文章编号: 1001-0920 (2013) 12-1843-06

具有幂指数律重合性的GM(1,1) 幂模型

王正新

(浙江财经大学 经济与国际贸易学院，杭州 310018)

摘　要: 针对传统GM(1,1) 幂模型不具备幂指数律重合性的问题, 分别从灰导数和背景值两个方面改进GM(1,1) 幂模型的灰色微分方程, 提出了两种具有幂指数律重合性的GM(1,1) 幂模型并从理论上加以证明. 通过变换将两个具有幂指数律的灰色微分方程转化成完全一致的形式, 在此基础上进行参数估计. 数值模拟和应用实例表明, 具有幂指数律重合性的GM(1,1) 幂模型能够有效地提高模型的模拟和预测精度.

关键词: 灰色系统；GM(1,1) 幂模型；幂指数律重合性；预测

中图分类号: N941.5　　**文献标志码:** A

GM(1,1) power model with power exponential law coincidence

WANG Zheng-xin

(School of Economics & International Trade，Zhejiang University of Finance & Economics，Hangzhou 310018，China. E-mail：jenkin226@163.com)

Abstract: As the traditional GM(1,1) model does not have the property of exponential law coincidence, this paper improves the grey differential equation of GM(1,1) model from grey derivative and background value respectively. Two kinds of GM(1,1) power model with power exponential law coincidence are proposed and relevant theoretical proofs are also given. Two grey differential equations with power exponential law coincidence are transformed into exactly the same form, based on which parameters can be effectively estimated. Numerical simulation and application examples show that the simulation and prediction accuracy of GM(1,1) power model is effectively enhanced by using the proposed method.

Key words: grey system；GM(1,1) power model；power exponential law coincidence；forecasting

0 引　言

灰色预测[1]作为现代预测理论体系中一个新的分支, 以其对小样本数据建模和预测的独特优势, 逐步赢得了国内外学者的广泛认可, 其应用领域也由最初的自动化控制延伸至农业、经济、管理、能源、水文等领域. 经过30多年的发展, 灰色预测模型体系不断完善, 产生了许多有价值的研究成果[2-3], 其中绝大部分研究集中于灰色预测方法的两个主要模型, 即GM(1,1) 模型和灰色Verhulst模型. GM(1,1) 幂模型[4-5]是近几年发展起来的新型灰色预测模型, 模型中灰色作用量所含的幂指数可以灵活地决定模型的具体形式, GM(1,1) 模型和灰色Verhulst模型皆是它的特殊形式. 由于该模型对原始数据具有较好的适应性, 其预测精度也优于GM(1,1) 模型和灰色Verhulst模型. 文献[6-7] 将GM(1,1) 幂模型称为非线性灰色伯努利模型, 分别应用该模型预测了我国台湾地区的失业率和台币汇率, 取得了较好的预测效果. 文献[8] 将GM(1,1) 幂模型的应用范围拓展为非等间距序列, 并采用粒子群算法求解模型, 结果表明GM(1,1) 幂模型比灰色Verhulst模型具有更高的精度. 文献[9] 应用优化幂指数的GM(1,1) 幂模型研究了我国31个行政区工业废水排放达标率的预测和预警问题. 从误差分析角度看, 上述GM(1,1) 幂模型及其优化模型仍然含有一种来自模型内部的偏差. 文献[10] 基于误差来源分析, 提出了无偏GM(1,1) 幂模型, 并证明了无偏模型对传统模型及其本身的时间响应函数所表达的曲线进行模拟和预测具有完全重合性.

事实上, 有关灰色预测模型自身偏差的存在性及其修正问题已为学者广泛关注, 并取得了一些重要的理论成果. 文献[11] 和文献[12] 分别利用逐步优化方法对GM(1,1) 模型的背景值插值系数和灰导数进行优化, 结果表明优化模型均具有渐近白指数

收稿日期: 2012-08-30；**修回日期:** 2012-10-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71101132, 71271086).

作者简介: 王正新(1981−), 男, 副教授, 从事小样本时间序列分析、数量经济学的研究.

律吻合性, 弥补了传统GM(1,1)模型不具有白指数律重合性的缺陷. 文献[13]通过分析GM(1,1)模型对白指数序列模拟的误差, 提出了一种修正的时间响应函数及其参数估计方法, 并将改进的模型称为无偏GM(1,1)模型. 文献[14]分析了GM(1,1)模型不具有白指数律重合性的原因, 提出了背景值插值系数的精确算式, 以使模型满足白指数率重合性的性质. 文献[15]总结了无偏GM(1,1)模型的3种基本形式, 并由这3种形式推导出共同的表达式, 进而以此为基础进行参数估计. 文献[16]基于离散数据直接建模的思想, 提出了离散GM(1,1)模型及其解法, 分析了该模型与传统GM(1,1)模型的区别和联系, 结果表明离散灰色模型具有白指数律重合性的优点. 此外, 文献[17-19]以离散指数序列为原始数据构造的3种背景值也使GM(1,1)模型具备了白指数律重合性. 然而, 传统GM(1,1)幂模型并不能准确拟合其自身所描述的离散幂指数函数. 本文将分别从灰导数和背景值两个方面对GM(1,1)幂模型进行优化, 以期进一步提高模型的模拟和预测精度.

1 具有幂指数律重合性的GM(1,1)幂模型及其参数估计

1.1 传统GM(1,1)幂模型

设非负原始序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

对原始序列 $X^{(0)}$ 作一阶累加生成, 得

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$. $Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$ 为序列 $X^{(1)}$ 紧邻均值生成序列, $z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)),k=2,3,\cdots,n$.

定义 1[5] 设 $x^{(0)}(k),x^{(1)}(k),z^{(1)}(k)$ 如上所述, 称如下灰色微分方程为GM(1,1)幂模型:

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(z^{(1)}(k))^{\gamma},\ \gamma\neq 1. \tag{1}$$

根据式(1)对参数列 $(a,b)^{\mathrm{T}}$ 作最小二乘估计, 有

$$(a,b)^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{2}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^{\gamma}\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^{\gamma}\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^{\gamma}\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}.$$

定义 2[5] 设参数 a,b 如上所述, 称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b(x^{(1)}(t))^{\gamma} \tag{3}$$

为GM(1,1)幂模型白化微分方程.

取初始条件 $x^{(1)}(0)=x^{(1)}(1)$, 可得到如下时间响应式:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\Big\{\frac{b}{a}+\Big[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\Big\}^{1/(1-\gamma)}, \tag{4}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n-1$.

对 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 作一阶累减还原, 有

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k). \tag{5}$$

1.2 具有幂指数律重合性的GM(1,1)幂模型

设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成, $Y^{(1)}=(y^{(1)}(1),y^{(1)}(2),\cdots,y^{(1)}(n))$ 为 $X^{(1)}$ 的 $1-\gamma$ 次幂生成序列, 其中

$$y^{(1)}(k)=[x^{(1)}(k)]^{1-\gamma},\ k=1,2,\cdots,n,$$

则有以下两个定理成立.

定理 1 序列

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

具有GM(1,1)幂模型时间响应函数所描述的幂指数律

$$x^{(1)}(k+1)=\Big\{\frac{b}{a}+\Big[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\Big\}^{1/(1-\gamma)}$$

的充分必要条件是存在 $\lambda_1=\dfrac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1}$, 使得

$$\lambda_1[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]+a(1-\gamma)y^{(1)}(k)=b(1-\gamma), \tag{6}$$

其中 $y^{(1)}(k)=[x^{(1)}(k)]^{1-\gamma}$, $k=2,3,\cdots,n$.

证明 由于

$$y^{(1)}(k+1)=\frac{b}{a}+\Big[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak},$$

将其代入式(6)左边, 得

$$\begin{aligned}&\lambda_1[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]+a(1-\gamma)y^{(1)}(k)=\\&\lambda_1\Big[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)}(1-\mathrm{e}^{a(1-\gamma)})+\\&b(1-\gamma)+a\Big[y^{(1)}-\frac{b}{a}\Big](1-\gamma)\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)}=\\&-a\Big[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\Big](1-\gamma)\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)+b(1-\gamma)}+\\&a\Big[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\Big](1-\gamma)\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)}.\end{aligned} \tag{7}$$

由式(6)得

$$\begin{aligned}y^{(1)}(k)&=\frac{b(1-\gamma)+\lambda_1 y^{(1)}(k-1)}{\lambda_1+a(1-\gamma)}=\\&\frac{b(1-\gamma)+\dfrac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)-1}\dot{y}^{(1)}(k-1)}}{\dfrac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)-1}+a(1-\gamma)}}=\\&\frac{b}{a}+\Big[y^{(1)}(k-1)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)}.\end{aligned} \tag{8}$$

将 $k=2,3,\cdots,n$ 代入式(8), 得

$$\begin{cases} y^{(1)}(2)=\dfrac{b}{a}+\left[y^{(1)}(1)-\dfrac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)},\\ y^{(1)}(3)=\dfrac{b}{a}+\left[y^{(1)}(1)-\dfrac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-2a(1-\gamma)},\\ \qquad\vdots\\ y^{(1)}(n)=\dfrac{b}{a}+\left[y^{(1)}(1)-\dfrac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(n-1)(1-\gamma)}.\end{cases}\tag{9}$$

则

$$y^{(1)}(k+1)=\frac{b}{a}+\left[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)k},\quad k=1,2,\cdots,n-1.\tag{10}$$

即

$$x^{(1)}(k+1)=\left\{\frac{b}{a}+\left[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\right\}^{1/(1-\gamma)},\quad k=1,2,\cdots,n-1.\tag{11}$$

由此, 定理 1 得证. □

定理 1 表明, 对于具有幂指数律的原始序列 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$, 以 $\lambda_1 y^{(0)}(k)$ 作为灰导数、$y^{(1)}(k)$ 作为灰导数背景值所建立的 GM(1,1) 幂模型具有幂指数重合性.

定理 2　序列

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

具有 GM(1,1) 幂模型时间响应函数所表征的幂指数律

$$x^{(1)}(k+1)=\left\{\frac{b}{a}+\left[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\right\}^{1/(1-\gamma)}$$

的充分必要条件是存在 $\lambda_2=\dfrac{1}{a(1-\gamma)}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1}$, 使得

$$[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]+a(1-\gamma)[(1-\lambda_2)y^{(1)}(k)+\lambda_2 y^{(1)}(k-1)]=b(1-\gamma),\tag{12}$$

其中 $y^{(1)}(k)=[x^{(1)}(k)]^{1-\gamma},k=2,3,\cdots,n$.

证明　由于

$$y^{(1)}(k+1)=\frac{b}{a}+\left[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak},$$

将其代入式 (12) 左边, 得

$$\begin{aligned}&[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]+\\&a(1-\gamma)[(1-\lambda_2)y^{(1)}(k)+\lambda_2 y^{(1)}(k-1)]=\\&[1+a(1-\gamma)(1-\lambda_2)]y^{(1)}(k)+\\&[a\lambda_2(1-\gamma)-1]y^{(1)}(k-1)=\\&\left[a(1-\gamma)+\frac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1}\right]y^{(1)}(k)-\\&\frac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1}\cdot y^{(1)}(k-1)=\\&a(1-\gamma)y^{(1)}(k)+\\&\frac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1}[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]=\\&a(1-\gamma)\left\{\frac{b}{a}+\left[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)}\right\}+\\&\frac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1}\cdot\left[y^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)}(1-\\&\mathrm{e}^{a(1-\gamma)})=b(1-\gamma).\end{aligned}\tag{13}$$

由式 (12), 得

$$\begin{aligned}&[1+a(1-\gamma)(1-\lambda_2)]y^{(1)}(k)+\\&[a\lambda_2(1-\gamma)-1]y^{(1)}(k-1)=b(1-\gamma),\end{aligned}\tag{14}$$

则

$$\begin{aligned}&y^{(1)}(k)=\\&\frac{b(1-\gamma)-[a\lambda_2(1-\gamma)-1]y^{(1)}(k-1)}{1+a(1-\gamma)(1-\lambda_2)}=\\&\frac{b(1-\gamma)+\dfrac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)-1}y^{(1)}(k-1)}}{a(1-\gamma)+\dfrac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)-1}}}=\\&\frac{b}{a}+\left[y^{(1)}(k-1)-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)}.\end{aligned}\tag{15}$$

由定理 1 的证明过程可知

$$x^{(1)}(k+1)=\left\{\frac{b}{a}+\left[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\right\}^{1/(1-\gamma)},\quad k=1,2,\cdots,n-1.\tag{16}$$

由此, 定理 2 得证. □

定理 2 表明, 对于具有幂指数律的原始序列 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$, 以 $y^{(0)}(k)$ 作为灰导数、$(1-\lambda_2)y^{(1)}(k)+\lambda_2 y^{(1)}(k-1)$ 作为背景值所建立的 GM(1,1) 幂模型具有幂指数重合性.

1.3　模型的参数估计

设非负原始序列为 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, 序列 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列为 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$, 其中

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),$$

对 $X^{(0)}$ 建立 GM(1,1) 幂模型的白化微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b(x^{(1)}(t))^{\gamma}.\tag{17}$$

根据定理 1 和定理 2, 有以下两个具有幂指数律的灰色微分方程对应于式 (17):

$$\lambda_1[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]+a(1-\gamma)y^{(1)}(k)=b(1-\gamma),\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&[y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k-1)]+a(1-\gamma)[(1-\lambda_2)y^{(1)}(k)+\\&\lambda_2 y^{(1)}(k-1)]=b(1-\gamma).\end{aligned}\tag{19}$$

其中

$$\lambda_1=\frac{a(1-\gamma)}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1},\ \lambda_2=\frac{1}{a(1-\gamma)}-\frac{1}{\mathrm{e}^{a(1-\gamma)}-1},$$

$$y^{(1)}(i)=[x^{(1)}(i)]^{1-\gamma},\ k=1,2,\cdots,n.$$

由于上述两个灰色微分方程的结构较为复杂, 难以按照传统方法直接应用最小二乘法估计参数 a 和 b, 考虑先将 λ_1 和 λ_2 分别代入后再变形, 可得到如下完全一致的形式:

$$\begin{aligned}&y^{(1)}(k)=\\&\frac{b}{a}+\Big[y^{(1)}(k-1)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)}=\\&\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)}y^{(1)}(k-1)+\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)}).\end{aligned}\tag{20}$$

令 $\beta_1=\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)},\beta_2=\dfrac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)})$, 则式 (20) 可以表示为

$$y^{(1)}(k)=\beta_1y^{(1)}(k-1)+\beta_2,\ k=2,3,\cdots,n.\tag{21}$$

上述模型中的待估计参数列 $\hat{\beta}=(\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 可直接通过最小二乘原理进行估计, 即

$$\hat{\beta}_1=\frac{(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k)y^{(1)}(k-1)-}{(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}(y^{(1)}(k-1))^2-}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k)\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k-1)}{\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k-1)\Big)^2},\tag{22}$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}\sum\limits_{k=2}^{n}[y^{(1)}(k-1)]^2-}{(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}(y^{(1)}(k-1))^2-}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k)y^{(1)}(k-1)\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k-1)}{\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}y^{(1)}(k-1)\Big)^2}.\tag{23}$$

其中: $y^{(1)}(i)=[x^{(1)}(i)]^{1-\gamma},y\neq1,i=1,2,\cdots,n$. 再由 β_1,β_2 和 a,b 的关系, 可求得

$$\hat{a}=-\ln\hat{\beta}_1^{1/(1-\gamma)},\ \hat{b}=-\frac{\hat{\beta}_2}{1-\hat{\beta}_1}\ln\hat{\beta}_1^{1/(1-\gamma)}.$$

将 a,b 的估计值代入 GM(1,1) 幂模型白化方程即可解得具有幂指数律重合性的时间响应函数. 值得注意的是: 本文提出的两种具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型与文献 [10] 的无偏 GM(1,1) 幂模型完全等价, 这一点从式 (21)可以看出; 不同的是文献 [10] 采用递推解法直接求解模型, 而本文则通过估计 β_1, β_2 求出 a,b 并代入白化方程来求解模型.

在实际应用中, 幂指数 γ 取值的确定可按文献 [5] 基于灰色信息覆盖原理得到的幂指数表达式计算, 也可以在误差最小化准则下构建优化模型来实现, 具体过程类似于文献 [9] 的做法, 此处不再赘述.

2 数值模拟与应用实例

2.1 数值模拟

首先通过一个数值例子来验证传统模型固有误差的存在性和本文新模型的幂指数律重合性. 给定单峰序列 $X^{(0)}=(1,2,3,4,3,2)$, 由文献 [5] 可知, 该序列适合采用 GM(1,1) 幂模型进行模拟和预测. 按文献 [5] 的计算公式得 $\gamma=1.212\,919$, 以第 1 个数据作为初始条件可得到如下 GM(1,1) 幂模型时间响应式:

$$\begin{aligned}&\hat{x}^{(1)}(k+1)=\\&(0.539\,738\,5+0.460\,261\,5\,\mathrm{e}^{-0.603\,137k})^{-4.696\,629}.\end{aligned}$$

若以上述幂指数函数为例, 取 $k=0,1,2,3,4,5$, 则可以得到如下模拟值:

$$\hat{X}^{(0)}=(1,1.997\,9,3.227\,3,3.574\,6,3.013\,8,2.125\,1).$$

显然, 以上模拟序列 $\hat{X}^{(0)}$ 具有幂指数律. 下面分别利用传统 GM(1,1) 幂模型和本文提出的具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型对该序列再次建模.

1) 按文献 [5] 的方法, 以 $\hat{X}^{(0)}$ 为原始数据再次作 GM(1,1) 幂模型, 得到响应式为

$$\begin{aligned}&\hat{x}^{(1)}(k+1)=\\&(0.539\,088+0.460\,912\,\mathrm{e}^{-0.586\,209k})^{-4.696\,629},\\&k=0,1,2,3,4,5.\end{aligned}$$

由此得到的模拟误差如表 1 所示.

表 1 GM(1,1) 幂模型的模拟误差

	k				
	1	2	3	4	5
实际值	1.997 9	3.227 3	3.574 6	3.013 8	2.125 1
模拟值	1.927 6	3.115 6	3.507 1	3.027 8	2.190 2
残差	−0.07	−0.11	−0.07	0.01	0.07
相对误差 / %	3.519 3	3.461 5	1.889 0	0.462 6	3.061 3

由表 1 可见, GM(1,1) 幂模型对于由其本身的模拟值进行再次建模仍然存在一定的偏差, 进一步计算其平均相对误差为 2.48%.

2) 按本文方法, 以 $\hat{X}^{(0)}$ 为原始数据建立 GM(1,1) 幂模型, 得参数 $\hat{a}=-2.832\,705,\hat{b}=-1.528\,919$, 对应的时间响应式为

$$\begin{aligned}&\hat{x}(k+1)=\\&(0.539\,738+0.460\,262\,\mathrm{e}^{-0.603\,136\,8k})^{-4.696\,621\,7},\\&k=0,1,2,3,4,5.\end{aligned}$$

模拟序列为 (1,1.997 9,3.227 3,3.574 6,3.013 8,2.125 1), 与具有幂指数律的原始序列 $\hat{X}^{(0)}$ 完全一致. 可见, 本文提出的模型具有幂指数律重合性, 消除了传统 GM(1,1) 幂模型自身所固有的误差.

2.2 应用实例

工业废水排放达标率是一个典型的从发生到饱和的过程, 因此符合 GM(1,1) 幂模型的建模条件. 1998

～2005 年我国工业废水排放达标率数据如表 2 所示.

表 2　1998～2005 年我国工业废水排放达标率　%

年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
达标率	61.50	67.01	76.80	85.22	88.41	89.18	90.70	91.20

下面分别利用 GM(1,1) 幂模型和具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型对我国工业废水排放达标率进行模拟、预测, 分析比较它们的精度.

1) 基于 1998 ～ 2003 年的数据建立 GM(1,1) 幂模型, 由文献 [5] 的方法得 $\gamma = 0.225\,262$. 取 $x^{(1)}(1)$ 为初始条件, 可得到如下时间响应式:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) =$$
$$(9\,567.598\,6 - 9\,543.281\,7\,\mathrm{e}^{-0.001\,972\,387k})^{1.290\,759}.$$

2) 基于 1998 ～ 2003 年的数据建立具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型, 取 $x^{(1)}(1)$ 为初始条件, 可得到如下时间响应式:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) =$$
$$(1\,531.325\,248 - 1\,507.008\,274\,\mathrm{e}^{-0.012\,719k})^{1.290\,759},$$

累减还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k),\ k = 0, 2, \cdots, 7.$$

两种模型的模拟预测值与实际值的比较情况如表 3 所示.

由表 3 可以看出, 本文提出的具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型对 1999 ～ 2003 年的平均模拟误差小于传统模型, 对 2004 和 2005 年的预测误差也较小. 因此, 从总体上看具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型比传统 GM(1,1) 幂模型更具有优势, 其原因在于具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型消除了原模型自身所固有的偏差.

表 3　两种模型的模拟预测值与实际值比较

年份	实际值	GM(1,1) 幂模型[5]		具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型	
		模拟预测值	相对误差 / %	模拟预测值	相对误差 / %
1999	67.01	67.323 6	0.48	68.256 9	1.87
2000	76.80	76.548 0	0.33	76.815 3	0.01
2001	85.22	83.532 6	1.98	82.876 9	2.75
2002	88.41	89.236 3	0.94	87.501 4	1.02
2003	89.18	94.092 3	5.51	91.168 4	2.23
平均模拟相对误差		–	1.85	–	1.58
2004	90.70	98.338 0	8.43	94.142 4	3.80
2005	91.20	102.119 6	11.98	96.587 4	5.91

注: 1999～2003 年为模拟值, 2004 和 2005 年为预测值.

3 结　论

GM(1,1) 幂模型是经典灰色预测模型 GM(1,1) 和灰色 Verhulst 模型的拓展, 幂指数取值的多样性赋予了 GM(1,1) 幂模型形式多样性的特点, 这个特点使得该模型与传统灰色模型相比能够更好地描述现实系统. 本文提出了两种具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型及其求解方法, 为提高建模精度提供了一种有效的途径. 但是, 对于具有幂指数律重合性的 GM(1,1) 幂模型中的参数优化问题, 以及具有多变量的灰色幂模型仍然是需要进一步研究的问题.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 1-87.
(Deng J L. Grey prediction and decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002: 1-87.)

[2] Liu S F, Lin Y. Grey information theory and practical applications[M]. London: Springer-Verlag, 2006: 98-123.

[3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 67-85.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. Elements and application of grey technology[M]. Beijing: Science Press, 2005: 67-85.)

[4] 王正新. GM(1,1)模型的特性与优化研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2007.
(Wang Z X. Study on the characteristics and optimization of GM(1,1) model[D]. Nanjing: College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.)

[5] 王正新, 党耀国, 刘思峰, 等. GM(1,1)幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2380-2383.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. Solution of GM(1,1) power model and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2380-2383.)

[6] Chen C I. Application of the novel nonlinear grey Bernoulli model for forecasting unemployment rate[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37(1): 278-287.

[7] Chen C I, Chen H L, Chen S P. Forecasting of foreign exchange rates of Taiwan's major trading partners by novel nonlinear grey Bernoulli model NGBM(1,1)[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(6): 1194-1204.

[8] 李军亮, 肖新平, 廖锐全. 非等间距GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 490-495.
(Li J L, Xiao X P, Liao R Q. Non-equidistance GM(1,1) power and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(3): 490-495.)

[9] Wang Z X, Hipel K W, Wang Q, et al. An optimized NGBM(1,1) model for forecasting the qualified discharge rate of industrial wastewater in China[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(12): 5524-5532.

[10] 王正新, 党耀国, 练郑伟. 无偏GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2011, 19(4): 144-151.
(Wang Z X, Dang Y G, Lian Z W. Unbiased GM(1,1) power model and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2011, 19(4): 144-151.)

[11] 王义闹, 刘光珍, 刘开第. GM(1,1)的一种逐步优化直接建模方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(9): 99-104.
(Wang Y N, Liu G Z, Liu K D. A step by step pptimum direct modeling method of GM(1,1)[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(9): 99-104.)

[12] 王义闹, 李万庆, 王本玉, 等. 一种逐步优化灰导数白化值的GM(1,1)建模方法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(9): 128-136.
(Wang Y N, Li W Q, Wang B Y. The modeling method of GM(1,1) with a step by step optimum grey derivative's whiting value[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2002, 22(9): 128-136.)

[13] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 无偏灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(6): 6-8.
(Ji P R, Huang W S, Hu X Y. An unbiased grey forecasting mode[J]. System Engineering Theory & Practice, 2000, 22(6): 6-8.)

[14] 穆勇. 具有白指数律重合性的GM(1,1)模型[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(1):15-19.
(Mu Y. GM(1,1) with white exponential law coincidence property[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2002, 32(1): 15-19.)

[15] 穆勇. 无偏灰色GM(1,1)模型的直接建模法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(9): 1094-1097.
(Mu Y. A direct modeling method of unbiased GM(1,1)[J]. Systems Engineering and Electronics, 2003, 25(9): 1094-1097.)

[16] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)

[17] Zhou P, Wei Y. The optimization of background value in grey model GM(1,1)[J]. J of Grey System(TW), 2006, 9(2): 139-142.

[18] Li B, Wei Y. Optimized GM(1,1) grey model based on connotation expression[J]. J of Grey System(TW), 2007, 10(2): 78-81.

[19] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 61-67.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2008, 28(2): 61-67.)