

文章编号: 1001-0920(2013)12-1912-03

## 区间灰数序列的灰色预测模型构建方法

吴利丰, 刘思峰, 闫书丽

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

**摘要:** 研究包含实数、区间灰数的混合型预测问题. 首先通过计算灰数层的面积和区间灰数的认知程度, 将区间灰数序列转变成实数序列; 然后分别预测灰数层的面积和区间灰数的认知程度, 推导还原得到区间灰数预测模型; 最后通过与现有文献中的实例进行对比, 说明了所提出的建模方法在避免区间灰数之间代数运算的情况下, 提高了建模精度.

**关键词:** 灰色系统理论; 区间灰数; 认知程度; 混合序列

**中图分类号:** N941.5

**文献标志码:** A

## Grey prediction model for hybrid sequence

WU Li-feng, LIU Si-feng, YAN Shu-li

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.

Correspondent: WU Li-feng, E-mail: wlf6666@126.com)

**Abstract:** The forecasting problem whose sample data including real number and interval grey number is studied. An interval grey number sequence is converted into a real number sequence by calculating the areas of grey number layers and the cognition of interval grey number. The areas of grey number layers and the cognition of interval grey numbers are predicted respectively. Then the unbiased prediction model of the interval grey number is achieved by deducing and reverting. Comparisons real example from the reference with the unbiased prediction model demonstrates that the unbiased prediction model is more accurate than other models, it is shown that this method is effective and applicable, and can avoid the calculation of interval grey number.

**Key words:** grey system theory; interval grey number; cognition; hybrid sequence

## 0 引言

自灰色系统理论建立以来, 无论是在理论研究还是应用领域都取得了长足发展, 形成了以灰色预测模型为核心的理论体系<sup>[1-2]</sup>. 但是, 现有的灰色预测模型大多以“实数”为建模对象<sup>[3]</sup>, 尚未见到以灰色系统的基本表示单位——灰数为建模对象的相关报道. 这是因为目前灰代数运算体系尚不完善, 建立灰数预测模型是一个难点, 使得以“灰数”为建模对象的研究刚刚起步. 文献[4]以区间灰数白化值作为区间灰数的发展趋势, 但认为区间灰数的认知程度不变是不恰当的; 文献[5]通过计算灰数层的面积以及灰数层中位线中点的坐标来建立区间灰数预测模型, 但未考虑区

间灰数的认知程度; 文献[6]讨论了白化权函数已知条件下的区间灰数预测模型; 文献[7]利用线性规划的方法建立了区间灰数预测模型.

实际上, 由于认知过程的复杂性, 有可能出现既包含区间灰数, 又包含实数的混合序列. 面对这样的序列如何分析预测? 纵观现有文献, 仅有文献[8]研究了各种混合型的决策问题, 而关于基于混合序列预测模型的研究尚未见报道.

本文首先通过计算灰数层的面积和区间灰数的认知程度, 将区间灰数序列转变成实数序列; 然后分别预测灰数层的面积和区间灰数的认知程度, 从而建立一种无偏的区间灰数预测模型. 实例分析结果表

收稿日期: 2012-08-13; 修回日期: 2012-10-31.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(90924022, 70971064, 70901041); 江苏省高等学校优秀创新团队项目(P0702); 南京航空航天大学创新群体项目(Y0553); 特聘教授科研创新基金项目(1009-260812); 南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金项目(BCXJ12-13); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXLX12.0176); 中央高校基本科研业务费专项资金项目.

**作者简介:** 吴利丰(1983-), 男, 博士生, 从事灰色系统理论的研究; 刘思峰(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论等研究.

明, 本文方法能显著提高建模精度.

### 1 区间灰数的无偏预测模型构建

**定义 1** 由区间灰数构成的时间序列称为区间灰数序列, 记作  $X(\otimes) = (\otimes(1), \otimes(2), \dots, \otimes(n)), \otimes(k) \in [v_k, u_k], k = 1, 2$ , 其中  $v_k$  和  $u_k$  分别称为灰数  $\otimes(k)$  的下界和上界.

**定义 2** 图 1 是区间灰数序列的元素在直角坐标系中的示意图. 由相邻区间灰数的上界点和下界点, 分别可以确定唯一的指数函数, 由指数函数而围成的图形称为灰数层, 若干个相邻区间灰数之间的灰数层称为灰数带.

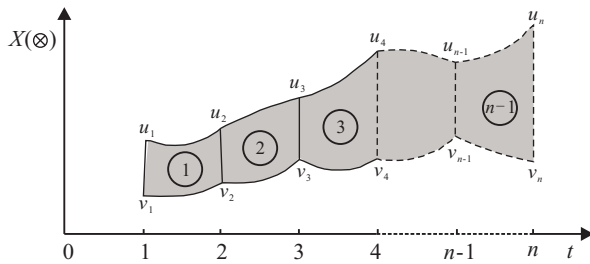


图 1 灰数层示意图

例如, 由  $u_2$  和  $u_3$ , 有且只能确定一个过  $u_2$  和  $u_3$  的指数函数, 记为  $u_k = c_2 e^{a_2 k}$ . 同理, 过  $v_2$  和  $v_3$  的指数函数为  $v_k = c_1 e^{a_1 k}$ . 由  $c_2 e^{a_2 k}, c_1 e^{a_1 k}, k = 2$  和  $k = 3$  围成的图形为灰数层.

设等时距区间灰数序列为  $X(\otimes) = (\otimes(t_1), \otimes(t_2), \dots, \otimes(t_n))$ , 对应的灰数层如图 1 所示. 其中: 根据灰数层在灰数带中的位置, 用带圈的数字 (①, ②, ...) 表示灰数层编号.

**定理 1** 若区间灰数序列  $X(\otimes) = (\otimes(1), \otimes(2), \dots, \otimes(n)), \otimes(k) \in [v_k, u_k], k = 1, 2, \dots, n$ , 则灰数层面积为

$$s_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}} - \frac{v_{k+1} - v_k}{\ln \frac{v_{k+1}}{v_k}}$$

**证明** 设经过  $u_k, u_{k+1}$  的函数为  $y_1 = ce^{at}$ , 得方程组

$$\begin{cases} u_k = ce^{ak}, \\ u_{k+1} = ce^{a(k+1)}, \end{cases}$$

解得  $y_1 = \frac{(u_k)^{k+1}}{(u_{k+1})^k} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^t$ . 同理, 经过  $v_k, v_{k+1}$  的函数为  $y_2 = \frac{(v_k)^{k+1}}{(v_{k+1})^k} \left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)^t$ . 因此

$$s_k = \int_k^{k+1} (y_1 - y_2) dt = \frac{u_{k+1} - u_k}{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}} - \frac{v_{k+1} - v_k}{\ln \frac{v_{k+1}}{v_k}}. \tag{1}$$

由此, 定理 1 得证.  $\square$

若区间灰数序列  $X(\otimes) = (\otimes(1), \otimes(2), \dots, \otimes(n)), \otimes(k) \in [v_k, u_k], k = 1, 2, \dots, n$ , 则由式 (1), 灰数带中

所有灰数层的面积构成实数序列, 记为  $S = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ . 借鉴自回归模型的思想, 假设灰数层的面积满足

$$s_{k+1} = \beta_1 s_k + \beta_2 \left( \frac{u_{k+1} - u_k}{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}} + \frac{v_{k+1} - v_k}{\ln \frac{v_{k+1}}{v_k}} \right), \tag{2}$$

其中  $\beta_1$  和  $\beta_2$  为未知参数. 经最小二乘估计, 得

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} s_1 & \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{u_2}{u_1}} + \frac{v_2 - v_1}{\ln \frac{v_2}{v_1}} \\ s_2 & \frac{u_3 - u_2}{\ln \frac{u_3}{u_2}} + \frac{v_3 - v_2}{\ln \frac{v_3}{v_2}} \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-2} & \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{\ln \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}} + \frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\ln \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}.$$

设  $\hat{s}_1 = s_1$ , 将  $\hat{\beta}_1$  和  $\hat{\beta}_2$  代入式 (2), 得

$$\hat{s}_{k+1} = \hat{\beta}_1 \hat{s}_k + \hat{\beta}_2 \left( \frac{u_{k+1} - u_k}{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}} + \frac{v_{k+1} - v_k}{\ln \frac{v_{k+1}}{v_k}} \right). \tag{3}$$

由式 (3), 可依次得到  $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_n$ . 进一步, 设

$$\hat{s}_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}} - \frac{v_{k+1} - v_k}{\ln \frac{v_{k+1}}{v_k}}, \tag{4}$$

其中  $u_{k+1}$  和  $v_{k+1}$  为未知参数.

**定义 3** 对于区间灰数  $[v_k, u_k], 0 < v_k \leq u_k$ , 称

$$r_k = v_k / u_k \tag{5}$$

为区间灰数  $[v_k, u_k]$  的认知程度, 称  $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  为区间灰数  $[v_k, u_k]$  的认知程度序列.

易证, 对于掌握了所有信息的白数, 其认知程度为 1, 即白数是认知程度为 1 的特殊区间灰数. 考虑到人的认知程度受记忆的影响, 即当前区间灰数的认知程度会影响到以后区间灰数的认知程度. 由于基于序列累加的 DGM (1, 1)<sup>[2]</sup> 具有无偏性 (对完全满足指数增长的序列可以完全拟合), 不存在离散模型与连续模型之间的近似代替, 通常具有较高精度. 因此, 对序列  $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  建立 DGM (1, 1), 得

$$\hat{r}_{k+1} = (1 - e^{-ar}) \left( r_1 - \frac{b_r}{ar} \right) e^{-ar k}, k = 1, 2, \dots, n.$$

区间灰数预测的建模步骤如下:

Step 1: 按式 (1) 计算区间灰数层面积  $s_k$ ;

Step 2: 按式 (3) 预测区间灰数层面积  $\hat{s}_k$ ;

Step 3: 按式 (5) 计算区间灰数的认知程度  $r_k$ ;

Step 4: 对区间灰数的认知程度序列  $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  建立 DGM(1, 1) 模型, 得到认知程度的预测值;

Step 5: 由  $\hat{r}_{k+1} = v_{k+1}/u_{k+1}$ , 得

$$v_{k+1} = u_{k+1}\hat{r}_{k+1}, \quad (6)$$

其中  $u_{k+1}$  和  $v_{k+1}$  是未知参数,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;

Step 6: 由式 (4) 和 (6), 得方程组

$$\begin{cases} v_{k+1} = \hat{r}_{k+1}u_{k+1}, \\ \hat{s}_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}} - \frac{v_{k+1} - v_k}{\ln \frac{v_{k+1}}{v_k}}, \end{cases}$$

解方程组, 得到  $u_{k+1}$  和  $v_{k+1}$  的预测值.

### 2 上界、下界均服从指数增长的区间灰数预测分析

为了检验本文建模方法的稳定性, 下面利用本文方法进行上界、下界均服从指数增长的区间灰数模拟分析.

设区间灰数序列  $X(\otimes) = (\otimes(1), \otimes(2), \dots, \otimes(n))$ ,  $\otimes(k) \in [v_k, u_k], v_k = c_1 e^{a_1 k}, u_k = c_2 e^{a_2 k}, k = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{a_1} + e^{a_2}}{2} \\ \frac{e^{a_2} - e^{a_1}}{2} \end{bmatrix}, \hat{r}_k = \frac{c_1 e^{(a_1 - a_2)k}}{c_2}.$$

解方程组, 得  $\hat{v}_{k+1} = c_1 e^{a_1(k+1)}, \hat{u}_{k+1} = c_2 e^{a_2(k+1)}$ ,  $\otimes(k)$  与其预测值完全相等, 因此具有预测无偏性. 实际应用中, 只要原始区间灰数的上界和下界分别近似服从指数增长规律, 就可以利用本文方法进行模拟和预测. 下面给出判别序列的上界、下界均为服从指数增长区间灰数的方法.

**定义 4** 若区间灰数的上界为  $u_k, k = 1, 2, \dots, n$ , 则称  $b_k = (u_{k+2} - u_{k+1}) / (u_{k+1} - u_k)$  为  $u_k (k = 1, 2, \dots, n-2)$  的变化系数,  $\bar{b} = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{u_{k+1} - u_k}$  为  $u_k (k = 1, 2, \dots, n-2)$  的平均变化系数; 如果  $\sum_{k=1}^{n-2} |\bar{b} - b_k| < \varepsilon$ , 则  $u_k (k = 1, 2, \dots, n-2)$  近似服从指数增长规律. 其中  $\varepsilon$  可根据情况确定,  $\varepsilon$  越大, 与指数规律近似程度越低;  $\varepsilon$  越小, 与指数规律近似程度越高. 同理, 可判别序列的下界是否近似服从指数规律.

### 3 实例分析

为便于比较, 本文采用文献 [4] 的算例. 某企业在分析竞争对手发展趋势时, 缺少对手销售额的准确资料, 为此, 通过对共同竞标等经营活动中收集到的信息进行分析后, 对该企业销售额的最大值和最小值进行估计, 由此得到的对手销售额序列是一个区间灰数序列. 采用 3 种方法分别建模, 3 种方法的误差对比如表 1 所示.

表 1 误差对比 万元

年份	实际值	方法 1 <sup>[3]</sup> 模拟值	文献 [4] 模拟值	本文方法模拟值
2005	[80, 100]	[80, 100]	[80, 100]	[80, 100]
2006	[95, 120]	[98.5, 124.5]	[98.2, 124.1]	[95, 120]
2007	[120, 150]	[114.2, 142.5]	[118.2, 147.8]	[121.1, 151.0]
2008	[130, 160]	[132.4, 163.2]	[132.3, 162.9]	[129.6, 159.6]
平均相对误差 / %		7.09	2.23	1.07

方法 1 是分别利用文献 [3] 的方法对原始区间灰数序列的上界和下界建立 GM(1, 1) 模型进行预测. 从表 1 可以看出, 本文方法的平均相对误差明显小于其他两种建模方法, 说明本文方法能够显著提高建模精度, 同时说明, 对于上界和下界分别近似服从指数增长规律的区间灰数, 应将区间灰数看作一个整体进行模拟预测, 不应分别对原始区间灰数序列的上界和下界建立 GM(1, 1) 模型进行模拟.

如果 2006 年该企业年销售额为实数 110 万元, 则该问题是一个混合序列的预测问题. 采用本文方法建模, 模拟值如表 2 所示.

表 2 模拟值 万元

年份	实际值	本文方法模拟值
2005	[80, 100]	[80, 100]
2006	110	110
2007	[120, 150]	[121.5, 151.6]
2008	[130, 160]	[110.5, 144.3]

从表 2 可以看出, 对于既含有实数, 又含有区间灰数的混合序列, 本文方法同样适用.

### 4 结 论

1) 本文在计算灰数层的面积和区间灰数认知程度的基础上, 首先将区间灰数序列转变成实数序列, 然后分别预测灰数层的面积和区间灰数的认知程度, 推导还原得到一种无偏的区间灰数预测模型. 实例分析结果表明, 本文方法在避免区间灰数之间代数运算的情况下, 提高了建模精度.

2) 针对既有区间灰数, 又有实数的混合序列, 本文方法同样适用.

3) 对于上界和下界分别近似服从指数增长规律的区间灰数, 应将区间灰数看作一个整体进行模拟预测, 不应分别对原始区间灰数序列的上界和下界建立 GM(1, 1) 模型进行模拟.

### 参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 8-23.  
(Deng J L. The base of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 8-23.)  
[2] Liu S F, Lin Y. Grey systems: Theory and applications[M]. London: Springer, 2010: 33-36.

- [3] 王义闹. GM(1,1)逐步优化直接建模方法的推广[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(2): 116-120.  
(Wang Y N. An extended step by step optimum direct modeling method of GM(1,1)[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2003, 23(2): 116-120.)
- [4] 袁潮清, 刘思峰, 张可. 基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 313-315.  
(Yuan C Q, Liu S F, Zhang K. Prediction model for interval grey number based on trend and cognition[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 313-315.)
- [5] 曾波, 刘思峰, 谢乃明, 等. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1588.  
(Zeng B, Liu S F, Xie N M, et al. Prediction model for interval grey number based on grey band and grey layer[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1585-1588.)
- [6] 曾波, 刘思峰, 崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1819.  
(Zeng B, Liu S F, Cui J. Prediction model for interval grey number with known weight function[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1815-1819.)
- [7] Tsaor R C. The development of an interval grey regression model for limited time series forecasting[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(2): 1200-1206.
- [8] 何峻, 赵宏钟, 肖立, 等. 混合型多属性决策问题的序关系求解方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(4): 579-583.  
(He J, Zhao H Z, Xiao L, et al. Preference method for solving hybrid multiple attribute decision making problems[J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 579-583.)