

# 非均匀随机参数结构非线性响应的概率密度演化<sup>1)</sup>

陈建兵<sup>2)</sup> 张圣涵

(同济大学土木工程学院, 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘要** 首先考察了概率密度演化理论中的点演化和群演化与概率空间剖分的关系. 继而, 讨论了点集筛选的基本准则. 在此基础上推广了点集偏差的概念, 对非均匀、非正态的一般多维分布, 提出了广义 F 偏差 (GF 偏差) 的概念, 避免了偏差计算的 NP 难解问题. 探索了 GF 偏差与 EF 偏差的关系. 以 GF 偏差最小化为准则, 建议了概率空间最优剖分与点集重整的新策略. 结果表明, 上述方法能够处理包含多达数 10 个随机变量的结构动力响应概率密度演化分析问题. 最后, 指出了需要进一步研究的问题.

**关键词** 非线性结构, 随机响应, 概率密度演化理论, GF 偏差, Koksma-Hlawka 不等式

中图分类号: U260.17 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-174

## 引言

在工程实际中, 结构本身力学特性和所受载荷往往都表现出强烈的随机性<sup>[1]</sup>. 在全寿命周期中, 由于存在出现很大载荷的可能性, 结构的受力将很难避免进入非线性阶段. 因而, 随机结构非线性响应分析在结构抗灾分析与设计中至关重要. 然而, 受制于多自由度非线性系统随机动力响应分析方法的不足, 工程实践中对结构参数与激励随机性的考虑仍是相当粗疏的<sup>[2]</sup>.

为了处理问题的方便, 人们常常分别考虑随机振动与随机结构分析问题. 在随机振动中, 已经发展了矩方程、谱分析<sup>[3]</sup>与 FPK 方程等诸多方法<sup>[4-5]</sup>, 而在随机结构分析中则已发展了随机模拟方法、随机摄动技术与正交多项式展开理论等多种途径<sup>[6]</sup>. 遗憾的是, 对多自由度非线性系统, 由于非线性与随机性的耦合效应, 人们在上述两个方面不约而同地遇到了巨大困难<sup>[7-8]</sup>. 基于物理随机系统基本思想的理念为解决这一困难提供了新的途径<sup>[9-11]</sup>. 在这一基本框架下, 近十年来, 系统地研究和发展了概率密度演化理论<sup>[9]</sup>. 与 FPK 方程等经典方程不同的是, 由此提出的广义概率密度演化方程的维数不依赖于原系统的维数, 因而其求解更为方便, 不仅能够直接获得随机结构响应的概率密度函数, 而且可以同时处理结构特性与激励的随机性<sup>[10]</sup>.

在概率密度演化理论的数值求解中, 存在点演化与群演化的求解思路, 其中随机变量空间的剖分与代表点的选取具有重要意义. 本文首先考察了点演化、群演化与概率空间剖分的关系, 进而研究了随机动力学中代表点选用的基本准则. 在此基础上, 以 Koksma-Hlawka 不等式的推广为基础, 对非均匀、非正态的一般分布, 建议了广义 F 偏差 (GF 偏差) 并探索了它与 EF 偏差的关系. 基于 GF 偏差, 建议了新的点集重整方法, 从而有效地提高了结构非线性随机响应概率密度演化分析的精度和效率.

## 1 概率密度演化理论基础

### 1.1 广义概率密度演化方程

不失一般性, 考虑一个多自由度非线性系统, 其运动方程为

$$M\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}\xi(t) \quad (1)$$

式中,  $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$  和  $\mathbf{X}$  分别为结构的  $n$  维加速度、速度和位移向量,  $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  为结构内力向量, 包括非线性恢复力和阻尼力,  $\mathbf{F}$  为  $n \times r$  阶激励位置矩阵,  $\xi(t)$  为  $r$  维激励向量. 若激励为地震动加速度过程, 则  $\mathbf{F}\xi(t) = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{\mathbf{X}}_g(t)$ , 其中  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$  为  $n$  阶列向量, 此时  $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$  和  $\mathbf{X}$  分别为相对加速度、相对速度和相对位移.

前已提及, 在工程实际中, 结构的力学参数与

2013-06-07 收到第 1 稿, 2013-08-14 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11172210) 和上海市曙光计划 (11SG21) 资助项目.

2) 陈建兵, 教授, 主要研究方向: 随机动力学、地震工程与结构可靠度. E-mail: chenjb@tongji.edu.cn

外部激励都可能具有强烈的随机性. 这些随机性可以通过系统中的基本随机变量加以刻画. 例如, 采用物理随机模型<sup>[12]</sup>或数学分解表达<sup>[13]</sup>, 可以将随机过程表示为基本随机变量的函数. 为方便计, 以随机向量  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$  记系统的力学参数与激励中的基本随机变量, 其中  $s$  为系统中随机变量的总个数, 其联合概率密度函数为  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ , 分布区域 (支集) 为  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$ . 由此, 式 (1) 可写为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (2)$$

对于一般的工程问题, 在给定初始条件下方程 (2) 的解答存在且唯一地依赖于随机参数向量  $\boldsymbol{\theta}$ . 更一般地, 系统的任意物理量  $\mathbf{Z}(t) = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)^T$  (例如位移、结构某点的应力或应变等, 其中  $m$  为所关心的物理量的个数) 均可表示为

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, t), \quad \dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (3)$$

由于系统中所有的随机性均来自于  $\boldsymbol{\theta}$ , 因而增广系统  $(\mathbf{Z}(t), \boldsymbol{\theta})$  是一个概率保守系统. 根据概率守恒原理的随机事件描述, 有<sup>[10]</sup>

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t \times \Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) dz d\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (4)$$

其中,  $p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$  为  $(\mathbf{Z}(t), \boldsymbol{\theta})$  的联合概率密度,  $\Omega_t \times \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  为  $t$  时刻在增广状态空间  $\Omega_Z \times \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  中与  $\Omega_0 \times \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  对应的区域, 而  $\Omega_0 \times \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  为初始空间  $\Omega_{z_0} \times \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  中的任意区域.

为简明计, 本文中仅考虑  $m = 1$  的情形. 此时,  $p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$  成为  $p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$ . 由式 (4) 经过一系列推导, 可得<sup>[14]</sup>

$$\int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} \left( \frac{\partial p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z} \right) d\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (5)$$

该式对任意  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}} \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  均成立. 因而, 进一步可得如下广义概率密度演化方程

$$\frac{\partial p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

式 (6) 的初始条件一般可取为  $p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t_0) = \delta(z - z_0) p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ , 其中  $z_0$  为  $Z$  的确定性初始值. 在此初始条件下求解式 (6), 即可进一步得到  $Z(t)$  的概率密度函数

$$p_Z(z, t) = \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} \quad (7)$$

## 1.2 点演化、群演化与概率空间剖分

最近的研究表明, 对式 (5) 或式 (6) 的求解, 存在点演化与群演化的两条思路<sup>[14]</sup>. 事实上, 由于式 (5) 对任意  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}} \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  均成立, 若  $\Omega_q, q = 1, 2, \dots, n$  构成分布空间  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  的一个剖分, 即  $\cup_{q=1}^n \Omega_q = \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  且当  $k \neq q$  时  $\Omega_k \cap \Omega_q = \emptyset$ , 则将式 (5) 中的  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  替换为  $\Omega_q$  时, 该方程亦精确成立. 记

$$p_q(z, t) = \int_{\Omega_q} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} \quad (8)$$

式 (5) 成为

$$\frac{\partial p_q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega_q} \dot{Z}(\boldsymbol{\theta}, t) p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (9)$$

其中  $q = 1, 2, \dots, n$ .

对式 (8) 两边关于  $z$  积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_q(z, t) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\Omega_q} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} \right) dz = \\ &= \int_{\Omega_q} \left( \int_{-\infty}^{\infty} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) dz \right) d\boldsymbol{\theta} = \\ &= \int_{\Omega_q} p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

进一步记

$$P_q = \int_{\Omega_q} p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (11)$$

可见  $P_q = \int_{-\infty}^{\infty} p_q(z, t) dz = \int_{\Omega_q} p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = Pr\{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_q\}$ , 这里  $Pr\{\cdot\}$  表示随机事件的概率. 这说明,  $P_q$  既是密度函数  $p_q(z, t)$  的总“质量”, 也是剖分子域  $\Omega_q$  上的概率测度, 故称之为赋得概率. 显然,  $\sum_{q=1}^n P_q = 1$ .

若进一步记  $\bar{p}_q(z, t) = p_q(z, t) / P_q$ , 则有  $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_q(z, t) dz = 1$ , 而式 (7) 则成为

$$\begin{aligned} p_Z(z, t) &= \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} = \\ &= \sum_{q=1}^n \int_{\Omega_q} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} = \sum_{q=1}^n P_q p_q(z, t) = \\ &= \sum_{q=1}^n P_q \bar{p}_q(z, t) \end{aligned} \quad (12)$$

可见,  $\bar{p}_q(z, t)$  可认为是由剖分子域  $\Omega_q$  决定的子概率密度函数, 而赋得概率  $P_q$  则具有权重的意义.

若直接精确地求解式 (9), 则需要某种途径能够完全地获取剖分子域  $\Omega_q$  内的全部信息, 因而, 这一途径可以称之为群演化. 一个较为简化的求解途径是, 在每一个剖分子域  $\Omega_q$  内, 选取一个代表性点  $\theta_q \in \Omega_q$ , 其赋得概率为  $P_q$ , 此时式 (9) 成为

$$\frac{\partial p_q(z, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\theta_q, t) \frac{\partial p_q(z, t)}{\partial z} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

这一思路, 是以代表点  $\theta_q$  来近似刻画  $\Omega_q$  的全部信息, 因而可以称之为点演化的途径. 值得指出的是, 代表点  $\theta_q$  和赋得概率  $P_q$  与代表性区域  $\Omega_q$  密切相关. 例如, 对于给定的点集, 其代表性区域可取 Voronoi 区域 [15]. 由此可见, 代表点集及其赋得概率的优选, 本质上是概率空间的最优剖分问题.

迄今为止, 关于上述广义概率密度演化方程的求解方法主要是基于点演化求解思路.

## 2 随机动力学分析中的代表点筛选准则

式 (7) 在形式上类似于高维积分

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (14)$$

其中,  $w(\mathbf{x}) \geq 0$  为权函数,  $d$  为积分的维数,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  为  $d$  维向量. 因此, 在高维数值积分中行之有效的一系列数值方法有望在上述问题中得到应用. 事实上, 近年来稀疏网格点、完全对称点等高维数值积分选点方法已经在随机动力学问题中展现了较好的应用前景 [16].

虽然如此, 式 (7) 和式 (14) 存在重要的区别: 在形式上, 式 (7) 给出的结果是一条曲线, 而式 (14) 给出的结果是单个数值. 上述直观的差异可以通过引入积分的秩这一概念加以严格说明. 在文献 [17] 中, 定义积分的秩为表达式中关于基本变量积分的最高幂次, 它也是数值积分的代数表达式中权重系数的最高幂次. 例如, 对于式 (14), 常用的数值积分表达式为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^N a_k f(\mathbf{x}_k) \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{x}_k (k = 1, 2, \dots, N)$  为确定性点,  $a_k$  为相应权重.  $\mathbf{x}_k$  和  $a_k$  可以通过积分的代数精度或点集偏差确定 (例如 Gauss-Hermite 积分点或数论方法). 该式关于权重  $a_k (k = 1, 2, \dots, N)$  的最高幂次为 1, 因而式 (14) 是秩为 1 的积分.

考虑随机过程  $Z(t)$  的标准差

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [z - \mu_Z(t)]^2 p_Z(z, t) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\theta} z^2 p_{Z\theta}(z, \theta, t) dz d\theta - \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\theta} z p_{Z\theta}(z, \theta, t) dz d\theta \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

其积分的秩为 2. 有意思的是, 式 (16) 中第 2 行的第 1 项是计算  $Z(t)$  的均方值, 这是  $Z(t)$  的二阶矩, 但该项积分的秩为 1 而不是 2. 可见, 为了确定积分的秩, 方程应变换成不可约积分的形式. 事实上, 可以证明,  $n$  阶原点矩的计算中积分的秩均为 1, 而  $n$  阶中心矩的计算则秩为  $n$ . 根据特征函数理论可以证明, 对一般分布, 式 (7) 本质上是秩为  $\infty$  的积分 [17].

将式 (15) 代入式 (16), 有

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2(t) &\approx \tilde{\sigma}_Z^2(t) = \sum_{k=1}^N a_k \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_k(z, t) dz - \\ &= \left( \sum_{k=1}^N a_k \int_{-\infty}^{\infty} z p_k(z, t) dz \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N a_k v_k^2(t) - \left( \sum_{k=1}^N a_k \mu_k(t) \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $v_k^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_k(z, t) dz$ ,  $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} z p_k(z, t) dz$ .  $p_k(z, t)$  表示  $p_{Z\theta}(z, \theta_k, t)$ . 从式 (17) 可见, 其权重的最高次数为 2, 与积分 (16) 的秩相同. 进一步地, 考虑  $p_k(z, t) = \delta(z - z_k)$ , 式 (17) 可写为 [17]

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_Z^2(t) &= \sum_{k=1}^N a_k z_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N a_k z_k \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l>k}^N a_k a_l (z_k - z_l)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

由概率论可知,  $\sigma_Z^2(t) = E\{[Z(t) - \mu_Z(t)]^2\} \geq 0$ . 因此, 作为近似解的式 (18) 需满足必要条件

$$\tilde{\sigma}_Z^2(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l>k}^N a_k a_l (z_k - z_l)^2 \geq 0 \quad (19)$$

弱条件: 令  $c^2 = c_{kl}^2 = (z_k - z_l)^2 \geq 0$ , 不等式 (19) 成为  $\sum_{k=1}^N \sum_{l>k}^N a_k a_l \geq 0$ . 由  $\sum_{k=1}^N a_k = 1$  可得  $\left( \sum_{k=1}^N a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{l>k}^N a_k a_l = 1$ . 因而, 在此情况下不等式 (19) 成立的必要条件为

$$\psi = \sum_{k=1}^N a_k^2 \leq 1 \quad (20)$$

此即文献 [17] 所指出的必要条件.

**强条件:** 在不等式 (19) 中, 令  $z_k = b, z_l = 0$ . 对任意  $l \neq k$ , 有

$$\tilde{\sigma}_Z^2(t) = \sum_{l=1, l \neq k}^N a_k a_l b^2 = b^2 a_k \sum_{l=1, l \neq k}^N a_l = b^2 a_k (1 - a_k) \quad (21)$$

因而, 在此情况下不等式 (19) 成立的必要条件是

$$0 \leq a_k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

可以看出, 对于不等式 (19), 这也是充分条件.

显然, 若条件 (22) 满足, 则条件 (20) 必满足, 但反之不然. 因此, 不等式 (20) 是较弱的必要条件, 而不等式 (22) 是较强的必要条件. 有意思的是, 条件 (22) 给出的权重全部为正这一基本要求恰与概率应该为正这一直观概念一致.

值得指出, 在高维数值积分中, 有一些高效积分算法, 如稀疏网格点法 [18] 和完全对称点法 [19], 均不满足条件 (22), 即其权重并非全部为正. 事实上, 为了获取具有一定代数精度的高效积分格式, 出现负的权重甚至是必要的. 此时, 这些积分公式原则上仅适用于秩为 1 的积分, 而不适用于随机动力学问题中常出现的秩大于 1 的积分. 在当前的应用中 [16,18], 人们尚未意识到此, 因而往往不加选择地直接采用, 由此可能导致错误的结果. 在一般情况下, 若以条件 (20) 作为筛选这些积分公式是否适用于随机动力学分析问题的准则, 则尽管条件 (22) 可能不满足, 其误差一般亦在可接受的范围内 [17].

注意到式 (12) 与式 (15) 的类似性, 当条件 (22) 得到满足时, 赋得概率在某种意义上与高维积分中的权重起着类似的作用.

### 3 点集偏差及其改进

前已指出, 在具有代数精度的高维数值积分中, 大部分积分公式的权重出现负值. 迄今仅对正态分布情况存在拟对称点法, 其权重全部为正 [20], 可在随机动力学问题中取得良好效果 [17]. 在高维数值积分中, 具有确定性精度估计的另一类重要方法以偏差理论为基础, 其权重通常全部为正, 这类方法的重要代表是数论方法.

对于均匀分布的情况, 可定义如下偏差 [21]

$$D(\mathcal{P}_n) = \sup_{x \in C^s} \left| \frac{N(\mathcal{P}_n, [\mathbf{0}, \mathbf{x}])}{n} - V([\mathbf{0}, \mathbf{x}]) \right| \quad (23)$$

其中,  $\mathcal{P}_n = \{\mathbf{x}_q = (x_{q,1}, x_{q,2}, \dots, x_{q,s}), q = 1, 2, \dots, n\}$  表示由  $s$  维单位超立方体  $C^s = [0, 1]^s$  中的  $n$  个点构成

的点集,  $N(\mathcal{P}_n, [\mathbf{0}, \mathbf{x}])$  为散布在高维长方体  $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$  中的点数,  $V([\mathbf{0}, \mathbf{x}]) = \prod_{j=1}^s x_j$  为高维长方体  $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$  的体积. 直观上, 上述偏差可用来衡量点集的均匀性. 更重要的是, 通过 Koksma-Hlawka 不等式, 上述偏差决定了关于单位超立方体上有界变差函数  $f$  的数值积分误差界 [21]

$$\left| \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n f(\mathbf{x}_q) \right| \leq D(\mathcal{P}_n) V(f) \quad (24)$$

其中  $V(f)$  是  $f$  的总变差. 由此可见, 点集偏差越小, 上述积分公式精度越高.

对非均匀分布, 可以采用 F 偏差 [22]

$$D_F(\mathcal{P}_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}^s} |F_n(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})| \quad (25)$$

式中,  $F(\mathbf{x})$  为随机向量  $\mathbf{X}$  的分布函数,  $F_n(\mathbf{x})$  为阶跃式经验分布函数

$$F_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n I\{\mathbf{x}_q \leq \mathbf{x}\} \quad (26)$$

其中,  $I\{\cdot\}$  为示性函数, 当括号内事件为真时其值为 1, 反之为 0. 显然, 对均匀分布的情况, 式 (25) 退化为式 (23).

式 (26) 中所有点的权重均为  $1/n$ . 由于点集通常并不是均匀散布的, 这一定义方式不尽合理. 为此, 引入点集赋得概率的影响, 可将经验分布函数修正为 [15]

$$\tilde{F}_n(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^n P_q \cdot I\{\mathbf{x}_q \leq \mathbf{x}\} \quad (27)$$

其中  $P_q$  为式 (11) 定义的赋得概率.

将式 (25) 中的经验分布函数  $F_n(\mathbf{x})$  代之以修正的经验分布函数  $\tilde{F}_n(\mathbf{x})$ , 可得

$$D_{EF}(\mathcal{P}_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}^s} |\tilde{F}_n(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})| \quad (28)$$

称之为 EF 偏差.

已经证明, 当基本随机变量是均匀分布但考虑赋得概率影响时, 对 EF 偏差, Koksma-Hlawka 不等式 (24) 可以推广为 [23]

$$\left| \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{q=1}^n P_q f(\mathbf{x}_q) \right| \leq D_{EF}(n) V(f) \quad (29)$$

可见, EF 偏差越小, 则精度越高, 因而点集越佳.

遗憾的是, 与偏差  $D(\mathcal{P}_n)$  及 F 偏差  $D_F(\mathcal{P}_n)$  的计算类似, EF 偏差的计算量随着基本变量维数的增加呈指数增长, 是一个 NP 难解问题 [24]. 为此, 进一步定义 GF 偏差为

$$D_{GF}(\mathcal{P}_n) = \max_{1 \leq i \leq s} \{D_{F,i}(\mathcal{P}_n)\} \quad (30)$$

式中,  $D_{F,i}(\mathcal{P}_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}_{n,i}(x) - F_i(x)|$  为第  $i$  个随机变量  $X_i$  的边缘偏差, 其中  $F_i(x)$  为第  $i$  个随机变量  $X_i$  的边缘概率分布函数.  $\tilde{F}_{n,i}(\mathbf{x})$  为考虑赋得概率影响的边缘经验分布函数

$$\tilde{F}_{n,i}(x) = \sum_{q=1}^n P_q \cdot I\{x_{q,i} \leq x\} \quad (31)$$

式中,  $x_{q,i}$  是  $\mathbf{x}_q$  的第  $i$  个分量,  $P_q$  是点  $\mathbf{x}_q$  对应的赋得概率.

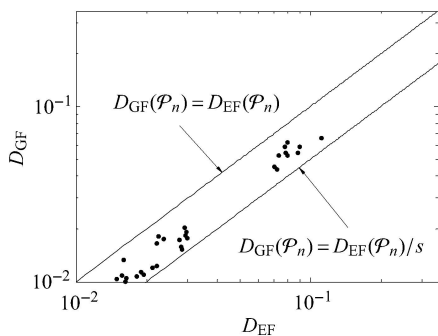
显然, GF 偏差的计算工作量仅随着维数呈线性增长, 避免了计算的指数复杂性, 从而极大地提高了点集选取的计算效率. 特别地, 根据上述定义式 (28) 和 (30), 容易证明

$$D_{GF}(\mathcal{P}_n) \leq D_{EF}(\mathcal{P}_n) \quad (32)$$

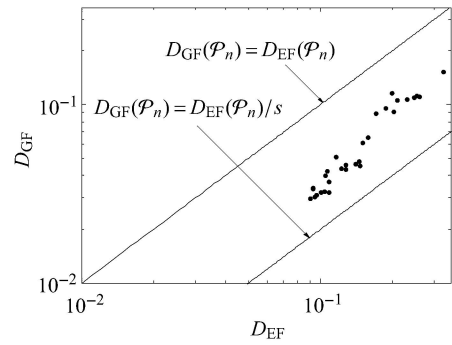
另一方面, 根据实际计算经验, 推测

$$D_{EF}(\mathcal{P}_n) \leq s D_{GF}(\mathcal{P}_n) \quad (33)$$

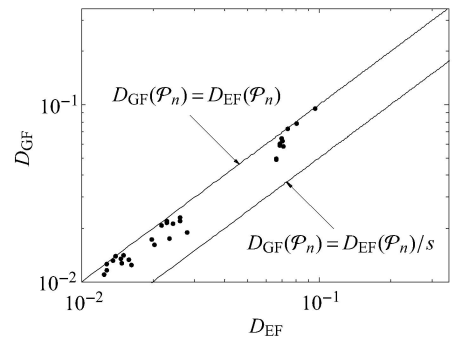
在文献 [23] 中, 对基本变量为均匀分布的情况, 给出了不等式 (32) 的证明, 并通过数值结果验证了不等式 (33) 的合理性. 数值结果表明, 对基本变量为非均匀分布的情况, 不等式 (33) 也是合理的. 图 1 给出了基本变量为极值 I 型分布和对数正态分布时 GF 偏差与 EF 偏差的若干数值结果. 由此可见, 对于给定



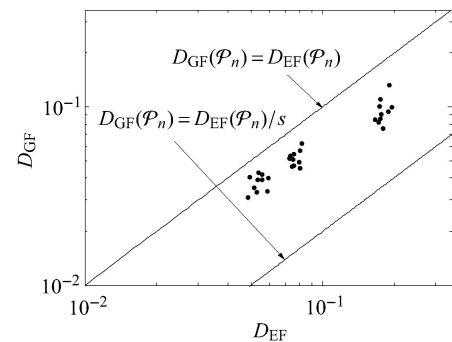
(a) 极值 I 型分布 ( $s = 2$ )  
(a) Extreme value type I distribution ( $s = 2$ )



(b) 极值 I 型分布 ( $s = 5$ )  
(b) Extreme value type I distribution ( $s = 5$ )



(c) 对数正态分布 ( $s = 2$ )  
(c) Lognormal distribution ( $s = 2$ )



(d) 对数正态分布 ( $s = 5$ )  
(d) Lognormal distribution ( $s = 5$ )

图 1 不同点集 EF 偏差和 GF 偏差的关系

Fig. 1 The pair of EF and GF discrepancy of different point sets in logarithmic coordinate system

的维数  $s$ , EF 偏差与 GF 偏差具有等价性. 由式 (29) 和 (33), 对一般的非均匀分布, 有

$$\left| \int_{\Omega_x} f(x)p(x)dx - \sum_{q=1}^n P_q f(x_q) \right| \leq s D_{GF}(n) V(f) \quad (34)$$

因而可以预期, 减小点集的 GF 偏差将提高高维数值积分的精度.

值得强调，正是由于式 (31) 中引入了赋得概率，而赋得概率取决于点集的空间结构与概率空间剖分方式，换言之，它包含了各点之间的关联信息，这与 Monte Carlo 点集中一般认为各点完全独立截然不同。因而，表面上看来，GF 偏差只是反映了边缘概率信息，但事实上它通过赋得概率的引入、考虑了概率空间剖分子域对点集全局性质的依赖性，因而在某种程度上反映了不同点之间的联系与概率分布全局性质。正因为如此，采用 GF 偏差往往采用较少的点数即可获得精度较高的结果。而且，这与概率密度演化理论关注随机动力系统的全局性质恰相一致。

由此，可以发展一类以 GF 偏差最小化为目标的概率空间剖分策略。例如，可以采用遗传算法使得点集的 GF 偏差最小化，从而实现概率空间剖分的优化与点集优选。为方便计，在本文中，采用如下点集重整策略：设有初始点集，对于该初始点集坐标  $x_{p,i}$ ，进行如下变换

$$x'_{m,i} = F_i^{-1} \left( \sum_{q=1}^n P_q \cdot I\{x_{q,i} < x_{m,i}\} + \frac{1}{2} P_m \right) \quad (35)$$

其中， $m = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, s$ 。式中， $F_i^{-1}(\cdot)$  为第  $i$  个随机变量  $X_i$  边缘概率分布函数的反函数， $x'_{p,i}$  为重整后的坐标， $P_q$  为赋得概率。显然，在赋得概率不变的前提下，由此方法所得点集的 GF 偏差最小。虽然在全局上这尚非最优结果，但以下的算例表明，这一策略是简便而有效的。

#### 4 基本分析步骤

根据上述思路，对一个复杂非线性系统进行响应概率密度演化分析的基本步骤是：

(1) 对于基本参数分布类型，给定初始点集。通常，在 20 个左右随机变量时，初始点集中点的数目在 200~500 个之间即可；

(2) 针对上述初始点集，进行概率空间剖分，并由式 (11) 计算赋得概率。一般情况下，代表性区域  $\Omega_q$  是非规则的，获得赋得概率的精确值较为困难，可以采用数值方法计算赋得概率。计算经验表明，分析结果的精度关于赋得概率的计算精度具有较好的稳健性；

(3) 采用优化算法获得 GF 偏差最小化的点集。在本文中，直接由式 (35) 的点集重整变换获得新的点集；

(4) 采用新的点集作为代表性点集，进而求解广义概率密度演化方程，实现结构非线性响应的概率

密度演化分析。具体步骤可参见文献 [9-10]。

#### 5 工程实例分析

考察一个 10 层剪切型结构的随机地震响应分析。本文仅考虑具有随机参数的结构在确定性激励作用下的随机响应分析问题。图 2 为 10 层剪切型框架结构，各层集中质量与层间剪切刚度均为随机变量。结构各层集中质量的均值从底层到顶层依次为 3.5, 3.3, 3.0, 2.7, 2.7, 2.7, 2.7, 2.7, 2.7 和 2.7 (单位为  $10^5$  kg)，刚度均值从底层到顶层依次为 3.6, 3.9, 3.9, 3.9, 3.9, 3.9, 3.9, 3.9 和 3.6 (单位为  $10^5$  kN/m)。设各层质量服从对数正态分布，刚度服从极值 I 型分布，合计共 20 个随机变量，所有随机变量均认为独立且变异系数均取 0.2。在结构响应的概率密度演化分析中，通过本文所建议的点集重整方法，基于 Sobol 点集选取 256 个点作为初始点集。恢复力滞回关系采用 Bouc-Wen 模型 [25]，其中模型的参数取值为  $A = 1$ ,  $n = 1$ ,  $q = 0.25$ ,  $p = 1000$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\phi = 0.05$ ,  $d_\phi = 5$ ,  $d_v = 2000$ ,  $d_\eta = 2000$ ,  $\zeta = 0.99$ ,  $\beta = 30$  和  $\gamma = 10$ 。典型的恢复力滞回曲线见图 3，从

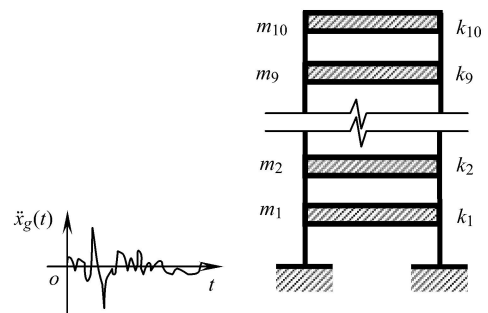


图 2 10 层剪切框架

Fig. 2 Shear frame structure

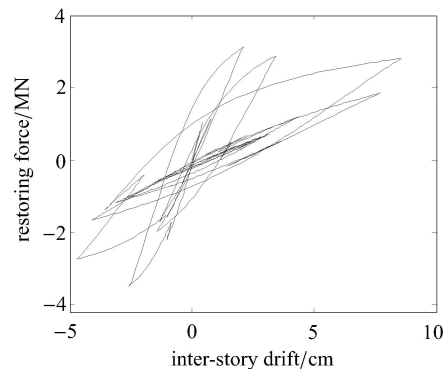
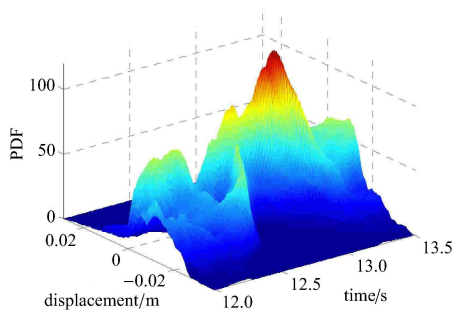


图 3 典型恢复力曲线

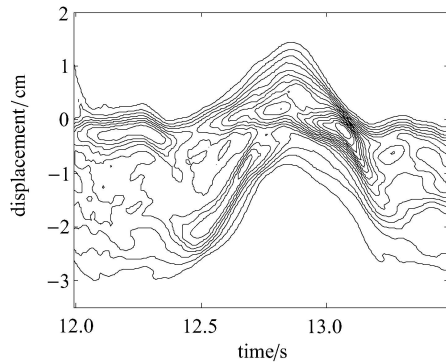
Fig. 3 A typical sample of the restoring force vs. inter-story drift

中可见结构已经进入严重的非线性状态. 采用 Rayleigh 阻尼矩阵  $C = aM + bK$ , 其中  $a = 0.3$ ,  $b = 0.01$ ,  $M$  和  $K$  分别为质量和刚度矩阵. 地震动激励采用 El Centro 波的东西分量. 考察的物理量为底层层间位移.

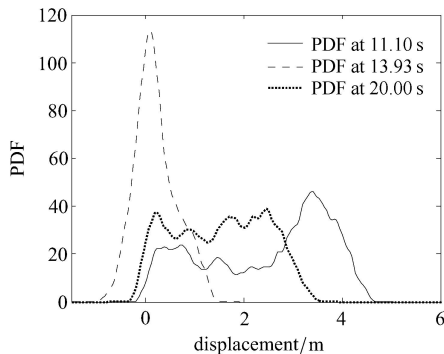
图 4(a) 和图 4(b) 是本文方法获得的概率密度函数及其等值线随时间的变化. 图 4(c) 和图 4(d) 为 3 个典型时刻的概率密度函数和概率分布函数. 图 4(d) 中还给出了通过 99 999 次 Monte Carlo 模拟获得的经验分布函数 (标为 MCS). 从这些图中可见, 随机结构非线性响应的概率密度演化过程既表现出一定的复



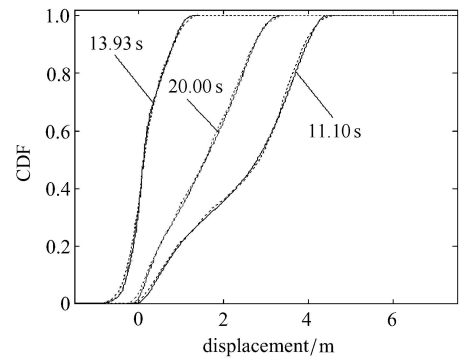
(a) 概率密度随时间变化  
(a) The PDF surface



(b) 概率密度曲面的等高线图  
(b) The contour to the PDF surface



(c) 3 个典型时刻概率密度函数  
(c) PDFs at 3 typical instants of time



(d) 3 个典型时刻分布函数 (实线: MCS; 虚线: PDEM)  
(d) CDFs at 3 typical instants of time  
(solid line: MCS; dotted line: PDEM)

图 4 底层位移的概率信息

Fig. 4 The PDFs and CDFs of the displacement of the first floor

杂性, 又具有明显的规律性. 从图 4(d) 的概率分布函数与经验分布函数对比来看, 本文方法获得的结果具有较高的精度.

在获得概率密度函数之后, 可以方便地得到响应的二阶统计量. 为了进一步考察本文方法的精度, 将本文方法得到的二阶统计量与 Monte Carlo 模拟 (99 999 次) 的结果进行了对比. 为此, 定义 2 范数相对误差为

$$\left. \begin{aligned} e_{\|\mu\|} &= \frac{\|\mu_{\text{PDEM}}(t) - \mu_{\text{MCS}}(t)\|_2}{\|\mu_{\text{MCS}}(t)\|_2} \\ e_{\|\sigma\|} &= \frac{\|\sigma_{\text{PDEM}}(t) - \sigma_{\text{MCS}}(t)\|_2}{\|\sigma_{\text{MCS}}(t)\|_2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

在本算例中, 采用概率密度演化理论仅需要进行与 256 次确定性分析相当的工作量即可获得概率密度函数的解答. 图 5 给出了采用概率密度演化理论 (PDEM)、256 次 Monte Carlo 模拟 (与 PDEM 计算工作量相当) 及 99 999 次 Monte Carlo 模拟结果的对比. 表 1 进一步给出不同数目点集相对误差的对比 (以 99 999 次 Monte Carlo 模拟的结果为基准). 值得注意, 由于 Monte Carlo 模拟的随机收敛性, 其结果的误差是随机的, 在这里对于相同数目点集进行了 10 轮 Monte Carlo 模拟, 并取具有 95% 保证率的误差数值列入表中. 从中可见本文建议的方法不仅能够直接得到概率密度函数, 而且在同等计算工作量情况下显著提高了分析结果的稳健性与精度, 其响应均值的精度提高了一个数量级、响应标准差的误差降低了 3~4 倍. 而采用 Monte Carlo 模拟方法将精度提高一个数量级, 其计算量通常需要增大 100 倍. 由此可见本文建议方法的显著优越性. 同时, 从表 1 中

可以清晰地看到随着 GF 偏差 (GFD) 的减小相对误差减小的趋势, 这也说明了误差估计式 (34) 的合理性.

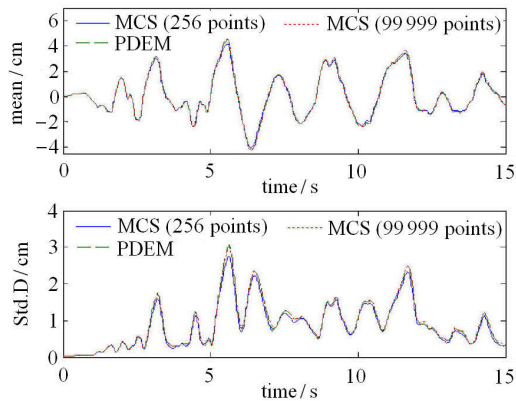


图 5 底层位移均值时程和标准差时程

Fig. 5 The mean and standard deviation

表 1 不同点集结果的相对误差

Table 1 The relative errors of different point sets

Number of points	Proposed method			Monte Carlo point set		
	error/%		GFD	error/%		GFD
	mean	Std.D.		mean	Std.D.	
128	3.26	5.91	0.0147	12.19	6.79	0.1419
256	1.62	2.35	0.0181	7.32	5.21	0.1320
512	0.38	1.48	0.0049	3.90	5.10	0.0799
1024	0.41	0.63	0.0041	3.11	2.80	0.0488
2048	0.32	0.60	0.0016	2.20	2.36	0.0401

Annotation: (1) Std.D. stands for standard deviation, GFD stands for GF-discrepancy; (2) Because the accuracy of Monte Carlo simulation is random in nature, the accuracy of Monte Carlo point set given in the table is the 95% fractile value, i.e., the mean plus 1.645 times standard deviation, based on 10 rounds of Monte Carlo simulations.

顺便指出, 当需要考虑多个物理量的联合概率密度函数时, 求解多维广义概率密度演化方程即可<sup>[26]</sup>. 本文建议的概率空间剖分与点集优选策略仍然适用. 限于篇幅, 兹不赘述.

## 6 结论

结构非线性随机响应分析对工程结构抗灾分析与设计至关重要. 概率密度演化理论为此提供了可行的途径. 其中, 多维空间的概率空间剖分与代表点选取具有重要意义. 本文讨论了概率空间剖分与点集选取的关系, 给出了代表点选取的基本准则. 进而, 对多维非均匀、非正态概率空间, 提出了点集 EF 偏差与 GF 偏差的概念, 避免了传统偏差所遇到的 NP 难

解问题. 探讨了 GF 偏差与 EF 偏差的关系, 并通过推广的 Koksma-Hlawka 不等式研究了误差界限. 在此基础上, 建议了新的点集重整技术. 算例分析结果验证了本文建议方法的有效性. 该方法不仅可以适用于随机动力学分析问题, 而且对诸多领域中广泛遇到的高维数值积分问题具有借鉴意义. 尚需要进一步研究的问题包括: (1) 非均匀、非正态的一般分布随机变量情况下 GF 偏差误差界限的严格证明; (2) 使得 GF 偏差最小化的更有效的概率空间剖分与点集重整技术.

## 参 考 文 献

- Wen YK. Reliability and performance-based design. *Structural Safety*, 2001, 23(4): 407-428
- Wen YK. Probabilistic aspects of earthquake engineering. In: Bozorgnia Y, Bertero VV, eds. *Earthquake Engineering: from Engineering Seismology to Performance-based Engineering*, Part 7. CRC Press, Boca Raton, 2004
- Lutes LD, Sarkani S. *Random Vibrations: Analysis of Structural and Mechanical Systems*. Amsterdam: Elsevier, 2004
- 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992 (Zhu Weiqiu. *Random Vibration*. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))
- 徐伟. 非线性随机动力学的若干数值方法及应用. 北京: 科学出版社, 2013 (Xu Wei. *Numerical Analysis Methods for Stochastic Dynamical Systems*. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))
- 李杰. 随机结构系统——分析与建模. 北京: 科学出版社, 1996 (Li Jie. *Stochastic Structural Systems: Analysis and Modeling*. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese))
- Schüeller GI. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1997, 12(4): 197-321
- 程长明, 彭志科, 孟光. 一类非线性系统的随机振动频率响应分析研究. *力学学报*, 2011, 43(5): 905-913 (Cheng Changming, Peng Zhike, Meng Guang. Random vibration frequency response analysis of nonlinear systems based on Volterra series. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(5): 905-913 (in Chinese))
- Li J, Chen JB. *Stochastic Dynamics of Structures*. John Wiley & Sons, 2009
- 李杰, 陈建兵. 随机动力系统中的概率密度演化方程及其研究进展. *力学进展*, 2010, 40(2): 170-188 (Li Jie, Chen Jianbing. Advances in the research on probability density evolution equations of stochastic dynamical systems. *Advances in Mechanics*, 2010, 40(2): 170-188 (in Chinese))
- Goller B, Pradlwarter HJ, Schüeller GI. Reliability analysis in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332: 2488-2499
- Li J, Yan Q, Chen JB. Stochastic modeling of engineering dynamic excitations for stochastic dynamics of structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, 27(1): 19-28
- Chen JB, Sun WL, Li J, et al. Stochastic harmonic function representation of stochastic processes. *Journal of Applied Mechanics*,



- 2013, 80(1): 011001-1-11
- 14 Li J, Chen JB, Sun WL, et al. Advances of probability density evolution method for nonlinear stochastic systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, 28: 132-142
- 15 Chen JB, Ghanem R, Li J. Partition of the probability-assigned space in probability density evolution analysis of nonlinear stochastic structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24(1): 27-42
- 16 Xiu DB. Fast numerical methods for stochastic computations. *Commun Comput Phys*, 2009, 5: 242-272
- 17 Xu J, Chen JB, Li J. Probability density evolution analysis of engineering structures via cubature points. *Computational Mechanics*, 2012, 50: 135-156
- 18 Nobile F, Tempone R, Webster CG. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, 46(5): 2309-2345
- 19 Genz A. Fully symmetric interpolatory rules for multiple integrals. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, 23(6): 1273-1283
- 20 Victorin N. Asymmetric cubature formulae with few points in high dimension for symmetric measures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2004, 42(1): 209-227
- 21 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用. 北京: 科学出版社, 1978 (Hua Loo-Keng, Wang Yuan. Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin: Springer, 1981)
- 22 方开泰, 王元. 数论方法在统计中的应用. 北京: 科学出版社, 1996 (Fang Kaitai, Wang Yuan. Number-theoretic Methods in Statistics, London, Chapman & Hall, 1994)
- 23 Chen JB, Zhang SH, Li J. Improving point selection in cubature by a new discrepancy. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2013, 35(5): A2121-A2149
- 24 Dick J, Pillichshammer F. Digital Nets and Sequences: Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- 25 Ma F, Zhang H, Bockstedte A, et al. Parameter analysis of the differential model of hysteresis. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, 71: 342-349
- 26 Chen JB, Li J. Joint probability density function of the stochastic responses of nonlinear structures. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2007, 6(1): 35-47

(责任编辑: 刘希国)

## PROBABILITY DENSITY EVOLUTION ANALYSIS OF NONLINEAR RESPONSE OF STRUCTURES WITH NON-UNIFORM RANDOM PARAMETERS<sup>1)</sup>

Chen Jianbing<sup>2)</sup> Zhang Shenghan

(State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering & School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** The probability density evolution method (PDEM) provides a feasible approach for nonlinear stochastic response analysis of multi-degree-of-freedom systems. In the present paper, the point evolution, ensemble evolution and the partition of probability-assigned space are firstly revisited. The criterion for point selection is then explored. The concept of generalized F-discrepancy (GF-discrepancy), which avoids the NP-hard problem of computation, is introduced for random variables of general non-uniform, non-Gaussian distribution as an index to measure the quality of a point set. The relationship between GF-discrepancy and EF-discrepancy is explored and the error bound is studied by the extended Koksma-Hlawka inequality. Based on the GF-discrepancy, a new strategy for point-selecting and space-partitioning is proposed. The numerical example shows that the proposed method enables highly accurate probability density evolution analysis of nonlinear structures involving dozens of non-uniform random variables. Problems to be further studied are discussed.

**Key words** nonlinear structures, stochastic response, probability density evolution method (PDEM), GF-discrepancy, Koksma-Hlawka inequality

Received 7 June 2013, revised 14 August 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11172210) and the Shuguang Program of Shanghai City (11SG21).

2) Chen Jianbing, professor, research interests: stochastic dynamics, earthquake engineering and structural reliability theory and applications.

E-mail: chenjb@tongji.edu.cn