

文章编号: 1001-0920(2013)12-1786-05

基于 T-S 模糊模型的 3D 刚体摆姿态控制

厉虹, 邹奎

(北京信息科技大学 自动化学院, 北京 100192)

摘要: 3D 刚体摆的倒立平衡点附近具有不稳定的流形, 针对倒立平衡位置的姿态稳定性问题, 建立 T-S 模糊模型, 并采用并行分布补偿(PDC)法和线性矩阵不等式(LMI)法探讨了闭环 T-S 模糊控制系统的稳定性. 仿真实验表明, T-S 模糊控制对 3D 刚体摆倒立平衡位置处的姿态控制是可行和有效的.

关键词: 3D 刚体摆; 姿态控制; T-S 模糊模型; PDC 法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Attitude control of a 3D rigid pendulum based on T-S fuzzy model

LI Hong, ZOU Kui

(Automation School, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China. Correspondent: LI Hong, E-mail: lihong8290@163.com)

Abstract: Because of the unstable manifolds near the inverted equilibrium, for the attitude control problems at the inverted equilibrium position, T-S fuzzy model of the 3D rigid pendulum is modeled. Then by using the method of parallel distributed compensation(PDC) and linear matrix inequalities(LMI), the stability analysis of closed-loop T-S fuzzy control systems is investigated. The simulation results show that the T-S fuzzy control technique is feasible and effective.

Key words: 3D rigid pendulum; attitude control; T-S fuzzy model; PDC method

0 引言

3D 刚体摆由一个刚体绕一固定且无摩擦的支点旋转, 刚体受到恒重力作用, 具有 3 个转动自由度, 它是一种广义的刚体摆模型. 3D 刚体摆是由美国密西根大学航空和航天工程系 McClamroch 教授领导的小组在研究三轴姿态控制平台(TACT)的过程中逐渐演变而来的^[1-3], 并于 2004 年提出了 3 自由度旋转摆(3D 刚体摆)模型的概念^[4]. 3D 刚体摆模型为非线性动力学的研究以及近年来非线性控制的研究提供了丰富的实例来源. 由于 3D 刚体摆姿态运动呈复杂的非线性特性, 其姿态控制具有很大的难度. 关于 3D 刚体摆运动模型的研究, 一般可分为轴对称和非对称两种情形. 若轴对称 3D 刚体摆绕对称轴旋转的角速度为零, 则其动力学模型可退化成 2D 球摆; 若它绕对称轴旋转的角速度为非零常数, 则其动力学模型可退化成 Lagrange 陀螺.

目前, 已经有大量文献对 2D 球摆和 Lagrange 陀螺进行了研究, 但关于 3D 刚体摆的研究还不成熟, 为

此, 本文主要研究 3D 刚体摆的姿态控制问题. 在 3D 刚体摆姿态控制的稳定性研究中, Shen 等^[4]和 Chaturvedi 等^[5]利用 Euler 姿态角建立 3D 刚体摆数学模型, 并提出了约化姿态模型; Chaturvedi 和 Bacconi 等^[6-9]采用角速度反馈方法和角速度加姿态联合反馈方法分别对 3D 刚体摆设计了悬垂和倒立平衡状态的姿态控制器. 3D 刚体摆的姿态倒立平衡稳定需采用角速度加姿态联合反馈控制, 但要设计出这样一种角速度加姿态联合反馈的控制却不容易.

目前在解决一些复杂、多变量、强耦合以及不确定的非线性系统控制问题时, 模糊控制具有很好的效果, 而且得到了广泛应用^[10]. 由于 Mamdani 模型的模糊控制在处理维数较高的复杂系统时需要很多模糊控制规则, 而设计人员很难通过经验给出这些规则; 同时, Mamdani 模型的模糊规则前后件均是用语言变量表示的模糊集合, 缺乏系统化的方法来设计 Mamdani 模型的模糊控制系统和分析该系统的稳定性. T-S 模糊控制系统是目前模糊控制领域最活跃的

收稿日期: 2012-08-16; 修回日期: 2012-12-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072038); 北京市自然科学基金重点项目 B 类(KZ201110772039).

作者简介: 厉虹(1960-), 女, 教授, 从事智能控制技术及其应用、高性能电气控制技术的研究; 邹奎(1987-), 男, 硕士生, 从事模糊控制技术及应用的研究.

一个分支, 该模型是由 Takagi 和 Sugeno 于 1985 年提出的^[11]. 近年来, 许多学者对 T-S 模糊控制系统的设计方法及稳定性进行了研究. 在 T-S 模糊模型中, 模糊规则后件是采用线性方程描述的, 因此便于采用传统线性系统的控制策略设计控制器, 也便于采用传统控制理论中分析稳定性的方法来分析模糊控制系统的稳定性^[12]. 考虑到 3D 刚体摆是一个高阶、多变量、强耦合的非线性系统, 本文建立了 3D 刚体摆的 T-S 模糊模型, 并采用并行分布补偿 (PDC) 法和线性矩阵不等式 (LMI) 方法进一步探讨了闭环 T-S 模糊控制系统的稳定性.

1 3D 刚体摆的数学模型

3D 刚体摆的示意图如图 1 所示, 它绕一固定且无摩擦的支撑点 O 进行三自由度旋转. 选择惯性坐标系 $\{OXYZ\}$, 支撑点 O 为原点, 其 Z 轴方向与重力加速度方向一致, X 和 Y 位于水平面内并与 Z 呈右手系; 选择连体坐标系 $\{OX'Y'Z'\}$, 原点仍为点 O , Z' 方向由 O 指向摆的质心 CM , X' 和 Y' 分别沿着摆惯性主轴的方向.

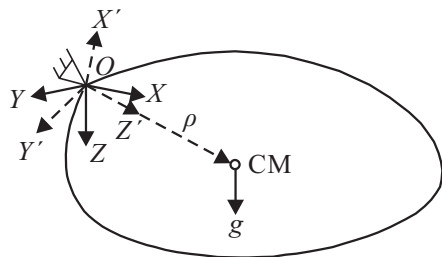


图 1 3D 刚体摆的示意图

在惯性坐标系 $\{OXYZ\}$ 下, 采用 3-2-1 欧拉姿态角描述方式, 并考虑重力矩的作用, 3D 刚体摆的数学模型为^[4]

$$J\dot{\omega} = J\omega \times \omega + m g \rho \times R^T e_3 + u, \quad (1)$$

$$\dot{R} = R\hat{\omega}. \quad (2)$$

其中: 式 (1) 为 3D 刚体摆动力学方程, 式 (2) 为运动学方程; $J = \text{diag}(J_i)$ 是 3D 刚体摆的惯量矩阵, $i = 1, 2, 3$; m 是 3D 刚体摆的质量; g 是重力加速度; ρ 是原点 O 与质心 CM 之间构成的向量; e_3 为惯性坐标系 $\{OXYZ\}$ 中 Z 轴方向上的单位向量, $e_3 = (0, 0, 1)^T$; $\omega \in R^3$ 是 3D 刚体摆的角速度, 控制量 $u \in R^3$ 是输入控制力矩, R 是旋转矩阵. 对于向量 a 和 $b \in R^3$, 叉乘符号 $a \times b$ 表示为

$$a \times b = \hat{a}b, \quad (3)$$

其中斜对称矩阵 \hat{a} 定义为

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

若令 $\Gamma = R^T e_3$, 则 3D 刚体摆可描述为如下约化姿态的形式:

$$J\dot{\omega} = J\omega \times \omega + m g \rho \times \Gamma + u, \quad (4)$$

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \times \omega. \quad (5)$$

由式 (4) 和 (5) 可知, 3D 刚体摆平衡状态为^[5] $\omega_e = (0, 0, 0)^T$, $\Gamma_e = (0, 0, \pm 1)^T$. 如果 3D 刚体摆达到平衡状态时质心 CM 位于支点 O 的上方, 则此平衡状态为倒立平衡, 即 $\Gamma_i = -\rho/\|\rho\| = (0, 0, -1)^T$, 因为倒立平衡点附近具有不稳定的流形, 所以倒立平衡点是不稳定的; 如果质心 CM 位于支点 O 的下方, 则此平衡状态为悬垂平衡, 即 $\Gamma_h = \rho/\|\rho\| = (0, 0, 1)^T$, 因为悬垂平衡点附近的流形均是稳定的, 所以悬垂平衡点是 Lyapunov 稳定的. 控制的目标是设计控制器使 3D 刚体摆稳定在倒立或悬垂平衡的状态.

2 3D 刚体摆 T-S 模糊模型

2.1 T-S 模糊控制系统模型

用 R_i 表示模糊系统的第 i 条规则, 则 T-S 模糊控制系统的模型可描述为^[11]

$$R_i : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i,$$

$$\text{Then } \dot{x} = A_i x + B_i u. \quad (6)$$

其中: $x_i(t)$ 和 F_k^i ($i = 1, 2, \dots, l, k = 1, 2, \dots, n$) 分别为模糊系统的输入状态变量和模糊集合; $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为模糊系统的状态向量. 采用单点模糊法、Sum-Product 推理、重心法去模糊, 模糊控制系统总体模型为

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l w_i \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^l w_i}, \quad (7)$$

其中 $w_i = \prod_{k=1}^n F_k^i(x_k(t))$ 为第 i 条规则的激活度. 令 $h_i = w_i / \sum_{j=1}^l w_j$, 则上式可以写成

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i \{A_i x(t) + B_i u(t)\}. \quad (8)$$

针对式 (6) 所示的 T-S 模糊控制系统, 文献 [13] 采用并行分布补偿原理, 其基本思想是对式 (6) 的每个子系统分别设计如下局部控制器:

$$u = -K_i x. \quad (9)$$

各个局部控制器共享式 (6) 的前件, 然后合成总的模糊控制器, 即

$$R_i : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i,$$

$$\text{Then } u = -K_i x, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (10)$$

模糊控制器的总体模型为

$$u(t) = - \sum_{i=1}^l h_i K_i x. \quad (11)$$

将式(11)代入(8),可得闭环 T-S 模糊控制系统的总体模型为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l h_i h_j (A_i - B_i K_j) x(t). \quad (12)$$

定理 1 对于式(6)所示的模糊控制系统,采用式(10)所示的模糊控制器,则闭环 T-S 模糊控制系统(12)在平衡点大范围渐近稳定的充分条件是存在一个公共正定的矩阵 P , 对所有的子系统都满足以下 2 个条件:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) < 0. \quad (14)$$

其中: $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, $i, j = 1, 2, \dots, l$. 特别地, 当 $B_1 = B_2 = \dots = B_l = B$ 时, 式(12)可等效为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i (A_i - B K_i) x(t). \quad (15)$$

此时, 闭环 T-S 模糊控制系统(15)在平衡点大范围渐近稳定的充分条件是存在一个公共正定的矩阵 P , 对所有的子系统只需满足式(13)即可^[13].

2.2 3D 刚体摆 T-S 模型的建立

T-S 模糊模型是一个通用逼近器, 它将一个非线性系统当作多个线性子系统与其权重乘积之和. T-S 模糊模型的获取有两种途径: 一是通过系统输入输出数据辨识; 另一种是通过物理模型进行机理建模. 由于已经获得 3D 刚体摆约化姿态数学模型, 本文主要考虑通过物理模型进行机理建模的方法获取 3D 刚体摆的 T-S 模糊模型.

令 $\Delta \Gamma = \Gamma - \Gamma_e$, $x_1 = \omega_1$, $x_2 = \omega_2$, $x_3 = \omega_3$, $x_4 = \Delta \Gamma_1$, $x_5 = \Delta \Gamma_2$, $x_6 = \Delta \Gamma_3$, 将 3D 刚体摆约化姿态数学模型式(4)和(5)展开, 可得 3D 刚体摆平衡位置处的误差方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1} x_2 x_3 - \frac{mgl}{J_1} x_5 + \frac{1}{J_1} u_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2} x_1 x_3 + \frac{mgl}{J_2} x_4 + \frac{1}{J_2} u_2, \\ \dot{x}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3} x_1 x_2 + \frac{1}{J_3} u_3, \\ \dot{x}_4 = x_3 x_5 - x_2 (x_6 + \lambda), \\ \dot{x}_5 = x_1 (x_6 + \lambda) - x_3 x_4, \\ \dot{x}_6 = x_2 x_4 - x_1 x_5. \end{cases} \quad (16)$$

当 $\lambda = 1$ 时, 式(16)为悬垂平衡处的误差方程; 当 $\lambda = -1$ 时, 式(16)为倒立平衡处的误差方程. 误差方程(16)可以写成

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (17)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_2 - J_3}{2J_1} x_3 & \frac{J_2 - J_3}{2J_1} x_2 \\ \frac{J_3 - J_1}{2J_2} x_3 & 0 & \frac{J_3 - J_1}{2J_2} x_1 \\ \frac{J_1 - J_2}{2J_3} x_2 & \frac{J_1 - J_2}{2J_3} x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & \frac{1}{2} x_5 \\ \lambda & 0 & -\frac{1}{2} x_4 \\ -\frac{1}{2} x_5 & \frac{1}{2} x_4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{mgl}{J_1} & 0 \\ \frac{mgl}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} x_3 & -x_2 \\ -\frac{1}{2} x_3 & 0 & x_1 \\ -\frac{1}{2} x_2 & \frac{1}{2} x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1/J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3D 刚体摆状态方程(17)共有 6 个状态变量, 如果选取这 6 个状态变量作为 T-S 模糊模型的输入, 每个状态变量在其邻域内模糊分割为 2 个区域, 分别用语言变量 P 和 N 表示, 则描述 3D 刚体摆的 T-S 模糊模型一共需 $2^6 = 64$ 条模糊规则. 考虑到 3D 刚体摆约化姿态满足约束条件

$$x_4^2 + x_5^2 + (x_6 + \lambda)^2 = 1, \quad (18)$$

且系统矩阵 A 中不含 x_6 , 针对 3D 刚体摆的误差方程(17), 可选取 T-S 模糊模型的输入为 x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 如果 x_4 和 x_5 趋近于 0, 则由约束条件(18)可知 x_6 的绝对值趋于 1, 于是 T-S 模糊模型的输入个数少了 1 个, 模糊规则数变为 $2^5 = 32$ 个, 比选用 6 个状态变量作为 T-S 模糊模型的输入时减少了一半, 可以适当降低控制器的设计和稳定性分析的难度.

设 $x_i \in [x_{i \min}, x_{i \max}]$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 当 x_i 为 N 时, 系统矩阵 A 中 x_i 的值用 $x_{i \min}$ 代替; 当 x_i 为 P 时, 系统矩阵 A 中 x_i 的值用 $x_{i \max}$ 代替. 因此, 3D 刚体摆 T-S 模型一共有如下 32 条模糊规则:

R_1 : If x_1 is N and x_2 is N and x_3 is N x_4 is N and x_5 is N , Then $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$;

R_2 : If x_1 is N and x_2 is N and x_3 is N x_4 is N and x_5 is P , Then $\dot{x} = A_2 x + B_2 u$;

R_3 : If x_1 is N and x_2 is N and x_3 is N x_4 is P and x_5 is N , Then $\dot{x} = A_3 x + B_3 u$;

R_4 : If x_1 is N and x_2 is N and x_3 is N x_4 is P and x_5 is P , Then $\dot{x} = A_4x + B_4u$;

\vdots

R_{29} : If x_1 is P and x_2 is P and x_3 is P x_4 is N and x_5 is N , Then $\dot{x} = A_{29}x + B_{29}u$;

R_{30} : If x_1 is P and x_2 is P and x_3 is P x_4 is N and x_5 is P , Then $\dot{x} = A_{30}x + B_{30}u$;

R_{31} : If x_1 is P and x_2 is P and x_3 is P x_4 is P and x_5 is N , Then $\dot{x} = A_{31}x + B_{31}u$;

R_{32} : If x_1 is P and x_2 is P and x_3 is P x_4 is P and x_5 is P , Then $\dot{x} = A_{32}x + B_{32}u$.

由误差方程可知 $B_1 = B_2 = \dots = B_{32} = B$, $A_1 \sim A_{32}$ 可通过系统矩阵 A 求得.

3 稳定性分析

由于 3D 刚体摆 T-S 模糊控制系统的输入不含 x_6 , 系统矩阵 A 中也不含 x_6 且 A 为零对角元素, 矩阵 A_i 和 B 可分为

$$A_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}.$$

其中: $\bar{A}_{i11} \in R^{5 \times 5}$, $\bar{A}_{i12} \in R^{5 \times 1}$, $\bar{A}_{i21} \in R^{1 \times 5}$, $\bar{B}_1 \in R^{5 \times 3}$, $\bar{B}_2 \in R^{1 \times 3}$ 且 \bar{B}_2 为零矩阵. 因此每条模糊规则的后件可写为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (19)$$

若令 $\bar{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$, 则式 (19) 可拆分为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{i11}\bar{x} + \bar{A}_{i12}x_6 + \bar{B}_1u, \\ \dot{x}_6(t) = \bar{A}_{i21}\bar{x}. \end{cases} \quad (20)$$

其 T-S 模糊控制系统的总体模型也可写为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{32} h_i(\bar{A}_{i11}\bar{x} + \bar{A}_{i12}x_6 + \bar{B}_1u), \\ \dot{x}_6(t) = \sum_{i=1}^{32} h_i\bar{A}_{i21}\bar{x}. \end{cases} \quad (21)$$

采用 PDC 法, 模糊控制器的总体模型为

$$u(t) = - \sum_{i=1}^{32} h_i\bar{K}_i\bar{x}, \quad (22)$$

其中 $\bar{K}_i \in R^{5 \times 3}$. 将式 (22) 代入 (21), 得 3D 刚体摆闭环 T-S 模糊控制系统总体模型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{32} h_i(\bar{A}_{i11} - \bar{B}_1\bar{K}_i)\bar{x} + \sum_{i=1}^{32} h_i\bar{A}_{i12}x_6, \\ \dot{x}_6(t) = \sum_{i=1}^{32} h_i\bar{A}_{i21}\bar{x}. \end{cases} \quad (23)$$

定理 2 对于 3D 刚体摆 T-S 模糊控制模型 (21), 采用式 (22) 的模糊控制器, 闭环 T-S 模糊控制系统 (23) 在平衡点大范围渐近稳定的充分条件是存在一

个公共正定的反对称矩阵 \bar{P} , 对于所有的子系统都满足以下条件:

$$\bar{G}_{ii}^T\bar{P} + \bar{P}\bar{G}_{ii} < 0. \quad (24)$$

其中: $\bar{G}_{ii} = \bar{A}_{i11} - \bar{B}_1\bar{K}_i$, $\bar{G}_{ii} \in R^{5 \times 5}$.

证明 设 Lyapunov 函数 $V(\bar{x}) = \bar{x}^T\bar{P}\bar{x} > 0$. 对其求导, 并将式 (23) 代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \dot{\bar{x}}^T\bar{P}\bar{x} + \bar{x}^T\bar{P}\dot{\bar{x}} = \\ &\bar{x}^T \sum_{i=1}^{32} h_i(\bar{G}_{ii}^T\bar{P} + \bar{P}\bar{G}_{ii})\bar{x} + \\ &x_6 \sum_{i=1}^{32} h_i A_{i12}^T \bar{P} \bar{x} + \bar{x}^T \sum_{i=1}^{32} h_i \bar{P} A_{i12} x_6. \end{aligned}$$

因为 \bar{P} 为反对称矩阵, 即 $\bar{P}^T = -\bar{P}$, 所以

$$x_6 \sum_{i=1}^{32} h_i A_{i12}^T \bar{P} \bar{x} = -\bar{x}^T \sum_{i=1}^{32} h_i \bar{P} A_{i12} x_6,$$

于是

$$\dot{V}(\bar{x}) = \bar{x} \sum_{i=1}^{32} h_i(\bar{G}_{ii}^T\bar{P} + \bar{P}\bar{G}_{ii})\bar{x}.$$

因为 \bar{P} 对于所有的子系统均满足 $\bar{G}_{ii}^T\bar{P} + \bar{P}\bar{G}_{ii} < 0$, 所以 $\dot{V}(\bar{x}) < 0$. 由 Lyapunov 稳定性定理可知 \bar{x} 大范围渐近稳定到平衡点, 由约束条件 (18) 可知 x_6 也是渐近稳定的. 因此, 整个闭环 T-S 模糊控制系统 (23) 在平衡点是 大范围渐近稳定的. \square

对于式 (22) 中 \bar{K}_i 的求解, 其计算流程如图 2 所示. 在 Matlab 平台下可利用 place 函数对多输入多输出系统进行极点配置, 所选取的极点必须具有负实部, 反对称正定矩阵 \bar{P} 的寻找可以利用 LMI 工具箱. 为了使控制器具有良好的控制效果, 需对每次计算出的结果进行计算机仿真或者实际调试, 直到达到预期的控制效果为止.

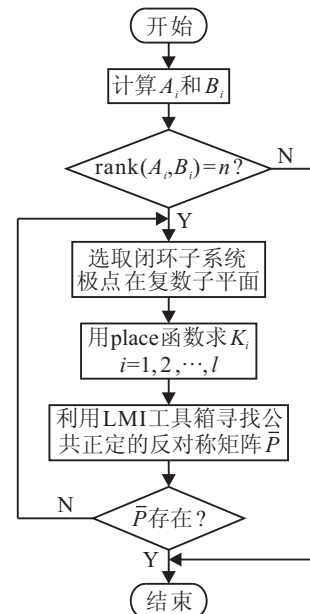


图 2 \bar{K}_i 计算流程

4 Matlab 仿真实验

选取 3D 刚体摆的质量 $m = 140 \text{ kg}$, 惯量矩阵 $J = \text{diag}(40, 45, 50) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 支点与质心之间的距离 $l = 0.1 \text{ m}$. 考虑 3D 刚体摆倒立平衡时的约化姿态误差方程, 此时有 $\lambda = -1$. x_1, x_2 和 x_3 的论域取为 $[-5, 5]$, x_4 和 x_5 的论域取为 $[-1, 1]$, 并采用三角函数对其进行模糊分割为 P 和 N 两个区域, 将 $x_{i \min}$ 和 $x_{i \max}$ 的值代入系统矩阵 A , 可以求得 $A_1 \sim A_{32}$, 而 $B_1 = B_2 = \dots = B_{32} = B$ 为常数矩阵, 其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0250 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0222 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0200 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

取一组期望的极点: $p_1 = -3 - i, p_2 = -3 + i, p_3 = -3, p_4 = -3 - 2i, p_5 = -3 + 2i$, 利用图 2 计算流程对 T-S 模糊模型的每个子系统进行局部极点配置可得 \bar{K}_i 值, 并解得一个公共正定的反对称矩阵

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1.0069 & -0.0001 & 0 & 0.0022 & -3.0032 \\ 0.0001 & 1.0069 & 0 & 3.0026 & -0.0033 \\ 0 & 0 & 1.3952 & 0 & 0 \\ -0.0022 & -3.0026 & 0 & 6.1944 & -0.0005 \\ 3.0032 & 0.0033 & 0 & 0.0005 & 6.2118 \end{bmatrix}.$$

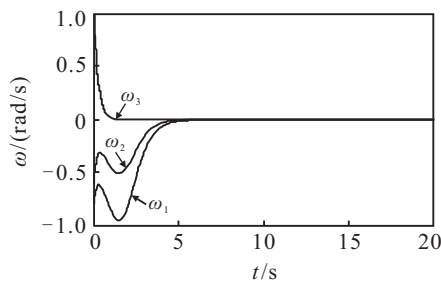


图 3 3D 刚体摆倒立平衡稳定的角速度

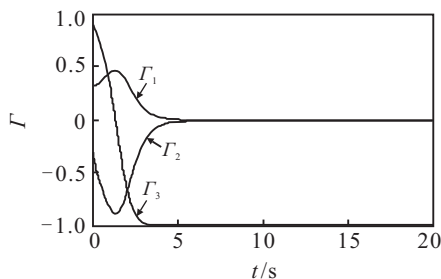


图 4 3D 刚体摆倒立平衡稳定的约化姿态

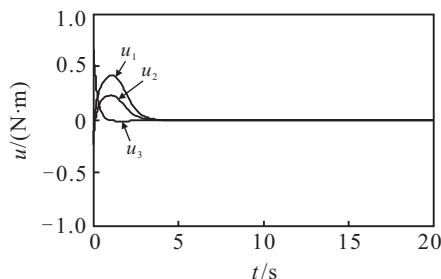


图 5 3D 刚体摆倒立平衡稳定的控制输入

取初始角速度为 $\omega_0 = (-0.8, -0.6, 1) \text{ rad/s}$, 初始约化姿态为 $\Gamma_0 = (0.3802, -0.3802, 0.9)$, 则系统仿真结果如图 3 ~ 图 5 所示. 其中: 图 3 为角速度变化曲线, 图 4 为约化姿态变化曲线, 图 5 为输入控制力矩.

5 结 论

本文建立了 3D 刚体摆的 T-S 模糊模型, 并针对其平衡位置处的姿态稳定控制问题, 采用 PDC 方法设计了 T-S 模糊控制器. 在设计控制器时, 由于系统阶次高、输入状态变量多等原因, 很难找到公共正定的矩阵. 为此, 本文对每个局部模糊子系统的系统矩阵进行分块处理, 利用 PDC 方法对每个子块进行局部极点配置, 并通过构造一个 Lyapunov 函数提出了判断分块后闭环 T-S 模糊控制系统稳定性的一个充分条件. 最后, 对 3D 刚体摆姿态倒立平衡稳定控制进行了仿真研究, 仿真结果验证了 T-S 模糊控制器的可行性和有效性, 同时也说明了该控制器具有良好的动静态性能.

参考文献(References)

- [1] Cho S, Shen J, McClamroch N H, et al. Equations of motion of the triaxial attitude control testbed[C]. Proc of 40th IEEE Conf on Decision & Control. Orlando: IEEE Press, 2001: 3429-3434.
- [2] Cho S, Shen J, McClamroch N H. Mathematical models for the triaxial attitude control tested[J]. Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems, 2003, 9(2): 165-192.
- [3] Shen J, McClamroch N H, Bloch A M. Local equilibrium controllability of the triaxial attitude control testbed[C]. Proc of the 41st Conf on Decision and Control. Las Vegas: IEEE Press, 2002: 528-533.
- [4] Shen J, Sanyal A K, Chaturvedi N A, et al. Dynamics and control of a 3D pendulum[C]. Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision & Control. Bahamas: IEEE Press, 2004: 323-328.
- [5] Chaturvedi N A, Lee T, Leok M, et al. Nonlinear dynamic of the 3D pendulum[J]. J of Nonlinear Science, 2011, 21(1): 3-32.
- [6] Chaturvedi N A, Bacconi F, Bernstein D S, et al. Stabilization of a 3D axially symmetric rigid pendulum[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision & Control. Ann Arbor: IEEE Press, 2005: 5287-5292.
- [7] Bacconi F. Spacecraft attitude dynamics and control[D]. Florence: Department of Systems and Computer Science, University of Florence, 2005/2006.
- [8] Chaturvedi N A, Bacconi F, Sanyal A K, et al. Stabilization of a 3D rigid pendulum[C]. Proc of the American Control Conf. Ann Arbor: IEEE Press, 2005: 3030-3035.

- [9] Chaturvedi N A, McClamroch N H. Asymptotic stabilization of the hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(16): 1235-1454.
- [10] Passino K M, Yurkovich S. *Fuzzy control*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001: 10-14.
- [11] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135-156.
- [12] 孙增圻, 邓志东, 张再兴, 等. *智能控制理论与技术*[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2011: 67-79.
- (Sun Z Q, Deng Z D, Zhang Z X. *Intelligent control theory and technology*[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2011: 67-79.)
- [13] Tanaka K, Wang H O. *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*[M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 2001: 49-82.
- [14] 修智宏, 任光. T-S 模糊控制系统的稳定性分析及系统化设计[J]. *自动化学报*, 2004, 30(5): 731-741.
- (Xiu Z H, Ren G. Stability analysis and systematic design of T-S fuzzy control systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(5): 731-741.)