAA}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \sum_{r=1}^{n} w_r\mu_r + \sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_r{\eta_r}^2}\ i. \tag{18}$$

证明 显然, 由式 (18) 集结得到的结果仍为二元联系数. 下面用数学归纳法来证明式 (18):

1) 当 $n = 2$ 时, 由于

$$w_1\beta_1 = w_1\mu_1 + \sqrt{w_1}\eta_1 i,\ w_2\beta_2 = w_2\mu_2 + \sqrt{w_2}\eta_2 i,$$

则有

$$\mathrm{BCNWAA}_w(\beta_1, \beta_2) = w_1\beta_1 \oplus w_2\beta_2 = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \sqrt{(\sqrt{w_1}\eta_1)^2 + (\sqrt{w_2}\eta_2)^2}\ i = \sum_{r=1}^{2} w_r\mu_r + \sqrt{\sum_{r=1}^{2} w_r{\eta_r}^2}\ i.$$

2) 假设当 $n = k$ 时, 式 (18) 成立, 即

$$\mathrm{BCNWAA}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) = \sum_{r=1}^{k} w_r\mu_r + \sqrt{\sum_{r=1}^{k} w_r{\eta_r}^2}\ i,$$

则当 $n = k + 1$ 时, 由运算法则 (10) 和 (11) 可得

$$\mathrm{BCNWAA}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \beta_{k+1}) = \Big(\sum_{r=1}^{k} w_r\mu_r + \sqrt{\sum_{r=1}^{k} w_r{\eta_r}^2}\ i\Big) \oplus w_{k+1}(\mu_{k+1} + \eta_{k+1} i) = \sum_{r=1}^{k} w_r\mu_r + w_{k+1}\mu_{k+1} + \sqrt{\Big(\sqrt{\sum_{r=1}^{k} w_r{\eta_r}^2}\Big)^2 + (\sqrt{w_{k+1}}\eta_{k+1})^2}\ i = \sum_{r=1}^{k+1} w_r\mu_r + \sqrt{\sum_{r=1}^{k+1} w_r{\eta_r}^2}\ i.$$

即当 $n = k + 1$ 时, 式 (18) 也成立.

综上所述, 对一切正整数 n, 式 (18) 均成立. □

注 1 式 (18) 中 BCNWAA 算子的不确定度为

$$\eta_{\mathrm{BCNWAA}} = \sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_r{\eta_r}^2},$$

这类似于统计学中的均方根 (RMS). 在统计学中, RMS 值就是一组统计数据平方的平均值的平方根, 即对于一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 其 RMS 值为

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} x_r^2}.$$

若考虑到数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的权重向量为 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$, $w_r \geqslant 0\,(r = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum\limits_{r=1}^{n} w_r = 1$, 则

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_r x_r^2}.$$

令数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的加权算术平均值为 $\bar{x} = \sum\limits_{r=1}^{n} w_r x_r$, 均方差为

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_r(x_r - \bar{x})^2},$$

则有关系式 $x_{\mathrm{RMS}}^2 = \bar{x}^2 + \sigma_x^2$ 成立[14]. RMS 的意义与均方差类似, 都反映了样本数据的离散程度.

定义二元联系数的运算应采取稳妥全面的原则, 否则容易造成信息的失真. 数据 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 本身分别表示二元联系数 $\beta_r = \mu_r + \eta_r i\,(r = 1, 2, \cdots, n)$ 的不确定度, 采用 BCNWAA 算子集结后的不确定度应该充分反映各个二元联系数 $\beta_r\,(r = 1,$

$2,\cdots,n)$ 的不确定性. 如果利用式 (9) 计算, 则可得到 BCNWAA 算子的不确定度为 $\sum\limits_{r=1}^{n} w_r\eta_r$, 这仅仅考虑了数据 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的算术平均值. 而本文方法得到的 BCNWAA 算子的不确定度为

$$\eta_{\text{BCNWAA}}=\sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_r{\eta_r}^2},$$

由关系式 $x_{\text{RMS}}^2=\bar{x}^2+\sigma_x^2$ 可知

$$\eta_{\text{BCNWAA}}=\sqrt{\bar{\eta}^2+\sigma_\eta^2},$$

它不仅考虑了数据 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的算术平均值, 而且考虑了其均方差, 能更有效地表示该数据组的离散程度, 也就能更好地表示这些数据的不确定程度; 因此, 本文给出的二元联系数的加法法则 (10) 比 (9) 更合理.

定义 7 设 $\beta_r=\mu_r+\eta_r i\,(r=1,2,\cdots,n)$ 为一组二元联系数, 且设 BCNOWA: $\Omega^n\to\Omega$, 若

$$\text{BCNOWA}_v(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)= v_1\beta_{\sigma(1)}\oplus v_2\beta_{\sigma(2)}\oplus\cdots\oplus v_n\beta_{\sigma(n)},\qquad(19)$$

则称函数 BCNOWA 为二元联系数有序加权平均算子. 其中: $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\text{T}}$ 是与函数 BCNOWA 相关联的加权向量 (位置向量), $v_r\geqslant 0\,(r=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{r=1}^{n} v_r=1$; $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换, 使得对于任意 r, 有 $\beta_{\sigma(r-1)}\geqslant\beta_{\sigma(r)}$. 特别地, 若 $v=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\text{T}}$, 则相应的 BCNOWA 算子退化为二元联系数的算术平均算子.

定理 2 设 $\beta_r=\mu_r+\eta_r i\,(r=1,2,\cdots,n)$ 为一组二元联系数, $(\beta_{\sigma(1)},\beta_{\sigma(2)},\cdots,\beta_{\sigma(n)})$ 为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 的一个置换, 使得对于任意 r, 有 $\beta_{\sigma(r-1)}\geqslant\beta_{\sigma(r)}$, 且设 $\beta_{\sigma(r)}=\mu_{\sigma(r)}+\eta_{\sigma(r)}i$, 则由式 (19) 集结得到的结果仍为二元联系数, 且

$$\text{BCNOWA}_v(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)= \sum_{r=1}^{n}\nu_r\mu_{\sigma(r)}+\sqrt{\sum_{r=1}^{n}\nu_r{\eta_{\sigma(r)}}^2}\,i.\qquad(20)$$

其中: $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\text{T}}$ 为 BCNOWA 算子的加权向量, $v_r\geqslant 0\,(r=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{r=1}^{n} v_r=1$.

BCNOWA 算子的根本特点为: 首先对二元联系数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 按从大到小的顺序进行排序, 再利用位置加权向量 v 对排序后的数据进行加权集结, 其中元素 β_r 与 v_r 没有任何联系, v_r 只与集结过程中的第 r 个位置有关. 有关加权向量 v 的确定有多种方法, 文献 [15] 已对目前主要的赋权方法进行了综述.

定义 8 设 $\beta_r=\mu_r+\eta_r i\,(r=1,2,\cdots,n)$ 为一组二元联系数, 且设 BCNHA: $\Omega^n\to\Omega$, 若

$$\text{BCNHA}_{w,v}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)= v_1\beta'_{\sigma(1)}\oplus v_2\beta'_{\sigma(2)}\oplus\cdots\oplus v_n\beta'_{\sigma(n)},\qquad(21)$$

则称函数BCNHA为二元联系数混合集结算子. 其中: $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\text{T}}$ 为与函数 BCNHA 相关联的加权向量 (位置向量), $v_r\geqslant 0$, $r=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{r=1}^{n} v_r=1$; $\beta'_{\sigma(r)}$ 为加权的二元联系数组 $\beta'_k(k=1,2,\cdots,n)$ 中第 r 个最大的元素, 这里 $\beta'_k=nw_k\beta_k(k=1,2,\cdots,n)$, $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\text{T}}$ 是二元联系数组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的加权向量, $w_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k=1$, 且 n 是平衡因子.

若令 $\beta'_k=\mu'_k+\eta'_k i$, $\beta'_{\sigma(r)}=\mu'_{\sigma(r)}+\eta'_{\sigma(r)}i$, 则由式 (21) 集结得到的结果仍为二元联系数, 且

$$\text{BCNHA}_{w,v}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)= \sum_{r=1}^{n}\nu_r{\mu'}_{\sigma(r)}+\sqrt{\sum_{r=1}^{n}\nu_r{{\eta'}_{\sigma(r)}}^2}\,i.\qquad(22)$$

定理 3 BCNWAA 算子是 BCNHA 算子的一个特例, 这时取 $v=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\text{T}}$.

定理 4 BCNOWA 算子是 BCNHA 算子的一个特例, 这时取 $w=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\text{T}}$.

由定理 3 和定理 4 可知, BCNHA 算子同时推广了 BCNWAA 算子和 BCNOWA 算子, 它不仅体现了二元联系数自身的重要性程度, 而且还反映了二元联系数所在位置的重要性程度.

2 基于二元联系数集结算子的群决策方法

2.1 问题描述

对于某一群决策问题, 设 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_p\}$ 为决策者集, $e=(e_1,e_2,\cdots,e_p)^{\text{T}}$ 为决策者的权重向量, $e_t\geqslant 0$, $\sum\limits_{t=1}^{p} e_t=1$. $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 为离散的可行方案集, $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 为评价指标 (准则) 集. 设决策者 D_t 给出方案 X_k 在准则 I_r 下的准则值为 $\beta_{kr}^{(t)}$ (这里 $\beta_{kr}^{(t)}=\mu_{kr}^{(t)}+\eta_{kr}^{(t)}i$ 为二元联系数或由其他形式转化成的二元联系数), 从而构成二元联系数决策矩阵 $R_t=(\beta_{kr}^{(t)})_{m\times n}$, $k=1,2,\cdots,m$, $r=1,2,\cdots,n$, $t=1,2,\cdots,p$. 试确定这些方案的排序.

2.2 准则权重的不完全确定信息

在实际的决策过程中, 决策者很难准确地给出准则权重的确定值, 或不能对准则间的重要性程度进行两两比较, 进而不能由 AHP 和 ANP 等方法确定准则权重, 但通常能以不完全确定信息的形式给出准则权重之间的关系. 这种部分权重信息可为下述 5 种情形

中的任意一种或多种组合[16]:

$$\{w_r \geqslant w_k\}; \tag{23}$$

$$\{w_r - w_k \geqslant \xi_r\},\ 0 \leqslant \xi_r \leqslant 1; \tag{24}$$

$$\{w_r - w_k \geqslant w_t - w_l\},\ k \neq t \neq l; \tag{25}$$

$$\{w_r \geqslant \xi_r w_k\},\ 0 \leqslant \xi_r \leqslant 1; \tag{26}$$

$$\{\xi_r \leqslant w_r \leqslant \xi_r + \varepsilon_r\},\ 0 \leqslant \xi_r < \xi_r + \varepsilon_r \leqslant 1. \tag{27}$$

设 Θ 表示决策者给出的准则权重的不完全确定信息的集合.

2.3 群决策方法的具体步骤

Step 1 假设根据准则权重的不完全确定信息求出的最优准则权重为 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$, 则利用BCNWAA算子

$$\beta_k^{(t)} = \mathrm{BCNWAA}_w(\beta_{k1}^{(t)}, \beta_{k2}^{(t)}, \cdots, \beta_{kn}^{(t)}) \tag{28}$$

对决策矩阵 $R_t = (\beta_{kr}^{(t)})_{m\times n}$ 中第 k 行的准则值进行集结, 得到决策者 D_t 所给出的方案 X_k 的综合准则值 $\beta_k^{(t)} = \mu_k^{(t)} + \eta_k^{(t)} i$, $k = 1, 2, \cdots, m$, $t = 1, 2, \cdots, p$. 其中

$$\mu_k^{(t)} = \sum_{r=1}^{n} w_r \mu_{kr}^{(t)}, \tag{29}$$

$$\eta_k^{(t)} = \sqrt{\sum_{r=1}^{n} w_r \big(\eta_{kr}^{(t)}\big)^2}. \tag{30}$$

由式(8)可知, $\beta_k^{(t)}$ 的均方差为 $\sigma(\beta_k^{(t)}) = \eta_k^{(t)}/6$, 方差为

$$(\sigma(\beta_k^{(t)}))^2 = \frac{1}{36}(\eta_k^{(t)})^2 = \frac{1}{36}\sum_{r=1}^{n} w_r \big(\eta_{kr}^{(t)}\big)^2.$$

下面提供一种当准则权重以不完全确定信息形式给出时, 根据二元联系数准则值的方差和准则权重的随机性建立优化模型, 从而求出最优准则权重的方法.

首先考虑决策者 D_t 所给出的决策矩阵 $R_t = (\beta_{kr}^{(t)})_{m\times n}$, 由于综合准则值为二元联系数形式, 从 R_t 中求出合理的准则权重 $w^{(t)} = (w_1^{(t)}, w_2^{(t)}, \cdots, w_n^{(t)})^{\mathrm{T}}$ 应该使所有方案方差的总和最小化, 即极小化

$$\begin{aligned} &\min\ \sum_{k=1}^{m} \big(\eta_k^{(t)}\big)^2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} \big(\eta_{kr}^{(t)}\big)^2;\\ &\text{s.t.}\ w^{(t)} \in \Theta,\ \sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} = 1,\\ &\qquad w_r^{(t)} \geqslant 0,\ r = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{31}$$

同时, 由于各准则的真实权重是一个随机变量, 具有不确定性. 为了描述这种不确定性, 可将准则权重 $w_r^{(t)}$ 理解为第 r 个指标在准则集中所占比重(概率), 这样就可以用Shannon信息熵[17]

$$H = -\sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} \ln w_r^{(t)} \tag{32}$$

来表示准则权重的不确定性. 根据Jaynes最大熵原理, 合理的准则权重应使Jaynes熵极大, 即极大化

$$\begin{aligned} &\max\ \ H = -\sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} \ln w_r^{(t)};\\ &\text{s.t.}\ w^{(t)} \in \Theta,\ \sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} = 1,\\ &\qquad w_r^{(t)} \geqslant 0,\ r = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{33}$$

为了达到上述两个目的, 求解最优准则权重 $w^{(t)}$ 就等价于求解如下最优化问题:

$$\begin{aligned} &\min\ \ \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} \big(\eta_{kr}^{(t)}\big)^2 + \sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} \ln w_r^{(t)};\\ &\text{s.t.}\ w^{(t)} \in \Theta,\ \sum_{r=1}^{n} w_r^{(t)} = 1,\\ &\qquad w_r^{(t)} \geqslant 0,\ \ r = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{34}$$

再考虑决策者的权重 $e = (e_1, e_2, \cdots, e_p)^{\mathrm{T}}$, 则准则的最优权重向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 可由下式计算:

$$w_r = \sum_{t=1}^{p} e_t w_r^{(t)},\ r = 1, 2, \cdots, n. \tag{35}$$

Step 2 利用BCNHA算子

$$\beta_k = \mathrm{BCNHA}_{e,v}(\beta_k^{(1)}, \beta_k^{(2)}, \cdots, \beta_k^{(p)}) \tag{36}$$

对 p 位决策者给出的方案 X_k 的综合准则值 $\beta_k^{(t)}(t = 1, 2, \cdots, p)$ 进行集结, 得到方案 X_k 的群体综合准则值 $\beta_k (k = 1, 2, \cdots, m)$. 其中: $v = (v_1, v_2, \cdots, v_p)^{\mathrm{T}}$ 是与BCNHA算子相关联的加权向量, $v_t \geqslant 0$, $t = 1, 2, \cdots, p$, $\sum_{t=1}^{p} v_t = 1$.

Step 3 分别利用式(7)和(8)计算 β_k 的期望值 $E(\beta_k)$ 和均方差 $\sigma(\beta_k)$, $k = 1, 2, \cdots, m$.

Step 4 根据定义4对方案 $X_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 进行排序, 从而得到最优方案.

3 实例分析

假设要从4个候选人中选拔出最合适的办公室主任, 评价准则是工作能力 I_1, 学识水平 I_2 和人际关系 I_3, 准则权重满足条件 $0.33 \leqslant w_1 \leqslant 0.36$, $0.30 \leqslant w_2 \leqslant 0.32$, $w_3 \geqslant 0.31$. 现有3位决策者 $D_t (t = 1, 2, 3)$, 权重向量为 $e = (0.3, 0.4, 0.3)^{\mathrm{T}}$, 依照评价标准对4个候选人 $X_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 进行评价打分, 各准则下的评价信息用区间数表示(采用百分制, 由于所有指标的量纲一致, 不把决策矩阵规范化), 决策矩阵如表1～表3所示. 试确定最合适的办公室主任.

表 1　决策矩阵 R_1

方案	准则		
	I_1	I_2	I_3
X_1	[75, 78]	[85, 88]	[86, 90]
X_2	[82, 84]	[79, 81]	[83, 88]
X_3	[78, 79]	[82, 86]	[81, 84]
X_4	[89, 92]	[83, 86]	[80, 82]

表 2　决策矩阵 R_2

方案	准则		
	I_1	I_2	I_3
X_1	[78, 80]	[89, 91]	[89, 92]
X_2	[86, 87]	[91, 92]	[88, 92]
X_3	[88, 90]	[85, 88]	[86, 89]
X_4	[93, 96]	[89, 91]	[89, 93]

表 3　决策矩阵 R_3

方案	准则		
	I_1	I_2	I_3
X_1	[76, 80]	[89, 92]	[83, 86]
X_2	[86, 89]	[87, 89]	[85, 89]
X_3	[79, 82]	[84, 86]	[85, 87]
X_4	[88, 90]	[86, 90]	[87, 90]

下面利用本文提出的群决策方法进行求解.

Step 1: 首先, 利用式 (6) 将表 1～表 3 中的区间数改写成二元联系数; 然后, 利用优化模型 (34) 从决策矩阵 $R_t(t=1,2,3)$ 中求得合理的准则权重向量分别为

$$w^{(1)}=(0.360\,0,0.320\,0,0.320\,0)^{\mathrm{T}},$$

$$w^{(2)}=(0.360\,0,0.320\,0,0.320\,0)^{\mathrm{T}},$$

$$w^{(3)}=(0.340\,0,0.320\,0,0.340\,0)^{\mathrm{T}}.$$

再利用式 (35) 求得最优准则权重向量为

$$w=(0.354\,0,0.320\,0,0.326\,0)^{\mathrm{T}}.$$

Step 2: 利用式 (28) 对决策矩阵 R_t 中第 k 行的准则值进行集结, 得到决策者 D_t 所给出的候选人 X_k 的综合准则值 $\beta_k^{(t)}$, $k=1,2,3,4$, $t=1,2,3$, 即

$$\beta_1^{(1)}=81.876\,0+3.358\,9i,\ \beta_2^{(1)}=81.366\,0+3.293\,3i,$$

$$\beta_3^{(1)}=80.258\,0+2.899\,7i,\ \beta_4^{(1)}=84.146\,0+2.714\,8i,$$

$$\beta_1^{(2)}=85.106\,0+2.372\,8i,\ \beta_2^{(2)}=88.252\,0+2.426\,9i,$$

$$\beta_3^{(2)}=86.388\,0+2.688\,9i,\ \beta_4^{(2)}=90.416\,0+3.111\,6i,$$

$$\beta_1^{(3)}=82.442\,0+3.387\,9i,\ \beta_2^{(3)}=85.994\,0+3.111\,6i,$$

$$\beta_3^{(3)}=82.556\,0+2.402\,1i,\ \beta_4^{(3)}=87.034\,0+3.077\,3i.$$

Step 3: 利用式 (36) 对 3 位决策者给出的候选人 X_k 的综合准则值 $\beta_k^{(t)}(t=1,2,3)$ 进行集结, 得到 X_k 的群体综合准则值 β_k, $k=1,2,3,4$, 即

$$\beta_1=80.838\,4+3.069\,1i,\ \beta_2=83.307\,4+2.927\,2i,$$

$$\beta_3=80.930\,8+2.572\,1i,\ \beta_4=85.027\,2+2.969\,1i.$$

其中 BCNHA 算子的加权向量由文献 [15] 中基于正态分布的赋权方法确定为

$$v=(0.242\,9,0.514\,2,0.242\,9)^{\mathrm{T}}.$$

Step 4: 利用式 (7) 计算 β_k 的期望值 $E(\beta_k)$, $k=1,2,3,4$, 即

$$E(\beta_1)=82.373\,0,\ E(\beta_2)=84.771\,0,$$

$$E(\beta_3)=82.216\,9,\ E(\beta_4)=86.511\,8.$$

Step 5: 根据定义 4 对候选人 $X_k(k=1,2,3,4)$ 进行排序, 有 $X_4\succ X_2\succ X_1\succ X_3$, 因此最合适的办公室主任为 X_4.

从文献分析可知, 针对准则值为区间数的群体决策问题的研究甚少. 文献 [13] 针对准则值为正态分布区间数的情形, 提出了一种准则权重信息不完全确定的群决策方法. 文献 [18] 虽然探讨了群决策问题, 但没有研究准则值为区间数的情形. 文献 [19-20] 虽然研究了准则值为区间数的群决策问题, 但给出的问题条件与本文不完全相同, 文献 [19] 中给出了决策者的偏好值并利用这些偏好值求解准则权重, 文献 [20] 中的准则权重信息完全未知. 针对本文实例, 利用本文求出的准则权重和文献 [19] 的决策方法, 得到的方案排序结果与本文相同. 此外, 从算例的数据分析可知, 本文得到的结果也是合理的. 本实例可以看成是利用二元联系数对准则值为区间数而准则权重信息不完全确定的群决策问题的初步探讨.

4　结　论

本文对准则值为二元联系数而准则权重信息不完全确定的多准则群决策问题进行了研究. 针对二元联系数信息的集结问题, 重新定义了二元联系数的加性运算法则, 并给出了几种二元联系数信息算术集结算子, 即 BCNWAA 算子, BCNOWA 算子和 BCNHA 算子; 针对准则权重信息不完全的问题, 利用二元联系数准则值的方差和准则权重的随机性, 通过建立优化模型确定最优准则权重; 进而提出了一种准则值为二元联系数而准则权重信息不完全确定的群决策方法, 并详细讨论了其实现步骤. 值得指出的是, BCNHA 算子结合了 BCNWAA 算子和 BCNOWA 算子的优点, 不仅能充分考虑决策者自身的重要性程度, 而且通过对过高或过低的方案综合准则值赋予较小的权重, 能尽可能地消除实际决策过程中某些不公正因素的影响.

参考文献(References)

[1] Dubois D, Prade H. Comment on tolerance analysis using fuzzy set s and a procedure for multiple aspect decision making[J]. Int J of System Science, 1978, 9 (3): 357-360.

[2] Dubois D, Prade H. A review of fuzzy set aggregation connectives[J]. Information Science, 1985, 36(1/2): 85-121.

[3] Bonissone P P. A pattern recognition approach to the problem of linguistic approximation in system analysis[C]. Proc of the IEEE Int Conf on Cybernetics and Society. New York, 1979: 793-798.

[4] 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2000: 9-43.
(Zhao K Q. Set pair analysis and its initial application[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2000: 9-43.)

[5] Wang M W, Chen G Y. A novel coupling model for risk analysis of swell and shrinkage of expansive soils[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(7): 2854-2861.

[6] Wang W S, Jin J L, Ding J, et al. A new approach to water resources system assessment-set pair analysis method[J]. Science in China, Series E: Technological Sciences, 2009, 52(10): 3017-3023.

[7] Zhou Z. Decision support system based on Set pair analysis and its application[J]. Engineering Sciences, 2007, 5(3): 76-81.

[8] 黄德才, 赵克勤. 用联系数描述和处理网络计划中的不确定性[J]. 系统工程学报, 1999, 14(2): 115-120.
(Huang D C, Zhao K Q. Using the connection number of the SPA to express and process the uncertainties in network planning[J]. J of Systems Engineering, 1999, 14(2): 115-120.)

[9] 高淑萍, 刘三阳. 基于联系数的多资源应急系统调度问题[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(6): 113-115.
(Gao S P, Liu S Y. Scheduling problem in multi-resource emergency systems based on the connection number[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2003, 23 (6): 113-115.)

[10] 赵克勤. 二元联系数 $A+Bi$ 的理论基础与基本算法及在人工智能中的应用[J]. 智能系统学报, 2008, 3(6): 476-486.
(Zhao K Q. The theoretical basis and basic algorithm of binary connection and its application in AI[J]. CAAI Trans on Intelligent Systems, 2008, 3(6): 476-486.)

[11] 刘秀梅, 赵克勤. 基于联系数不确定性分析的区间数多属性决策[J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(5): 141-148.
(Liu X M, Zhao K Q. Multiple attributes decision-making of intervals based on analysis of the uncertainty of connection number[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2010, 24(5): 141-148.)

[12] 汪新凡. 基于联系数的纯语言多属性群决策方法[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2006, 23(6): 580-584.
(Wang X F. On method of multi-attribute group decision-making under pure linguistic information based on connection number[J]. J of Chongqing Technology and Business University: Natural Science Edition, 2006, 23(6): 580-584.)

[13] 汪新凡, 肖满生. 基于正态分布区间数的信息不完全的群决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25 (10): 1494-1498.
(Wang X F, Xiao M S. Approach to group decision making based on normal distribution interval number with incomplete information[J]. Control and Decision, 2010, 25 (10): 1494-1498.)

[14] Bissell C C, Chapman D A. Digital signal transmission[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992: 64.

[15] Xu Z S. An overview of methods for determining OWA weights[J]. Int J of Intelligent Systems, 2005, 20(8): 843-865.

[16] Kim S H, Ahn B S. Interactive group decision making procedure under incomplete information[J]. European J of Operational Research, 1999, 116 (3): 498-507.

[17] 汪泽焱, 顾红芳, 益晓新, 等. 一种基于熵的线性组合赋权法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23 (3): 112-116.
(Wang Z Y, Gu H F, Yi X X, et al. A method of determining the linear combination weights based on entropy[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2003, 23 (3): 112-116.)

[18] 徐玖平, 陈建中. 群决策理论与方法及实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 248-275.
(Xu J P, Chen J Z. The theory and methods of group decision making with its realization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 248-275.)

[19] 万树平. 权重信息不完全的区间型多属性群决策的一种新方法[J]. 计算机集成制造系统, 2009, 15(4): 726-731.
(Wan S P. New method for interval multi-attribute group decision making with incomplete attribute weights[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2009, 15(4): 726-731.)

[20] 万树平. 一种具有区间数信息的多属性大群体决策方法[J]. 模式识别与人工智能, 2011, 24(3): 340-345.
(Wan S P. A method for multi-attribute large group decision making with interval number information[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2011, 24(3): 340-345.)