第三章 幂级数

在函数级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$中令$u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$，为最简单的幂级数，则我们得到形为$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$的函数级数，称之为$x_0$处展开的幂级数．本章中我们将讨论幂级数的性质，并证明从可导性而言，幂级数构成所有函数中最好的一类函数．幂级数更进一步的理论将在《复变函数论》中讲授．

从形式上看，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$是多项式的推广，利用变换$x=x-x_0$，我们可以仅考虑形如$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的幂级数．

§3．1 幂级数的收敛半径

定理 5.1.1 设幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$x_0$收敛，则对于任意$0\le r<|x_0|$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-r,r]$上绝对一致收敛．

证明：当$x\in[-r,r]$时，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$．$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$收敛，因而$a_n x_0^n\to 0$，得存在$M$，使对于任意$n$，恒有$|a_n x_0^n|\le M$，因而$|a_n x^n|\le M\left(\frac{r}{x_0}\right)^n$．但$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\frac{r}{x_0}\right)^n$收敛，由控制收敛判别法，得$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-r,r]$上绝对一致收敛．

设$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$是给定的幂级数，定义

$$R=\sup\left\{|x| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{在} x \text{收敛}\right\}.$$

由于$x=0$时总是收敛的，因而R是有意义的，并且$0\le R\le+\infty$．R称为幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛半径，其意义是

定理 5.1.2：设$R>0$是幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，则对于任意$0<r<R$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在$[-r,r]$上一致收敛；而对$x\notin[-R,R]$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在x发散.

例 5.1.1：令$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$，对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$，由达朗倍尔判别法，$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{n+1}\to 0$，因而$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$收敛，得$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛半径为$R=+\infty$.

例 5.1.2：对任意$x\neq 0$，由$n!x^n\to\infty^n$得$\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$发散，因而其收敛半径为$R=0$.

例 5.1.3：$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$在$(-1,1)$内收敛，在$x=1$时发散，因而其收敛半径$R=1$. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$在收敛区域$(-1,1)$的一个端点$x=-1$收敛，而在另一端点$x=1$时发散.

例 5.1.4：$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ 在$(-1,1)$内收敛，但在两个端点都不收敛.

例 5.1.5：利用达朗倍尔判别法不难看出，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$在$|x|<1$时收敛，$|x|>1$时发散，因而收敛半径为 1，其在收敛区域$(-1,1)$的两个端点都是收敛的.

达朗倍尔判别法可以用来求给定幂级数的收敛半径.

定理 5.1.3：对给定的幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，如果$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$，则$R=\frac{1}{r}$.

证明：如果$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$，则当$|x|<\frac{1}{r}$时$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=r|x|<1$，因而$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛. 而$|x|>\frac{1}{r}$时$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=r|x|>1$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 发散，因而$R=\frac{1}{r}$.

同理，我们也可用 Cauchy 判别法给出幂级数的收敛半径.

设R是幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，则$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在$(-R,R)$中任意闭区间上一致收敛

（称$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$上内闭一致收敛）. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[-R,R]$外发散，在$\pm R$处可能发散也可能收敛.

定理 5. 1. 4：$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$R$（$-R$）处收敛的充分必要条件是$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[0,R)$（$(-R,0]$）上一致收敛.

证明：设$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$收敛，则$x\in[0,R)$时，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$收敛，因而对$x\in[0,R)$一致收敛. 而$\left(\frac{x}{R}\right)^n$在$x\in[0,R)$时是单调有界的，由 Abel 判别法，得$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[0,R)$上一致收敛.

反之，设$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$在$[0,R)$上一致收敛，由 Cauchy 准则，$\forall e>0,\exists N$，使$n>N, k=1,2,\cdots$时，有$\left|\sum_{i=n}^{n+k} a_i x^i\right|<e$在$[0,R)$上成立. 令$x\to R$，得$\left|\sum_{i=n}^{n+k} a_i R^i\right|\le e$. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$满足 Cauchy 准则，因而收敛.

§5．2　收敛幂级数的性质

函数$f(x)$称在点x_0处可展为幂级数，如果存在幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$使在$x_0$邻域上$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. 这时$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$称为$f(x)$在$x_0$处的 Taylor 级数. 如果$x_0=0$，则其又称为$f(x)$的 Maclaurin（麦克劳林）级数. 称$f(x)$在$(a,b)$上可展为幂级数. 如果$f(x)$在$(a,b)$的每一点都可展为幂级数.

下面定理是关于收敛幂级数的基本定理.

定理 5. 2. 1：幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$与其逐项求导所得的幂级数

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

有相同的收敛半径.

证明：利用洛必达法则易得$\sqrt[n]{n} \to 1$. **因此** $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

设 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ **是** $f(x)$ **在** x_0 **处展开的幂级数，设** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ **的收敛半径为** R**，则对于任意** $0<r<R$**，** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ **与** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ **都在** $[-r,r]$ **上一致收敛，因此** $f(x)$ **可导并可逐项求导. 但另一方面，** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ **逐项求导所得的幂级数与** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ **仍有相同的收敛半径. 因此仍然可以逐项求导，以此类推，我们得到**

定理 5. 2. 2：设 $f(x)$ **在** (x_0-R, x_0+R) **上可展为收敛半径为** R **的幂级数** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$**，则** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ **任意阶逐项求导所得的幂级数有相同的收敛半径**R. **因此** $f(x)$ **任意阶可导，并且** $f^{(m)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(a_n (x-x_0)^n\right)^{(m)}$. **特别地，如果令** $x = x_0$**，则得** $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$**，即**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

以 $C^w(a,b)$ **表示** (a,b) **上可展为幂级数的函数全体. 上面定理表示** $C^w(a,b) \subset C^\infty(a,b)$. **但反之并不成立.**

例 5. 2. 1：令 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **利用洛必达法则我们知道，** $f(x)$ **任意阶可导，并且** $f^{(n)}(0) = 0,\ n = 0,1,2,\cdots$. **如果** $f(x)$ **在** $x=0$ **处可展为幂级数，则必须**

$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 在 $x=0$ 的邻域成立. 但 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0$，矛盾. 因而 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域上不能展为幂级数.

例 5.2.2：令 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则对于任意 $x_0\neq 1$，

$$f(x)=\frac{1}{1-x_0-(x-x_0)}=\frac{1}{1-x_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1-x_0}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n$$

在 $(1,2x_0-1)$ 上成立，因而 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$ 上可展为幂级数.

§5．3　基本初等函数的幂级数展开

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上任意阶可导. 设 $x_0\in(a,b)$，利用 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，则我们得幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 如果 $f(x)$ 可在 x_0 的邻域上展为幂级数，则在此邻域上必须 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，即幂级数展开是唯一的. 但要使

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\text{，}$$

必须

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)=0.$$

令

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\text{，}$$

$R_n(x)$ 是 $f(x)$ n 阶展开的余项. 要使 $f(x)$ 在 x_0 邻域上可展为幂级数，其充分必要条件是在此邻域上 $R_n(x)\to 0$. 但这并不是总成立的.

例 5.3.1：令

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \equiv 0$，因此 $f(x)=R_n(x)$. $x\neq 0$ 时 $\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=f(x)\neq 0$， $f(x)$ 不能展为幂级数.

例 5. 3. 2：设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，取 $x_0>1$，则当 $x>2x_0-1$ 时， $f(x)$ 在 x_0 处的幂级数展开在 x 不收敛. 因而 $R_n(x)$ 不趋于零.

对于基本初等函数，利用 $R_n(x)$ 的拉格朗日余项公式或积分余项公式，我们可得到这些函数的 Taylor 展开. 这些展开不论在理论还是实际应用中都是十分重要的.

指数函数：设 $f(x)=e^x$，由 $f^{(n)}(x)=e^x$，利用拉格朗日余项公式 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(q\,x)}{(n+1)!}x^{n+1}$，得 $|R_n(x)|=\frac{e^{q\,x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$，其中 $0<q<1$. 因此 $\lim_{n\to+\infty}|R_n(x)|\le\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$，得 $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立.

对数函数：设 $y=\ln(1+x)$，则 $y'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$，收敛半径为 1. 由于其在 $(-1,1)$ 上是内闭一致收敛的，因而可逐项积分，即 $\forall x\in(-1,1)$，恒有

$$\ln(1+x)=\int_0^x(\ln(1+t))'dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

即 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 上成立. 任取 $R>0$，则

$$\ln(R+x)=\ln R+\ln\left(1+\frac{x}{R}\right)=\ln R+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

在 $(-R,R)$ 上成立.

三角函数：由 $\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n}{2}p\right)$，得

$$\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sin^{(k)}(0)x^k\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\,.$$

因而 $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立.

同理得 $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立.

幂函数：为了要得到幂函数在 $x=0$ 处的 Taylor 展开，我们将其表示为 $f(x)=(1+x)^a$ 的形式，其又称为二项式函数.

由

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n},$$

得 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开为

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

而 $\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!} \Big/ \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} = \frac{a-n}{n+1} \to 1$，因此其收敛半径为 1. 我们仅需在 $(-1,1)$ 上讨论其是否收敛到 $f(x)$.

如果直接利用拉格郎日余项，得

$$\left| f(x) - \left(1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n\right)\right| = R_n(x)$$
$$= \left|\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}(1+q x)^{a-n-1} x^{n+1}\right|,$$

其中 $0<q<1$. 但 $x\in(-1,1)$ 时，不能直接得到余项趋于零. 因此我们采用积分余项公式对余项进行估计.

在定积分中我们曾将 n 阶 Taylor 展开的余项用积分表示为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

利用 $|x|<1,\ t\in(0,x]$ 时 $\left|\frac{x-t}{x(1+t)}\right| \le 1$，我们得到

$$|R_n(x)| = \left|\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{a-n-1}(x-t)^n\,dt\right|$$
$$= \left|\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} x^n a \int_0^x (1+t)^{a-1} \frac{(x-t)^n}{x^n(1+t)^n}\,dt\right|$$
$$\le \left|\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!} x^n a \int_0^x (1+t)^{a-1}\,dt\right| \le 1.$$

上面已证 $|x|<1$ 时 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$ 收敛，因而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n=0\,.$$

而$\int_0^x(1+t)^{a-1}dt$有界，从而我们得到$\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$．因而在$(-1,1)$上

$$(1+x)^a=1+a\,x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

反三角函数：由

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1),$$

得

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan t)'dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

同理

$$\begin{aligned}(\arcsin x)'&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\&=1-\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2+\cdots\\&\quad+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{2!}(-x^2)^n+\cdots,\end{aligned}$$

逐项积分得

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

最后还要说明的是，如果$f(x),g(x)$在某点x_0上可展为幂级数，则$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x)\neq 0)$可展为幂级数．如果$f(u)$在$u_0=g(x_0)$邻域上可展为幂级数，则$f\circ g(x)$在$x_0$上可展为幂级数.

§5．4　幂级数的应用

近似计算

由于幂级数仅有加法和乘法，因此常用于作近似计算、给出函数的函数表等.

例 5. 4. 1：在

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

中令 $x=1$，得

$$\frac{p}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots，$$

可用作 p 的近似计算. 由于其是交错级数，因而有

$$\left|\frac{p}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n-1}\right)\right|\le\frac{1}{2n+1}.$$

如果在上面级数中令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，则得

$$\frac{p}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right).$$

作为 p 的计算，其收敛速度更加一些.

定积分计算

例 5. 4. 2：求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

解：由于 $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n x^{2n}$ **在任意有界区间上一致收敛，因而可逐项积分，得**

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n+1}.$$

求解常微分方程

例 5. 4. 3：求函数 $y=f(x)$，**使得** $(1-x^2)y''=-2y$.

解：用待定系数法. 设有解 $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ **，由于幂级数可逐项求导，得**

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}=(-2)\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

比较对应系数，解得

$$y=a_0(1-x^2)-a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n+1}，$$

其中 a_0,a_1 为任意常数. 由 $y(0)=a_0$, $y'(0)=a_1$ 的函数的初始值确定.

§5．5 Weierstrass 逼近定理

如果函数 $f(x)$ 可在 $(-R,R)$ 上表示为收敛半径为 R 的幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 令 $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ，则 $s_n(x)$ 是一 n 次多项式，并且在 $(-R,R)$ 中任意闭区间 $[a,b]$ 上 $\{s_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$.

如果我们不要求$\{s_n(x)\}$是某一幂级数的部分和，而仅要求 $s_n(x)$ 是一个 x 的多项式. 我们的问题是什么样的函数 $f(x)$ ，能存在一列多项式$\{s_n(x)\}$，使在$[a,b]$上，$\{s_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$. 如果对 $f(x)$ ，存在这样的多项式列$\{s_n(x)\}$，由 $s_n(x)$ 连续，得 $f(x)$ 必须在$[a,b]$上连续. Weierstrass 证明了连续同时也是一个成分条件.

Weierstrass 逼近定理：对闭区间$[a,b]$上的任意连续函数 $f(x)$ ，存在一列多项式$\{s_n(x)\}$，使在$[a,b]$上，$s_n(x)$一致收敛于 $f(x)$.

下面的证明是由伯恩斯坦给出的，其证明的许多想法我们还将在后面的 Fourier 级数中多次用到.

引理 5. 5. 1：$\forall x\in \mathbf{R}$，$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \equiv 1$.

证明：由二项式定理得

$$1=(x+(1-x))^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} .$$

引理 5. 5. 2：$\forall x\in \mathbf{R}$，$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4}$.

证明：由$(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k$ ，对 z 求导并乘 z ，得

$$nz(1+z)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k z^k . \tag{1}$$

再对 z 求导并乘 z ，得

$$nz(1+nz)(1+z)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k . \tag{2}$$

将 $z=\frac{x}{1-x}$ 代入（1），（2），并乘 $(1-x)^n$ ，得

$$nx=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}\text{，}$$

$$nx(1-x+nx)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\ =&\sum_{k=0}^{n}(k^2-2nkx+n^2x^2)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\ =&nx(1-x+nx)-2n^2x^2+n^2x^2=nx(1-x)\le\frac{n}{4}.\end{aligned}$$

Weierstrass 定理的证明：先证$[a,b]=[0,1]$. **令**$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ **，**

我们希望证明在$[0,1]$**上** $s_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

令 $M=\sup\{|f(x)|\mid x\in[0,1]\}$. **由** $f(x)$ **在**$[0,1]$**上一致连续知，**$\forall e>0,\exists d>0$ **，使** $|x'-x''|<d$ **时，** $|f(x')-f(x'')|<e$.

对于任意 $x\in[0,1]$ **，将** $k=0,1,2,\cdots,n$ **分为两组**.

$$A=\left\{k\,\middle|\,\left|\frac{k}{n}-x\right|<d\right\}\text{；}$$

$$B=\left\{k\,\middle|\,\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge d\right\}.$$

则

$$\begin{aligned}|f(x)-s_n(x)|&=\left|\sum_{k=0}^{n}f(x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right|\\ &\le\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\ &=\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

$$\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{e}{2}\sum_{k\in A}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\le \frac{e}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{e}{2}.$$

而由$k\in B$时，$\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge d$．因此$\frac{(nx-k)^2}{n^2d^2}\ge 1$，得

$$\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \le 2M\sum_{k\in B}\frac{(nx-k)^2}{n^2d^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\le 2M\cdot\frac{1}{n^2d^2}\cdot\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\le 2M\cdot\frac{1}{n^2d^2}\cdot\frac{n}{4}=\frac{M}{2nd^2}.$$

因此只要取$n>\frac{M}{2ed^2}$，就有

$$\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<\frac{e}{2}.$$

得$n>\frac{M}{2ed^2}$时，$\left|f(x)-s_n(x)\right|<e$．作平移$y=\frac{x-a}{b-a}$将$[a,b]$移到$[0,1]$，则在$[a,b]$上

$s_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\rightrightarrows f(x)$.

习题

5.1 **求下列幂级数的收敛半径，并讨论收敛区间端点的收敛性**.

（1）$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{\sqrt{n}}}$；　　（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$；

（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt[n]{n}}x^n$；　　（4）$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$；

（5）$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$；　　（6）$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\quad(a,b>0)$；

（7）$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+2\cos\frac{np}{4}\right)^n x^n$；　　（8）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{np}{4}\right)^n}{\ln n}(x+1)^n$；

（9）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{5^n+7^n}$；　　（10）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^p}$；

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$；　　(12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$；

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n+(-3)^n}{n}(x+1)^n$；　　(14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(15) $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} x^n \quad (0<a<1)$；　　(16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}x^n$；　　(18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

5.2．**设** $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ **的收敛半径为** $R>0$ **，求**

$$F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$$

的幂级数展开式，并证明新幂级数的收敛半径不会比 R **大**.

5.3．**设** $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k\right| \le M \quad (n=0,1,\cdots;x_1>0)$. **求证：当** $0<x<x_1$ **时，有**

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ **收敛；**

(2) $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| \le M$.

5.4．**两个收敛半径相等的幂级数，问经过相加和相乘后得到的幂级数的收敛半径如何变化**?

5.5．**设**

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}.$$

(1)　**求证：** $f(x)\in C[-1,1],\ f'(x)$ **在** $(-1,1)$ **内连续；**

(2)　**求证：** $f(x)$ **在** $x=-1$ **点可导；**

(3)　**求证：** $\lim_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty$ **；**

(4)　**求证：** $f(x)$ **在** $x=1$ **点不可导**.

5.6．**给定零阶贝塞耳函数：**

$$y=J_0(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

求证它在实轴上满足方程

$$xy'' + y' + xy = 0 .$$

5. 7．**用逐项微分和逐项积分求下列级数的和：**

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!2^n}x^n$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$；

(7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$；

(8) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n+1}$；

(9) $\sum_{k=0}^{+\infty} (2^{k+1}-1)x^k$；

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$；

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{n!}x^{2n+1}$；

(12) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{2^k}$；

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

5. 8．**将下列函数在指定点附近展开为幂级数**.

(1) $\frac{1}{a-x}, \quad x = b \neq a$；

(2) $\frac{x^2}{x^2-3x+1}, \quad x = 2$；

(3) $\frac{1}{1-x-x^2}, \quad x = 2$；

(4) $(1+x)e^{-x}, \quad x = 0$；

(5) $\ln\frac{1}{2+2x+x^2}, \quad x = -1$；

(6) $\ln^2(1-x), \quad x = 0$；

(7) $\arctan\frac{2x}{1-x^2}, \quad x = 0$.

5. 9．**利用基本初等函数展式，求下列函数的幂级数，并说明收敛区间：**

(1) $(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$；

(2) $\ln(1+x+x^2+x^3)$；

(3) $\frac{1}{1-3x+2x^2}$；

(4) $x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$；

5. 10．**利用逐项求导和逐项积分证明下列函数展式成立：**

(1) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \le 1)$；

（2） $\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\dfrac{x^{2n+1}}{2^n(2^n+1)}\quad(|x|\le\sqrt{2})$.

5. 11．**利用幂级数相乘求下列函数展开式：**

（1） $\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)}$ ；　　（2） $(\arctan\ x)^2$.

5. 12．**设** $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\quad(k=0,1,\cdots,|x|\le a)$. **求证：**

（1） $f(x)$ **可以在** $(-a,a)$ **上展成幂级数；**

（2） $f(x)$ **可以开拓到** $(-\infty,+\infty)$ **，且在** $(-\infty,+\infty)$ **上无穷次可微**.

5. 13．**给定数列** $\{a_n\}$ **，对应有级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$. **求证：**

（1）**若级数在** x_1 **点收敛，则** $x>x_1$ **时也收敛；**

（2）**若级数在** x_2 **点发散，则** $x<x_2$ **时也发散；**

（3）**存在** c （c **可以为无穷），级数当** $x>c$ **时收敛，当** $x<c$ **时发散，** c **称为发散指标；**

（4）**级数在** $x\ge c+e\ (e>0)$ **上一致收敛；**

（5）**级数在** $x\ge c+1+e\ (e>0)$ **上绝对一致收敛**.