第 五 章　不 定 积 分

§ 5.1 原函数

考虑质点沿直线运动，已知位移$s = s(t)$，求即时速度：$v(t) = s'(t)$是求导运算；反过来，如果知道每个时刻的即时速度$v(t)$，求位移$s(t)$，则是个逆运算，即要找一个函数$s(t)$，使得$s'(t) = v(t)$。这个$s(t)$就是$v(t)$的不定积分，也称为原函数。

定义 在区间I上 给定函数$f(x)$，若存在$F(x)$使得$F'(x) = f(x)$，$x \in I$ 或 $dF(x) = f(x)dx$，$x \in I$，则称$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$f(x)$的全部原函数称为$f(x)$的不定积分，记作 $\int f(x)dx$， 若$f(x)$存在原函数，称$f(x)$可积。

定理 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

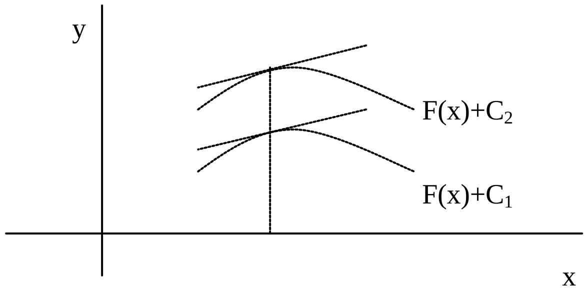
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中C为任意常数。

注 我们只要找到$f(x)$的一个原函数，那么它的不定积分就有形式$F(x)+C$，即任二个原函数之间仅相差一个常数。

证 由$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$，即对任何常数C，$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数，再证它们是全部原函数。设$G(x)$为$f(x)$另一原函数，$G'(x) = f(x)$，那么 $[F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$，我们得到$G(x) = F(x) + C$。

几何上看是明显的，曲线$F(x)+C_1$和$F(x)+C_2$在点x有相同切线斜率。



实际问题中，加上某些初值条件（如$F(x_0)=a$）可以把常数C确定下来。

不定积分既然是求导逆运算，从求导数的表我们可以导出如下不定积分表，它是我们计算不定积分的基础，务必牢记。

$$\int x^a dx = \frac{1}{1+a} x^{1+a} + C \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int shx = chx + C$$

$$\int chx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Arshx + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C = \begin{cases} Archx \quad + C & (x>1) \\ -Arch(-x) + C & (x<-1) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \begin{cases} Arthx + C & (|x|<1) \\ Arth\frac{1}{x} + C & (|x|>1) \end{cases}$$

性质 1 设$f(x), g(x)$可积，则$f(x) \pm g(x)$也可积，且

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx。$$

性质 2 设$f(x)$可积，则$k f(x)$可积，且

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \neq 0)。$$

注 这两条性质说明不定积分是一种线性运算，即与加法和数乘可交换。

我们只给出性质 1 的证明，另一个可用同样方法证明：令

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad \text{或} \quad F'(x)=f(x)$$

$$\int g(x)dx = G(x)+C \quad \text{或} \quad G'(x)=f(x)$$

则 $[F(x)\pm G(x)]' = f(x)\pm g(x)$。所以 $\int [f(x)\pm g(x)]dx = F(x)\pm G(x)+C$。

§ 5.2 换元法

2.1 第一换元法

定理 1 如果 $\int f(u)du = F(u)+C$，又 $u=u(x)$ 是 x 可微函数，则

$$\int f[u(x)]\cdot u'(x)dx = F[u(x)]+C。$$

证 由条件，我们有 $dF(u)=f(u)du$，一阶微分有不变性：

$$dF[u(x)] = f[u(x)]du(x) = f[u(x)]u'(x)dx，$$

所以 $\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)]+C$。

例1 $\int \frac{1}{ax+b}dx$

解 $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$。

例 2 $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

解 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$。

例 3 $\int (ax+b)^n dx$

解

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n d(ax+b)$$
$$= \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C \quad (n\neq -1)。$$

总结 (1) 复合函数求导：$\left(F[u(x)]\right)' = F'[u(x)]u'(x)$ 是直接的，在不定积分换元法中应用的是同一原理，但现在是倒着走，即要把被积函数人为地拆成 $f[u(x)]$ 与 $u'(x)$ 乘积，

如何拆，要灵活掌握，目标是往已知积分表里的公式靠。

（2）**若** $u = ax + b$ **，则** $a\,dx = d(ax+b)$ **是一种常用换元。**

（3）**在实际运算中不必一定写出** $u = u(x)$ **这步代换，自己看清就行了。**

例 4 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

解

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1-(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\text{。}$$

另一种解法：

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int [\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}]dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{d(x+a)}{a+x} - \frac{1}{2a}\int \frac{d(a-x)}{a-x}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\text{。}$$

例 5 $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 3}$

解

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

例 6 $I = \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$

解 $I = -\frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x-1}\right] dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C$。

又一解法：

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}})}{(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 - \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C$$

例 7 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad (a>0)$

解 $I=\int\frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$。

例 8 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

解 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin(2x-1)+C$。

又一解法：

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C$$

事实上这两个答案恰相差一个常数。

例 9 $I=\int tgx\,dx$

解 $I=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$。

例 10 $I_n=\int tg^n x\,dx$

解

$$I_n=\int tg^{n-2}x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int tg^{n-2}x\,dtgx-\int tg^{n-2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{n-1}tg^{n-1}x-I_{n-2}\text{。}$$

这个递推公式非常有用，比如

$$I_3=\frac{1}{2}tg^2x-\int tgx\,dx=\frac{1}{2}tg^2x+\ln|\cos x|+C\text{。}$$

$$I_4=\frac{1}{3}tg^3x-\int tg^2x\,dx=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+\int 1\,dx$$

$$=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x+C\text{。}$$

例 11 $I=\int\frac{dx}{\cos x}$

解

$$I=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|^2+C=\ln\left|\sec x+tgx\right|+C。$$

又一解法：

$$I=\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}(1-tg^2\frac{x}{2})}$$

$$=2\int\frac{d(tg\frac{x}{2})}{(1-tg^2\frac{x}{2})}=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$=\ln\left|tg(\tfrac{x}{2}+\tfrac{p}{4})\right|+C。$$

例 12 $I=\int\frac{dx}{1+x^3}$， $J=\int\frac{x\,dx}{1+x^3}$

解

$$I+J=\int\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int\frac{dx}{1-x+x^2}=\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C。$$

$$I-J=\int\frac{1-x}{1+x^3}dx=\int\frac{dx}{1+x}-\int\frac{x^2dx}{1+x^3}$$

$$=\ln|1+x|-\tfrac{1}{3}\ln|1+x^3|+C。$$

所以 $I=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln|1+x^3|+C$。

$$J=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln|1+x|+\frac{1}{6}\ln|1+x^3|+C。$$

2．**第二换元法**

$$\underset{\text{I}}{\int f[u(x)]\cdot u'(x)dx}=\underset{\text{II}}{\int f(u)du}\qquad(u=u(x))$$

已知 II 求 I，是第一换元法；
已知 I 求 II，是第二换元法。

定理 2 **设** $x=x(t)$ **在开区间上导数** >0 **或<0，又如果** $\int f[x(t)]x'(t)dt=G(t)+C$，**则** $\int f(x)dx=G[t(x)]+C$，**其中** $t=t(x)$ **为** $x=x(t)$ **的反函数。**

证 **已知** $G'(t)=f[x(t)]x'(t)$，**又** $x'(t)\neq 0$，**所以** $x(t)$ **连续，严格单调，因此反函数**

$t=t(x)$ 存在，也连续，严格单调，且 $t'(x)=\dfrac{1}{x'[t(x)]}$。于是

$$\left(G[t(x)]\right)'=G'[t(x)]t'(x)=f(x)x'[t(x)]t'(x)=f(x)\text{，}$$

所以 $\int f(x)dx=G[t(x)]+C$。

第二换元法主要用来求含有 $\sqrt{\quad}$ 的积分。

例 13 $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

解 令 $x=a\sin t$，$|t|<\dfrac{p}{2}$，则

$$I=\int a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C\text{。}$$

例 14 $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad(a>0,\ |x|>a)$

解 令 $x=a\sec t\quad(0<t<\frac{p}{2})$

$$I=\int\frac{a\sec t\cdot tgt}{atgt}dt=\int\frac{dt}{\cos t}$$
$$=\ln|\sec t+tgt|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$$
$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\text{。}$$

又一解法： 令 $x=a\,cht$，$0<t<+\infty$，$t=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

$$I=\int\frac{a\,sht}{a\,sht}dt=t+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\text{。}$$

注：上面是对 $x>a$ 进行的，对于 $x<-a$ 同样方法。

例 15 $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a>0)$

解 令 $x=a\,sht$，

$$I=t+C=Arcsh\frac{x}{a}+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$。

例 16 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

解 令 $x=t^6$

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{1+t}dt=6\int[t^2-t+1-\frac{1}{1+t}]dt$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|1+t|+C$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+C$$。

§5.3 分部积分法

定理 设$u(x)$，$v(x)$可导，若$\int u'(x)v(x)dx$存在，则

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$$

证 由$(uv)'=u'v+uv'$，我们有$uv'=(uv)'-vu'$，右端两项原函数存在，左端项原函数也存在，且$\int uv'dx=uv-\int vu'dx$。

注 公式也常写成 $\int udv=uv-\int vdu$。

用分部积分法求不定积分之步骤：1．把被积函数拆成uv'，将v'放入d后面成dv，通常$v'=e^{\pm x}, \sin x, \cos x, x^n, shx, chx$等；2．用公式；3．把$u'v$积出来，如积不出来，设法建立函数方程来求解。

例 1 $I=\int x^3\ln xdx$

解 令$u=\ln x$，$dv=x^3dx=d\frac{x^4}{4}$，即$v=\frac{x^4}{4}$，则

$$I=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$$。

例 2 $I=\int arctgxdx$

解

$$I=x\,arctgx-\int x\,darctgx=x\,arctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}$$
$$=x\,arctgx-\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$。

例 3　$I=\int x^2\sin xdx$

解

$$I=-\int x^2 d\cos x=-x^2\cos x+\int\cos xdx^2$$
$$=-x^2\cos x+2\int xd\sin x$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin xdx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C\text{。}$$

例 4　$I=\int\sqrt{x^2-1}dx$

解

$$I=x\sqrt{x^2-1}-\int xd\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$$
$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-I$$

所以　$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$。

又一解法：令 $x=cht$，

$$I=\int sh^2t\,dt=\int\frac{ch2t-1}{2}dt=\frac{1}{4}sh2t-\frac{1}{2}t+C$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C\text{。}$$

例 5　$I=\int e^{ax}\cos bxdx$，$J=\int e^{ax}\sin bxdx$

解　$I=\frac{1}{b}\int e^{ax}d\sin bx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}J$

$$J=-\frac{1}{b}\int e^{ax}d\cos bx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}I$$

$$\begin{cases} bI+aJ=e^{ax}\sin bx \\ aI-bJ=e^{ax}\cos bx \end{cases}$$

$$I=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C\text{，}$$

$$J=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C\text{。}$$

例 6　$K_n=\int\cos^n x\,dx$

解

$$
\begin{aligned}
K_n &= \int \cos^{n-1} x\, d \sin x = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x\, d\cos^{n-1} x \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)K_{n-2} - (n-1)K_n
\end{aligned}
$$

所以 $K_n = \dfrac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \dfrac{n-1}{n}K_{n-2}$ 。

例 7 $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

解

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}
\end{aligned}
$$

所以 $I_{n+1} = \dfrac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2}I_n$。

特别地 $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + C$ 。

初等函数都是可积的，如果其原函数仍为初等函数，我们称为能积出来，如果其原函数不再是初等函数，我们称之为积不出来。

积不出来的有： $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int (a+bz)^p z^q dz$ **其中** p , q , $p+q$ **非整数，再有椭圆积分**

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx \text{和} \int R(x, \sqrt{ax^4+\Lambda+e})dx$$

都是积不出来的。

§ 5.4 有理函数积分

有理函数 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **是两个多项式之比，理论上它一定可以积出来。**

有理函数可分为真分式和假分式，真分式是指分子次数小于分母次数；假分式是分子次数大于或等于分母次数，用除法，假分式=多项式+真分式。

真分式总可以写成最简真分式之和，后者是形如

$$\frac{A}{x-a}\text{，}\frac{A}{(x-a)^m}\ (m>1)\text{和}\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\text{，}\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\quad(k>1)$$

的分式，其中 $p^2-4q<0$ **。最简真分式是指：分母为素多项式或素多项式之幂，分子次数小于分母中素多项式次数。在实数中，素多项式只有两种：** $x-a$ **和** x^2+px+q **，其中。**

$p^2-4q<0$ 。

所以有理式 $R(x)=$ **多项式** $+$ **最简真分式之和。这个分解过程称为分项分式，通常可用待定系数法求得。**

例 1 $I=\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$

解　设 $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$

将右端通分，比较分子同次幂的系数，得

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=1 \\ -B+C=0 \end{cases}$$

解之，得 $A=-\frac{1}{2}$ **，** $B=\frac{1}{2}$ **，** $C=\frac{1}{2}$ **。我们有**

$$\begin{aligned} I&=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} \\ &=-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C \text{。} \end{aligned}$$

例 2 $I=\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$

解　将分母作因式分解，得 $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$ **。设**

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

将两边乘 x **，令** $x=0$ **，得** $A=-1$ **；两边乘** $(x-1)^3$ **，令** $x=1$ **，得** $B=2$ **；两边乘** $x-1$ **，令** $x\to+\infty$ **，得** $D=2$ **；最后令** $x=-1$ **，得** $C=1$ **。**

$$\begin{aligned} I&=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1} \\ &=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C \text{。} \end{aligned}$$

设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是一个真分式，$Q(x)$ 是 n 次多项式，有 n 个零点，可以是实的，也可以是复的，如果 $Q(x)$ 是实系数的，复零点共轭成对出现，我们可以设

$$Q(x)=\prod_{j=1}^{s}(x-a_j)^{m_j}\prod_{j=1}^{t}(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}\text{，}\ (p_j^2-4q_j<0)$$

其中 $\sum_{j=1}^{s}m_j+2\sum_{j=1}^{t}k_j=n$。

令

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{A_1^j}{x-a_j}+\frac{A_2^j}{(x-a_j)^2}+\Lambda+\frac{A_{m_j}^j}{(x-a_j)^{m_j}}\right]\\&+\sum_{j=1}^{t}\left[\frac{B_1^jx+C_1^j}{x^2+p_jx+q_j}+\Lambda+\frac{B_{k_j}^jx+C_{k_j}^j}{(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}}\right]\end{aligned}$$

未知数 (A^j,B^j,C^j) 共有 $\sum_{j=1}^{s}m_j+2\sum_{j=1}^{t}k_j=n$ 个，$P(x)$ 可认为是 $(n-1)$ 次多项式，通分后比较两边 x^{n-1},Λ,x^0 的次数，得 n 个方程的方程组，恰好 n 个未知数，n 个方程，实际上它们是非退化的，能解出这 n 个未知数。具体问题中可用其它方法求出待定系数。

§ 5.5　三角函数有理式的积分

二元有理函数是形如 $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ 的函数，其中 $P(u,v)$ 和 $Q(u,v)$ 是二元多项式，即 u^iv^j 的有限线性组合，三角有理函数是形如 $R(\sin x,\cos x)$ 的函数，其中 $R(u,v)$ 为二元有理函数，它是由基本三角函数 $\sin x$，$\cos x$，tgx，$ctgx$ 经有限次四则运算所得的函数。

但 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x+5\cos^2 x}}$，$\sin x^2$，$\dfrac{\sin x}{x}$ 显然不属此列。

$I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ 一定可以积出来。令 $t=tg\dfrac{x}{2}$ （称为万能代换），或 $x=2arctg\,t$，注意到

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}\text{。}$$

所以 $I = \int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}$ **，这样变成通常的有理函数积分，一定可以积出来。但这种“万能公式”往往比较复杂，如果** $R(u,v)$ **有某种对称性，可以用简单地代换，具体地说**

如果 $R(u,-v) = -R(u,v)$ **，这时** $R(u,v) = vR_1(u,v^2)$ **，可用代换** $t=\sin x$ **。**

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int \cos x\, R_1(\sin x,\cos^2 x)\,dx$$
$$= \int R_1(t,1-t^2)\,dt \qquad (\sin x = t)\text{。}$$

若 $R(-u,v) = -R(u,v)$ **，这时** $R(u,v) = uR_1(u^2,v)$ **。 我们用代换** $t=\cos x$ **，**

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int \sin x\, R_1(\sin^2 x,\cos x)\,dx$$
$$= -\int R_1(1-t^2, t)\,dt \qquad (\cos x = t)\text{。}$$

化成有理函数积分，可以积出来。

若 $R(-u,-v) = R(u,v)$ **，这时** $R(u,v) = R_1\left(\frac{u}{v},v^2\right)$ **。我们用代换** $tg\,x = t$ **，**

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R_1(tg\,x,\cos^2 x)\,dx$$
$$= \int R_1(t,\frac{1}{1+t^2})\frac{dt}{1+t^2} \qquad (tg\,x = t)\text{。}$$

也化成有理函数积分，可以积出来。

上述三种代换一般比“万能代换”简单的多，使分子分母最高次减半。

例 1 $\quad I = \int\frac{dx}{5+4\sin x}$

解 　**令** $t = tg\frac{x}{2}$ **，则**

$$I = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}}dt = \int\frac{2}{5t^2+8t+5}dt$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{(t+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}=\frac{2}{3}arctg\frac{5t+4}{3}+C$$

$$=\frac{2}{3}arctg\left(\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C。$$

例 2 $I=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$

解 $I=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt \qquad (\sin x=t)$

$$=2\int\frac{dt}{1+t^2}-\int dt$$
$$=2arctgt-t+C$$
$$=2arctg\sin x-\sin x+C。$$

例 3 $I=\int\sin^n x\,dx$

解

$$I_n=-\int\sin^{n-1}x\,d\cos x$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}。$$

$$I_0=x+C$$

$$I_2=-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{x}{2}+C$$

$$I_4=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+C$$

$$I_1=-\cos x+C$$

$$I_3=-\frac{\sin^2 x\cos x}{3}-\frac{2}{3}\cos x+C$$

$$I_5=-\frac{\sin^4 x\cos x}{5}-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C$$

例 4 $I=\int\frac{\sin xdx}{a\cos x+b\sin x}$，　$J=\int\frac{\cos xdx}{a\cos x+b\sin x}$。

解 $bI+aJ=x+C$，

$$-aI+bJ=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\ln|a\cos x+b\sin x|+C$$

所以 $$I=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|]+C$$

$$J=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C$$

例 5 $I=\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx$　$(0<r<1$，$|x|<p$)。

解 $$I=(1-r^2)\int\frac{dt}{(1-r)^2+(1-r)^2t^2}\qquad (\ tg\frac{x}{2}=t\ )$$

$$=arctg\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C$$

$$=arctg\left(\frac{1+r}{1-r}tg\frac{x}{2}\right)+C\text{。}$$

§ 5.6 无理函数的积分

1．$I=\int R(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$，$m$ **正整数**，$ad-bc\neq 0$。**令** $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$，$x=\frac{dt^m-b}{a-ct^m}$，

$dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt$，**则**

$$I=\int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m},t\right)\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt$$

变成有理函数积分，可以积出来。

2．$I=\int x^m(a+bx^n)^p dx$　**二项式微分式积分**，a，b **为常数**，m，n，p **有理数。令**

$x^n=t$，$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$，**则**

$$I=\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}(\frac{a+bt}{t})^{p}\,dt$$

（I）当 p 是整数时，$(a+bt)^p$ 可展成 t 多项式，故可积出来；

（II）当 $\frac{m+1}{n}$ 为整数时，归结到前一类积分，也可积出来；

（III）当 $\frac{m+1}{n}+p$ 是整数时，也归结到前一类积分，可以积出来。

为便于记忆，这类积分都可变换成 $\int(a+bz)^p z^q dz$，当 p，q，$p+q$ 有一个为整数时，可以积出来；全都为非整数时，积不出来（切比雪夫证明的）。比如 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 就积不出来。

例 1　$I=\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

解　令 $\sqrt[6]{x+1}=t$，$I=6\int\frac{t^5-t^8}{1+t^2}dt$，**设** $\frac{t^5-t^8}{1+t^2}=P_6(t)+\frac{Bt+C}{1+t^2}$，$P_6(t)$ **可用除法得出：**

$$\begin{array}{r}
-1+0+1+1-1-1+1 \\
1+0+1\,\big)\overline{-1+0+0+1+0+0+0+0+0} \\
-)\ \ -1+0-1 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
1+1+0 \qquad\qquad\qquad \\
-)\ \ 1+0+1 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
1-1+0 \qquad\qquad \\
-)\ \ 1+0+1 \qquad\qquad \\
\hline
-1-1+0 \qquad \\
-)\ \ -1+0-1 \qquad \\
\hline
-1+1+0 \quad \\
-)\ \ -1+0-1 \quad \\
\hline
1+1+0 \\
-)\ \ 1+0+1 \\
\hline
1\ -1
\end{array}$$

所以

$$\frac{t^5-t^8}{1+t^2}=(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1)+\frac{t-1}{1+t^2}\text{，}$$

$$I=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\,arctg\,t+C$$

$$=-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+6(x+1)^{\frac{1}{6}}$$

$$+3\ln(1+(1+x)^{\frac{1}{3}})-6\,arctg(1+x)^{\frac{1}{6}}+C.$$

例 2 $I=\int\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$。

解 $I=\int x^{-1}(1+x^4)^{\frac{1}{2}}dx$，$\frac{m+1}{n}=\frac{0}{4}=0$**整数，可以积出来**

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}dx^2=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt \qquad (x^2=t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)+C。$$

3．Euler **代换，** $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$。

$R(u,v)$**是** u**，**v **的有理函数，总能积出来。有三种代换**

情形Ⅰ． $a>0$**，令** $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\mp\sqrt{a}x$**，**

情形Ⅱ． $c>0$**，令** $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$**，**

情形Ⅲ． $b^2-4ac>0$**，令** $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-l)$**，其中**

$$ax^2+bx+c=a(x-l)(x-m)。$$

Ⅰ． $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$

$$bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx，\quad x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}，$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}，\qquad dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt。$$

Ⅱ． $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

$$ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\,t\text{，}\quad x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}\text{，}\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{a-t^2}$$

$$dx=\frac{2(\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a)}{(a-t^2)^2}dt\text{。}$$

III． $ax^2+bx+c=a(x-l)(x-m)$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-l)$$

$$a(x-m)=t^2(x-l)$$

$$x=\frac{-am+lt^2}{t^2-a}\text{，}\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(l-m)t}{t^2-a}\text{，}\quad dx=\frac{2a(m-l)t}{(t^2-a)^2}dt\text{。}$$

在积分 $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx$ **的结果中，除有理函数的原函数（有理函数，**$\ln$**，**$arctg$**），再加上**$\sqrt{ax^2+bx+c}$**就行了。**

例 3 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解　我们已经知道$I=\arcsin\frac{x}{a}+C$**，用 Euler 代换，这里**$c(=a^2)>0$**，**$a^2-x^2=(a-x)(a+x)$**，用 II，III都可，我们用III，令**$\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$**，**$a+x=t^2(a-x)$**，**

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1}\text{，}\quad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}\text{，}\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}\text{，}$$

所以　$$I=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C\text{。}$$

由此我们有恒等式 $2arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$**，**$(|x|<a)$。

令$x=0$**，得**$c=2arctg1=\frac{p}{2}$。

如果用 II，令$\sqrt{a^2-x^2}=xt-a$**，则**$I=-2arctg\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$**。这时我们有恒等式**

$$-2arctg\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\begin{cases}\arcsin\frac{x}{a}-p\text{，} & 0<x<a\text{，}\\ \arcsin\frac{x}{a}+p\text{，} & -a<x<0\text{。}\end{cases}$$

另一种处理 $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的方法

设 $Y=ax^2+bx+c$，$\sqrt{Y}=y$，$R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=R_1(x)+R^*(x)\frac{1}{y}$，

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R_1(x)+R^*(x)\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

问题归结为如下三种积分，

I $\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

II. $\int\frac{dx}{(x-a)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$

III. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

II 中令 $x-a=\frac{1}{t}$**，II 变为 I，所以只要处理 I ,III。**

对 I，令 $\int\frac{P(x)}{\sqrt{Y}}dx=Q(x)\sqrt{Y}+l\int\frac{dx}{\sqrt{Y}}$**，两边求导得** $\frac{P(x)}{\sqrt{Y}}=(Q(x)\sqrt{Y})'+\frac{l}{\sqrt{Y}}$**，**

$P(x)=Q'(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+l$ **，阶**$(Q)<$**阶**(P)**，用待定系数法可定出** Q **和** l **。**

对III，① 当 x^2+px+q **与** ax^2+bx+c **只差一个倍数时，化为**

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2k+1}{2}}}dx\text{，}$$

是可以积出来的。

②否则，令 $ax^2+bx+c=a(x^2+p'x+q')$**，它有两个根** m **，** n **，令** $x=\frac{mt+n}{t+1}$ $(p\neq p')$ **或** $t=x+\frac{p}{2}$**，可积出来。**

例 4 $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

解 令$\sqrt{x^2-x+1}=t-x$，$x=\dfrac{t^2-1}{2t-1}$，$dx=\dfrac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$，

$$I=2\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|-\frac{3}{2(2t-1)}+C$$

$$=2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|$$

$$-\frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1)}+C\text{。}$$

例 5 $I=\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

解

$$I=\int\frac{x^3-2x^2+2x}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-2x+2}+l\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$x^3-2x^2+2x=(2ax+b)(x^2-2x+2)+(ax^2+bx+c)(x-1)+l$$

$$\begin{cases} 3a=1 \\ -4a+b+b-a=-2 \\ 4a-2b-b+c=2 \\ 2b-c+l=0 \end{cases}$$

解之得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{6}$，$c=\dfrac{1}{6}$，$l=\dfrac{1}{2}$。

$$I=\frac{1}{6}(2x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$$

$$=\frac{1}{6}(2x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})+C\text{。}$$

习题：

5.1 **已知 $f(x)$ 满足给定的关系式，试求 $f(x)$：**

(1) $xf'(x)=1 \quad (x>0)$ ；　　(2) $\dfrac{f'(x)}{x}=1 \quad (x>0)$ ；

(3) $f(x)f'(x)=1 \quad (x>0)$；　(4) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1 \quad (f(x)>0)$。

5.2　求下列不定积分：

(1) $\int x^2\sqrt{x}dx$；　(2) $\int \dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}dx$；

(3) $\int (\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{4}{\sqrt{x^3}})dx$；　(4) $\int (x^2+1)^2 dx$；

(5) $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)dx$；　(6) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}dx$；

(7) $\int (\dfrac{1-x}{x})^2 dx$；　(8) $\int e^x(1-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx$；

(9) $\int \dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$；　(10) $\int (2^x+3^x)^2 dx$；

(11) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$；　(12) $\int (\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}})dx$；

(13) $\int \dfrac{3x^2}{1+x^2}dx$；　(14) $\int \dfrac{dx}{x^4(1+x^2)}$。

提示：(13)，(14) 题的分子加一项减一项。

5.3　**求下列不定积分：**

(1) $\int (5\sin x-3\cos x)dx$；　(2) $\int \dfrac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$；

(3) $\int tg^2 x dx$；　(4) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$；

(5) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$；　(6) $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$。

5.4　**用线性代换计算下列积分：**

(1) $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$；　(2) $\int \sin\dfrac{x}{2}dx$；

(3) $\int \cos ax dx$；　(4) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 ax}$；

(5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 7x}$；　(6) $\int \dfrac{dx}{3x-4}$；

(7) $\int \dfrac{xdx}{1-x}$；　(8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$；

(9) $\int\sqrt[3]{1-3x}dx$；　(10) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-3x}dx$；

(11) $\int\frac{dx}{2+3x^2}$；　(12) $\int\frac{dx}{2-3x^2}$；

(13) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$；　(14) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$；

(15) $\int\frac{dx}{1+\cos x}$；　(16) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$。

5.5 **用适当代换求下列积分：**

(1) $\int x(1+x^2)^5dx$；　(2) $\int\frac{xdx}{1+x^2}$；

(3) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$；　(4) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $\int xe^{-x^2}dx$；　(6) $\int\frac{x}{4+x^4}dx$；

(7) $\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$；　(8) $\int\frac{dx}{1+e^x}$；

(9) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$；　(10) $\int 3^xe^xdx$；

(11) $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^x\cdot b^x}dx$；　(12) $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$；

(13) $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$；　(14) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$；

(15) $\int\frac{dx}{\sqrt{x\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$；　(16) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(17) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$；　(18) $\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

5.6 **求下列三角函数的积分：**

(1) $\int\cos 2x\cdot\sin 4xdx$；　(2) $\int\sin x\cdot\sin 3xdx$；

(3) $\int\cos 4x\cdot\cos 7xdx$；　(4) $\int\sin\frac{x}{4}\cos\frac{3x}{4}dx$；

(5) $\int\cos^2 wxdx$；　(6) $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$；

(7) $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$；　(8) $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$；

（9） $\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}dx$ ；　　（10） $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$ 。

5.7　**求下列有理函数的积分：**

（1） $\int \frac{x+1}{1-x}dx$ ；　　（2） $\int \frac{-x^2+2x-5}{x-1}dx$ ；

（3） $\int \frac{x^3}{3+x}dx$ ；　　（4） $\int \frac{5-4x}{3x-2}dx$ ；

（5） $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2+1}{(x-2)^4}dx$ ；　　（6） $\int \frac{1+x^2}{(1+x)^2}dx$ 。

提示：（5），（6）题利用泰勒公式。

5.8　**用适当代换求下列函数积分（$a>0$）：**

（1） $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$ ；　　（2） $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ ；

（3） $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ ；　　（4） $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$ ；

（5） $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ ；　　（6） $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ 。

5.9　**求下列函数积分（$a>0,b>0$）：**

（1） $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ ；　　（2） $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$ ；

（3） $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ；　　（4） $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ ；

（5） $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$ ；　　（6） $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ ；

（7） $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ ；　　（8） $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$ ；

（9） $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$ 。

5.10　**求下列不定积分：**

（1） $\int \ln(1+x^2)dx$ ；　　（2） $\int x^a \ln x dx \quad (a\neq -1)$ ；

（3） $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$ ；　　（4） $\int xe^{-3x}dx$ ；

（5） $\int x^2 e^{-2x} dx$；　　（6） $\int x\cos nx dx$；

（7） $\int x^2 \sin 2x dx$；　　（8） $\int x \operatorname{arctg} x dx$；

（9） $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$；　　（10） $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$；

（11） $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$；　　（12） $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$。

5.11　**求下列不定积分：**

（1） $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；　　（2） $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$。

5.12　**求下列不定积分：**

（1） $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$；　　（2） $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$。

5.13　**求下列不定积分：**

（1） $\int \sin(\ln x)dx$；　　（2） $\int \cos(\ln x)dx$；

（3） $\int xe^x \cos x dx$；　　（4） $\int xe^x \sin x dx$。

5.14　**建立递推公式：**

（1） $I_n = \int \sin^n x dx$；　　(2) $I_n = \int x^n e^{-x} dx$；

(3) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　(4) $I_n = \int x^n (\ln x)^n dx$($m$**固定**）。

5.15　**求下列函数的积分：**

（1） $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$；　　（2） $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$；

（3） $\int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx$；　　（4） $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+1}dx$；

（5） $\int \frac{1}{x^2+4x+2}dx$；　　（6） $\int \frac{1}{8-2x-x^2}dx$；

（7） $\int \frac{x^3}{x^4+5x^2+4}dx$；　　（8） $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-x-2}dx$。

5.16　**求下列函数的积分：**

（1） $\int \frac{dx}{x^2+4x+12}$；　　（2） $\int \frac{2x^3+3x-2}{1+x^2}dx$；

(3) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$； (4) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$；

(5) $\int \frac{dx}{x^4-1}$； (6) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$。

5.17 **求下列函数的积分：**

(1) $\int tgx \cdot \sin^2 xdx$； (2) $\int \cos x \cdot \sin^2 xdx$；

(3) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$； (4) $\int tg^3 xdx$；

(5) $\int \sin^5 xdx$； (6) $\int \cos^4 x \sin^3 xdx$；

(7) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$； (8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$；

(9) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$； (10) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx$。

5.18 **求下列函数的积分：**

(1) $\int tg^3 x \cdot \sec^2 xdx$； (2) $\int \sec^4 xdx$；

(3) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$； (4) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$；

(5) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$； (6) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$。

5.19 **求下列函数积分：**

(1) $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$； (2) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$；

(3) $\int \frac{dq}{2\sin q-\cos q}$； (4) $\int \frac{dq}{1+r^2-2r\cos q}$ $(0<r<1)$。

5.20 (1) **求积分：**

$\int \frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx$； $\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$；

(2) **求积分**

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx。$$

5.21 **建立递推公式：**

(1) $I_n=\int \cos^n xdx$； (2) $I_n=\int \frac{\sin nx}{\sin x}dx$。

5.22 **求下列不定积分：**

(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$； (2) $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$；　　(4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$。

5.23 **求下列积分：**

(1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$；　　(2) $\int \sqrt{x+\frac{1}{x}}dx$。

5.24 **求下列不定积分：**

(1) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$；　　(4) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}}$。

5.25 **求下列不定积分：**

(1) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$；　　(2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}dx$。