第三章 投资收益分析

收益 (yield)——投资者在一定的时间内将一定的资本进行投资活动所取得的收入

收益的衡量——考虑投资价值的变化量

投资和融资活动是金融活动中两个主要的部分，从基本现金流的角度看有很多一致的地方，而投资活动往往更直观和线条清晰。

§3.1 基本投资分析

贴现现金流分析(Discounted Cash Flows，DCF 分析)

投资过程的刻画：

投资活动最简单的情形只有两个个体，如：投资者与市场、投资基金(fund)的投资者与基金本身

同样的一次现金流发生，对双方来说流量相同，但流向相反，如：存款(deposit)或缴费(contribution)，对投资者来说资金向外流出，而对投资基金来说资金则向内流入

- C (contribution)

  如果$C>0$，表示投资者有一笔净流出（投资基金有一笔净流入）

  如果$C<0$，则表示投资者有一笔净流入（投资基金有一笔净流出）

- R (return)

  如果$R>0$，则表示投资者有一笔净流入（投资基金有一笔净流出）

  如果$R<0$，则表示投资者有一笔净流出（投资基金有一笔净流入）

对于同一笔业务，在同一时刻，因为所处角度的不同而得到的这两个量数值相同、符号相反

在投资期间的任何时刻 t，有

$$R_t = -C_t$$

例：某项目在第三年底收入 50000 元，但支出 100000 元，则有

$$C_3 = 50000$$

$$R_3 = -50000 = -C_3$$

问题的提出：

如果有一组现金流 C_t 或 R_t，如何评估项目的收益好坏？

关于 DCF 的定义：

现金流转贴现(discounted cash flow)——按一定的利率计算某一时期内现金流动的现值，进而计算投资收益的方法。

DCF 方法：

对任意一组分别于时刻 0，1，…，n发生的“收益”现金流R_0，R_1，R_2，…，R_n，以年利率 i 计算该投资回报流在投资之初的净现值（NPV / net present value）$P(i)$，即：

$$P(i)=\sum_0^n v^t R_t$$

注☞ R_t可以取正值，也可以取负值

若上述现金流不考虑当前投入，即 $R_0 = 0$，则从投资方来看，

$P(i)$ = 不同收益水平下该投资项目的价格

（以年利率 i 计算的当前的投入）

连续方式：

若现金流率为 R_t， $0 \le t \le n$，则有净现值为

$$P(i) = \int_0^n v^t R_t \, dt$$

例：考虑一个 10 年的投资项目：第一年初投资者投入 10000 元，第二年初投入 5000 元，然后，每年初只需维护费用 1000 元。

该项目期望从第六年底开始有收益：最初为 8000 元，然后每年增加 1000 元。

用 DCF 方法讨论该项目的投资价值。

解：用 DCF 方法的语言表述从投资方看该项目的现金流如下：

时刻 t	投入	收益	C_t	R_t
开　始　$t=0$	10000	0	10000	-10000
第 1 年底 $t=1$	5000	0	5000	- 5000
第 2 年底 $t=2$	1000	0	1000	- 1000
第 3 年底 $t=3$	1000	0	1000	- 1000
第 4 年底 $t=4$	1000	0	1000	- 1000
第 5 年底 $t=5$	1000	0	1000	- 1000
第 6 年底 $t=6$	1000	8000	- 7000	7000
第 7 年底 $t=7$	1000	9000	- 8000	8000

第 8 年底 $t=8$	1000	10000	- 9000	9000
第 9 年底 $t=9$	1000	11000	-10000	10000
第 10 年底 $t=10$	0	12000	-12000	12000
总计	23000	50000	-27000	27000

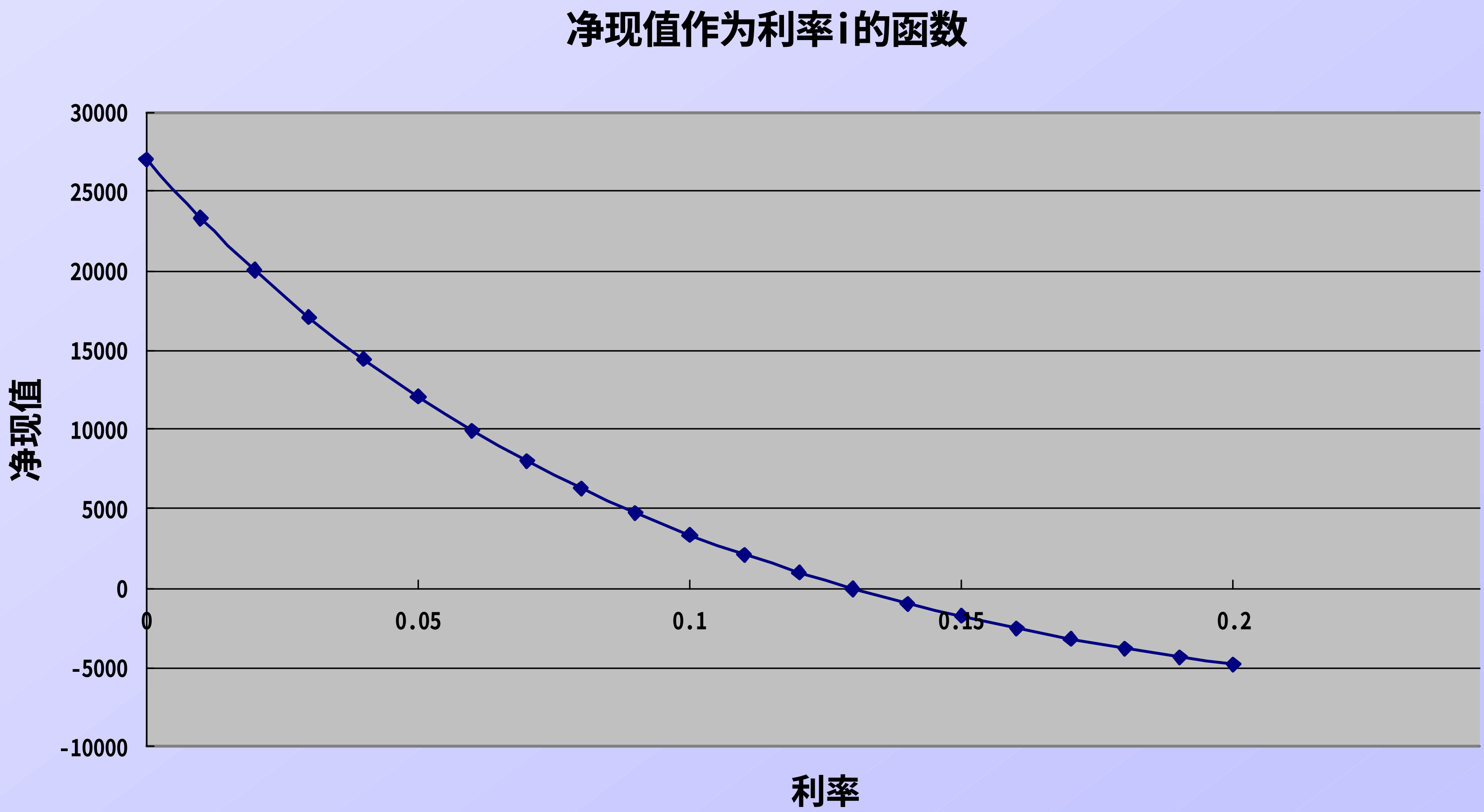
该项目前 10 年的 NPV 为：

$$P(i)$$

$$=1000(-10-5v-v^2-v^3-v^4-v^5+7v^6+8v^7+9v^8+10v^9$$

其中 $v=(1+i)^{-1}$

净现值$P(i)$为利率 i 的函数（也可以看作是贴现因子v的 10 次多项式），其相应的图形为：



收益率（yield rate）

❖ 在项目的“收益”现金流中，若利率 i 使得 $P(i)=0$，则称 i 为**收益率**

❖ 当收入资金的现值与投入资金的现值相等时，所对应的利率称为**收益率**

注☞ 如果项目以这样的（年）平均收益率进行经营，将保证项目的所有收支贴现到项目开始时刻的现值是平衡的。因此，收益率实际上是一种临界利率，它使得项目在开始时刻的价值收支平衡。

在金融中常用内部回报率(internal rate of return)表示收益率，如：

内部收益率(IRR)：评价投资项目的一种方法，是根据项目未来收益的现金流量贴现分析求出投资项目的收益率。当将其应用于投资项目现金流量中所反映的利润和成本流量贴现时，所得出的净现值为零，从而提供了投资收益率的盈亏临界点。在有资本限额的情况下多使用这种投资评价方法。

结论：内部收益率直观地评价了在投资期限内的可能年平均收益水平

例：只有一期的投资的内部收益率

$$R_0 + R_1 v = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{-R_0}{R_1 + R_0}$$

即为通常所计算的收益率。

例：讨论上例中项目前$n\ (=8, 9, 10)$年内部收益率

思考：前 7 年的内部收益率？

解：

前 8 年 IRR = 4.56%

前 9 年 IRR = 8.67%

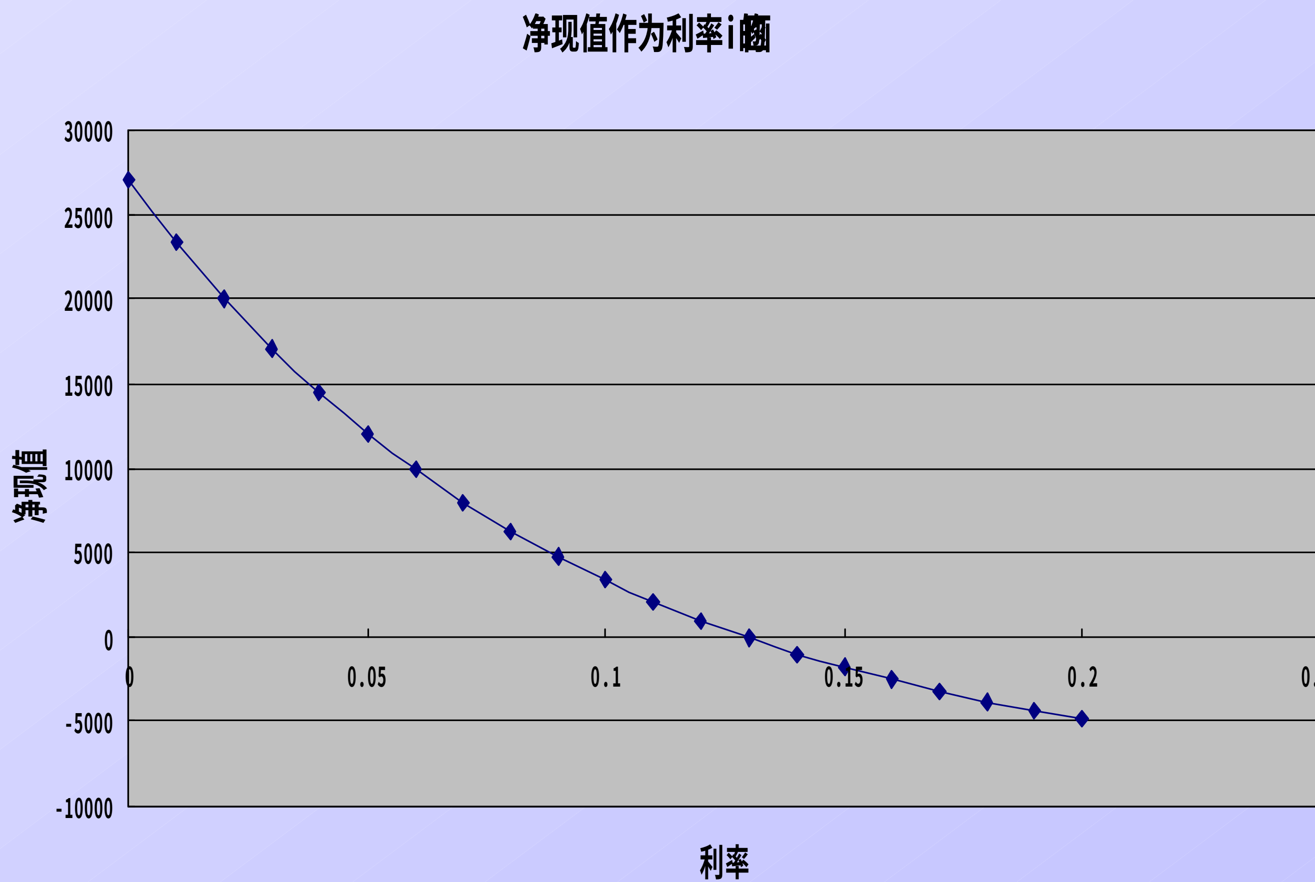
前 10 年 IRR = 12.96%

具体计算参见 Excel

结论：投资期限对内部收益率的影响是非常重要的

时刻	投入	收益	C	R
0	10000	0	10000	-10000
1	5000	0	5000	-5000
2	1000	0	1000	-1000
3	1000	0	1000	-1000
4	1000	0	1000	-1000
5	1000	0	1000	-1000
6	1000	8000	-7000	7000
7	1000	9000	-8000	8000
8	1000	10000	-9000	9000
9	1000	11000	-10000	10000
10	0	12000	-12000	12000
总计	23000	50000	-27000	27000

利率	净现值
0	27000
1.0%	23327
2.0%	20038
3.0%	17089
4.0%	14445
5.0%	12071
6.0%	9939
7.0%	8024
8.0%	6302
9.0%	4753
10.0%	3360
11.0%	2105
12.0%	977
13.0%	-40
14.0%	-955
15.0%	-1779
16.0%	-2521
17.0%	-3188
18.0%	-3789
19.0%	-4329
20.0%	-4815



时刻	投入	收益	C	R	前8期调整后R	前9期调整后R
0	10000	0	10000	-10000	-10000	-10000
1	5000	0	5000	-5000	-5000	-5000
2	1000	0	1000	-1000	-1000	-1000
3	1000	0	1000	-1000	-1000	-1000
4	1000	0	1000	-1000	-1000	-1000
5	1000	0	1000	-1000	-1000	-1000
6	1000	8000	-7000	7000	7000	7000
7	1000	9000	-8000	8000	8000	8000
8	1000	10000	-9000	9000	10000	9000
9	1000	11000	-10000	10000		9000
10	0	12000	-12000	12000		
总计	23000	50000	-27000	27000		
前n期	内部收益率	净现值				
8	4.56%	0.00				
9	8.67%	0.00				
10	12.96%	0.00				

例：考虑两种可选的投资项目

A) 投资 5 年，每年的利率为 9%

B）投资 10 年，每年的利率为 8%

如果两种投资的收益无差异，计算项目 A 在 5 年后应将资金用于年利率为多少的投资？

解：设所求利率为i，则应有

$$(1+0.09)^5(1+i)^5=(1+0.08)^{10}$$

解得 $i=7.01\%$

即：

如果项目 A 在 5 年后的再投资收益率大于 7.01%，则项目 A 优于项目 B；

如果项目 A 在 5 年后的再投资收益率小于 7.01%，则项目 A 比项目 B 的收益差；

当项目 A 在 5 年后的再投资收益率等于 7.01% 时,项目 A 与项目 B 在 10 年内的投资收益都是 8%。

注☞ 再投资问题

收益率的存在性和唯一性

思考：对于一组确定的现金流，它的内部收益率是否总是存在且唯一的？

注☞ 内部收益率既可以不存在，也可以是存在但不是唯一的。

例：$R_0 = -100$，$R_1 = 230$，$R_2 = -133$

则 NPV 为：

$$P(i) = -100 + 230v - 133v^2$$

$$(1+i)^2-2.3(1+i)+1.33=0$$

该方程无实数解，从而无法求得内部收益率。

例： $R_0=-100$，$R_1=230$，$R_2=-132$

则 NPV 为：

$$P(i)=-100+230v-132v^2$$

$$(1+i)^2-2.3(1+i)+1.32=0$$

由此可解得 10%以及 20%两种收益率，相应的含义是：

若第一年的收益率为 10%（20%），则 100 元在第一年底的价值为 110（120）元，“取出” 230 元，实际透支 120（110）元，透支部分以收益率 10%（20%）计算，在第二年底的价值为 132 元。

注☞ 根据 Descarte 法则，收益率的个数最多为现金流量改变方向的次数（Descarte 符号法则见附录）

常见的现金流的情形

项目中所有的现金流动只改变一次方向，即：

——前期业务所有净资金都是相同的流向

——后期业务都是相反方向的净资金流向

即：存在$0<k<n$，使得

——当 $t=0,1,\ldots,k$ 时，有 $R_t\le 0$

——当 $t=k+1,k+2,\ldots,n$ 时，有 $R_t\ge 0$

结论：此时内部收益率存在且是唯一的

注☞ 在上例中有 $k=5, n=10$

未结投资价值（outstanding balance）

- ❖ 在投资中间的每个时刻既有已发生的现金流，也有未发生的现金流
- ❖ 投资收益分析可以在投资期间的各个时刻进行
- ❖ 投资价值的两种表示方法：回溯法以及预期法

B_t —— 时刻 $t\ (0 \le t \le n)$的**未结投资价值**

方法一：**回溯法**（retrospective）

$$B_t^r = \sum_0^t (1+i)^{t-s} C_s, \quad t = 0, 1, 2, \dots, n$$

方法二：预期法（prospective）

$$B_t^p = \sum_{s=t+1}^{n} v^{s-t} C_s, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, n$$

结论：两种方法都表示投资在时刻 t 的价值，并且当所取利率 i 为内部收益率时，两种计算方法等价。

末结投资价值可以由递推的方法逐步计算：

$B_0 = C_0$ 以及

$$B_t = B_{t-1}(1+i) + C_t \qquad 1 \le t \le n$$

注☞ 从投资者看，$B_t > 0$ 表示负债，$B_t < 0$ 表示盈利

投资项目的内部收益率可以看成是使现金流的终值（投资结束时的未结投资价值）为零的隐含收益率，即使得

$$B_n = 0$$

的解，该收益率使投资在第 n 个时刻恰好达到累积收支平衡。

应用B_t来判断收益率的唯一性：

如果对所有 $t=0,1,\ldots,n-1$，有$B_t>0$， $B_n=0$，则内部收益率 i（$-1<i<1$）是唯一的。

分析：假设不然，则同时存在两个内部收益率 i 和 j（$i<j$）。

设 i 和 j 在时刻 t 对应的未结投资余额分别为 B_t和B_t'，$t=0,1,\ldots,n$，则有

$$B_0' = B_0 = C_0$$

$$
\begin{aligned}
B_1' &= B_0'(1+j)+C_1 \\
&= B_0(1+j)+C_1 \\
&> B_0(1+i)+C_1 = B_1
\end{aligned}
$$

对于一般的$k\ (2 \le k \le n)$，由$B_{k-1}' > B_{k-1}$可得：

$$
\begin{aligned}
B_k' &= B_{k-1}'(1+j)+C_k \\
&> B_{k-1}(1+j)+C_k \\
&> B_{k-1}(1+i)+C_k = B_k
\end{aligned}
$$

从而最终将有

$$
B_n' > B_n = 0
$$

显然，这与j是内部收益率矛盾。

注☞ 下面的例子表明，有时侯利用内部收益率不能描述投资的收益情况。

例：甲以年利率 10%从乙处融资 1 万元，期限一年；同时，甲将这笔资金投资于年利率 12%的项目。问：在这个投融资项目中甲的收益率为多少？

解：对甲来说，有：

$$B_0 = 10000 - 10000 = 0$$

$$C_1 = 10000 \times 0.10 - 10000 \times 0.12 = -2000$$

$$B_1 = 0 \times (1 + i) - 2000 = -2000$$

从而不存在 i，使 $B_1=0$，即：对于任何的收益率 i 都不能使甲在投资结束时的未结余额为零。

讨论：甲在没有净投入的条件下却有净收入 2000 元，没有一个收益率可以反应这一点。

甲的投资效果是非常好的，但甲也可能做的更好，比如如果甲能够以年利率 15%投资，则甲的利润为 5000 元。同样地，也没有一个收益率可以表示这两种投资的差异。

结论：在某些情况下，从定义出发计算的收益率无法表示投资的收益效果。

例：已知某账户的当前余额为 100 万元，在第一年底提出 150 万元，在第二年底又投入 90 万元。计算该帐户的收益率。

解：由于

$$B_2 = -1{,}000{,}000(1+i)^2 + 1{,}500{,}000(1+i) - 900{,}000$$
$$= -10{,}000[100i^2 + 50i + 40] < 0$$

从而对于任何收益率 i 都无法使得 $B_2 = 0$，该项目的收益情况无法由内部收益率刻画。

再投资分析

再投资——本金第一次计息后的利息收入以新的投资利率进行的投资

❖ 一次性投资的再投资分析

1）设初始投资为 1 元，每年（1 个计息期）的直接投资利率为 i

2）投资的回报方式为：逐年（1 个计息期）收回利息，结束时收回本金

3）将每年的利息收入以再投资利率j进行再投资

流程图如下：

	0	1	2	… …	n
原始投资	1				
利息收入		i	i	……	i
本金收回					1

思考：投资结束时（第 n 年底）的总收益 = ？

分析：因为利息收入可以进行再投资，从而收入现金流等价于金额为 i 的 n 次期末年金（再投资利率 j）与 n 期期末的 1 元之和，即投资的累积值为：

$$1+is_{\overline{n}|j}$$

以下分情形讨论

情形 1：当再投资利率 $j=i$，则上式等于$(1+i)^n$，即为一般的终值计算公式，从而再投资下的最终收益与直接投资的收益相等

情形 2：当再投资利率 $j > i$时，有

$$1 + is_{\overline{n}|j} > 1 + is_{\overline{n}|i} = (1+i)^n$$

从而再投资使得最终收益大于直接投资收益

情形 3：当再投资利率 $j < i$时，有

$$1 + is_{\overline{n}|j} < 1 + is_{\overline{n}|i} = (1+i)^n$$

从而再投资使得最终收益小于直接投资收益

在考虑再投资时，**实际收益率**（用 r 表示）应介于直接投资收益率 i 与再投资收益率 j 之间

实际收益率的计算：

$$(1+r)^n = 1 + i\, s_{\overline{n|}j} \qquad \text{且}$$

$$\min(i, j) \le r \le \max(i, j)$$

例：50 万元的 10 年期贷款，年利率 8%，如果还款额同时以年利率 7%进行再投资，计算以下三种方式的实际收益率。

1）到期一次还清

2）每年还利息，到期还本金

3）每年等额分期偿还。

解：（从贷款人 lender 来看）

1）到期一次还清

由于没有进行再投资，实际收益率即为直接投资收益率 8%

2）每年还利息，到期还本金

包括再投资的终值为

$$500{,}000[1+0.08s_{\overline{10}|.07}] = 1{,}052{,}568.89$$

实际收益率r满足价值方程

$$500{,}000(1+r)^{10} = 1{,}052{,}568.89$$

由此得到：$r = 7.728\% < 8\%$

结论：由于再投资收益率较低，从而导致实际收益率低于贷款利率 8%

3）每年分期还清

设每年的还款为 R，则 R 满足：

$$Ra_{\overline{10}|.08} = 500{,}000$$

所有还款的再投资终值之和为：

$$Rs_{\overline{10}|.07} = 50{,}000\frac{s_{\overline{10}|.07}}{a_{\overline{10}|.08}} = 1{,}029{,}255.51$$

从而实际收益率 r 满足价值方程：

$$500{,}000(1+r)^{10} = 1{,}029{,}255.51$$

由此得到：$r = 7.4897\% < 7.728\% < 8\%$

注☞ 因为第三种方式的还款速度比第二种方式要快，从而导致实际收益率的进一步的下降。但是，仍然有 $r > 7\%$，这是因为有贷款利率 8%在起作用。

❖ 有分期投资的再投资分析

1) 设每年（1 个计息期）初投资 1 元，每年（1 个计息期）的直接投资利率为i

2) 投资的回报方式为：逐年（1 个计息期）收回利息收入，结束时一次收回所有投资

3) 同时将每年的利息收入以再投资利率 j 进行再投资

流程图如下：

原始投资	1	1	1		……		1	1
时间	0	1	2	3	…	…	n-1	n
利息收入		i	$2i$	$3i$	…	…	$(n-1)i$	ni

思考：投资结束（第 n 年底）时的总收益 ＝ ？

利息收入是递增的n期期末年金（利率j），从而投资的累积值为：

$$n+i(Is)_{\overline{n|}j}$$

❖当 $j=i$，则累积值等于$\ddot{s}_{\overline{n|}i}$；

❖当 $j>i$时，则累积值等于

$$n+i(Is)_{\overline{n|}j} > n+i(Is)_{\overline{n|}i} = \ddot{s}_{\overline{n|}i}$$

再投资使最终收益大于直接投资收益；

❖当 $j<i$时，则累积值等于

$$n+i(Is)_{\overline{n|}j} < n+i(Is)_{\overline{n|}i} = \ddot{s}_{\overline{n|}i}$$

再投资使最终收益小于直接投资收益。

投资实际收益率 r 介于直接投资回报率 i 与再投资率 j 之间，满足：

$$n + i(Is)_{\overline{n}|j} = \ddot{s}_{\overline{n}|r}$$

例：某基金的投资者：每年初投入 1 万元，共计十年。基金本身的年回报率为 7%，年底支付。分别对再投资利率为 5%和 8%两种情况，讨论投资者的实际收益率。

解：$i = 7\%$

1） j=5%，基金在第十年底的终值为：

$$10000[10 + 0.07(Is)_{\overline{10}|.05}] = 144900$$

从而该基金的实际收益率 r 满足

$$10000\ddot{s}_{\overline{10}|r} = 144900$$

由此可得

$$r = 6.65\%$$

注☞ $j < r < i$

2） j=8%，基金在第十年底的终值为：

$$10000[10+0.07(Is)_{\overline{10}|.08}]=149400$$

从而该基金的实际收益率 r 满足：

$$10000\ddot{s}_{\overline{10}|r}=149400$$

解得：$r=7.19\%$

注☞ $i<r<j$

§3.2 收益率计算

问题的提出：

在大量的实际问题中，例如：各类投资账户中，常常会在投资期间对投资账户进行新资金的投入或资金提取，应如何计算收益？

例：某股民的股票买卖和资金账户的情况如下表所示，求在过去的一年半中，该股民的投资收益如何？

时间(年)	交易情况	费用	红利分配
0	买入 1000 股，每股 5.00 元	2%	
0.5	用红利收入买入股票每股 4.00 元	无	0.2 元/股
1	另购入 500 股，每股 4.50 元	2%	
1.5	以每股 5.00 元出售所有股票	2%	0.25 元/股

资本加权法(dollar-weighted / money-weighted rate)

情形 1. 一年(短)期

考虑投资期限为一个利息换算期 (一年) 的情形，并且假定有限次的资本的投入或提取。

引入以下记号：

A — 投资基金在开始时的规模

B — 投资基金在结束时的规模

I— 利息收入

C_t— 时刻 $t(0<t<1)$投入的净资本量

$C_t > 0$表示投资者投入资金到基金

$C_t < 0$表示投资者从基金抽出资金

C— 整个计算期内新投入的总的净资本量

$$C=\sum_t C_t$$

${}_a i_b$ — 在时刻 b投入 1 元经过时间a 产生的利息收入，
$a \geq 0,\ b \geq 0,\ a+b \leq 1$

即: b至 $a+b$之间单位投资的利息收入

使用上面的记号，有：$A = B_0$， $B = B_1$， ${}_1 i_0 = i$ 。资本平衡公式为：

结束时的资本量 ＝ 开始时的资本量

\+ 总净资本投入

\+ 利息收入

即： $B = A + C + I$

从而利息I等于

$$I = B - A - C$$

另一方面，利息I等于在此期间投入的所有本金的利息收入（以${}_a i_b$表示）之和，即有下面的表达式：

$$I = iA + \sum_t C_t\,{}_{1-t}i_t$$

其中i为年收益率。

思考：希望求出收益率 i，但如何计算 ${}_a i_b$?

计算方法一：复利假设

$$ {}_{1-t}i_t = (1+i)^{1-t} - 1 $$

思考：为什么这样定义称为“复利”？

在上述假设下利息计算公式可简化为：

$$ I = iA + \sum_t C_t (1+i)^{1-t} - C = iA + (1+i)\sum_t C_t v^t - C $$

相应的有终值B的表达式：

$$ B = (1+i)A + (1+i)\sum_t C_t v^t $$

注☞ 由上述公式无法得到收益率 i 的解析表达式，需用数值方法近似求解。

计算方法二：单利假设

$${}_{1-t}i_t = (1-t)i$$

思考：为什么这样定义称为“单利”？

注☞ 按投入的时刻开始计算单利！

在上述假设下利息计算公式可简化为：

$$I = iA + \sum_t C_t(1-t)\, i = i\,[A + \sum_t C_t(1-t)]$$

从而可以解出收益率 i 等于

$$i = \frac{I}{A + \sum_t C_t(1-t)}$$

该式被称为“资本加权收益率”计算公式，其中分子就是利息收入，而分母是平均的资本投入量，即：每一笔投资金额均按照该金额投入的时刻到时刻 1 之间所余的时间段的长短进行加权。

思考：如果不做任何时间上的加权，会是怎样的？

注☞ 上述收益率的计算公式是在类似于单利的假设下得到的，所以严格地说它并不是实利率。但在许多情况下（特别是C_t相对于A很小），这个结果非常接近于实利率。

在实用中通常对上述公式做进一步的简化：

1）假定所有新的净投入都是在时刻 $t=k$进行的，则有：

$$i=\frac{I}{A+(1-k)C}=\frac{I}{A+(1-k)(B-A-I)}$$

$$=\frac{I}{kA+(1-k)B-(1-k)I}$$

2）假定所有新的净投入都是在时刻 $t=0.5$进行的，则有：

$$i=\frac{2I}{A+B-I}$$

具体应用是：如果有多笔金额的投入，并且大致以 $t=0.5$对称时，则可以应用该式。

投资期限超过 1 年的情形

已知投资期是从 0 到 n，余额和现金流为：

$B_0, B_1, \ldots, B_n$ 和 $C_0, C_1, \ldots, C_n$

在复利方式下，有：

$$B_k = B_0(1+i)^k + \sum_0^k C_j (1+i)^{k-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

通过数值计算可以反解出收益率 i

注☞ 当 $k - j > 1$ 时，慎用近似 $(1+i)^{k-j} = 1 + i(k-j)$

连续情形

假设资金的投入是以函数C_t连续进行的，即：对于任意的 $t(0 \le t \le n)$：

$$B_t = B_0(1+i)^t + \int_0^t C_s(1+i)^{t-s}\,ds$$

其中 B_t 表示时刻 t 的资本账户**未结余额** (outstanding fund balance)，i 为实利率。

如果考虑使用连续利率，则更一般的表达为：

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t d_s ds\right) + \int_0^t C_s \exp\left(\int_s^t d_u du\right) ds$$

或者用微分方程表示：

$$dB_t = d_t B_t dt + C_t dt$$

该式的直观解释：左边是余额在时刻 t 的瞬间变化率；右边表明这个变化由两部分组成，即

- 利息对资本余额的作用
- 瞬间新投入的资本

（前例续）求股民的收益率

时间(年)	交易情况	费用	红利分配
0	买入 1000 股，每股 5.00 元	2%	
0.5	用红利收入买入股票每股 4.00 元	无	0.2 元/股
1	另购入 500 股，每股 4.50 元	2%	
1.5	以每股 5.00 元出售所有股票	2%	0.25 元/股

解：现金流和余额为

$$B_0 = 1000 \times 5 \times (1 + 2\%) = 5100$$

$$C_1 = 500 \times 4.5 \times (1 + 2\%) = 2295$$

$$B_{1.5} = (1000 + \frac{200}{4} + 500)[5 \times (1 - 2\%) + 0.25] = 7982.5$$

设 $j = \dfrac{i^{(2)}}{2}$ 半年名义收益率，从而有：

$$B_{1.5} = B_0(1 + j)^3 + C_1(1 + j)$$

代入具体数据为：

$$7982.5 = 5100(1 + j)^3 + 2295(1 + j)$$

求数值解可得：$j \approx 3.25\%$，即该股民在这一年半里的名义年收益率约为 6.50%

注☞ 用 Excel 求数值解

注☞ 等价的年实利率约为 6.60%

例 3.8 ：某活期账户年初余额为 1000 元。在四月底存入 500 元；在六月底和八月底分别提取 200 元和 100 元。年底余额为 1236 元。用资本加权法近似计算年收益率。

解：

$A = 1000$

$C_{1/3} = 500$，$C_{1/2} = -200$，$C_{2/3} = -100$

$B = 1236$

因此有

$$I = 1236 - (1000 + 500 - 200 - 100) = 36$$

由资本加权法计算公式可得

$$i = \frac{36}{1000 + 500\frac{2}{3} - 200\frac{1}{2} - 100\frac{1}{3}} = 3\%$$

比较：如果直接用近似公式计算有

$$i=\frac{2I}{A+B-I}=\frac{72}{1000+1236-36}=3.17\%$$

（资金的投入并不完全是对称的）

例 3.9 ：某保险公司一年的经营数据如下：

年初资产：10,000,000（1 千万）

保费收入：1,000,000（1 百万）

保单赔付：420,000（42 万）

投资毛收入：530,000（53 万）

投资费用：20,000（2 万）

其它费用：180,000（18 万）

近似计算该公司在这个年度的实际收益率。

注☞ 投资毛收入 ＝ 投资回收额－投资额

解：

初值 A = 10,000,000

投资净收入 I ＝ 投资毛收入－投资费用

= 530,000－20,000 = 510,000

新投入的资本量 C =保费收入－保单赔付－其它费用

=1,000,000－420,000－180,000

=400,000

从而有

$$B = A + C - I = 10{,}910{,}000$$

因为没有更多的现金流的信息，从而用近似公式可得

$$i = \frac{2I}{A + B - I} = 5\%$$

时间加权法 (time-weighted rates of interest)

关键：

对于投资账户的每次因新资本的投入或提取造成的变动，随时进行利息结算，计算当时的阶段收益率，然后计算整个投资期的综合收益率

全年的投资收益既与新资本的净投入量有关也与具体投资时间有关

时间加权法的具体计算方法：

1) 假设投资期限为一年

假设在一年中有$m-1$次的资金投入或提取，即：在时刻$0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<1$的净投入分别为$C_1,\ldots,C_m$，流程图如下：

时间	**0**	t_1	$\cdots$	t_{m-1}	**1**
资金余额	B_0	B_1	$\cdots$	B_{m-1}	B_m
收益率		j_1	$\cdots$	j_{m-1}	j_m
资金投入		C_1	$\cdots$	C_{m-1}	

其中B_t表示在 t 时刻 C_t 未投入前一瞬间的投资资金余额，显然有$B_0 = A$ 和$B_m = B$；其中 j_t表示子区间的实际收益率，从而有：

$$B_t = (1 + j_t)(B_{t-1} + C_{t-1})$$

或：

$$j_t = \frac{B_t}{B_{t-1} + C_{t-1}} - 1$$

由此定义全年的收益率 i 为满足以下方程的解：

$$1 + i = (1 + j_1)(1 + j_2)\cdots(1 + j_m) = \prod_{t=1}^{m}(1 + j_t)$$

进而可以表示为：

$$i=\prod_{t=1}^{m}(1+j_t)-1$$

2) 假设投资期限为n年

其它符号相同，只是时间表示为：$0< t_1<\cdots< t_{m-1}< n$。

投资期间的平均年收益率i满足：

$$(1+i)^n = \prod_{t=1}^{m}(1+j_t)$$

结论：时间加权法测度了基金帐户的管理者的实际管理能力，而资本加权法则测度了基金帐户的实际收益情况（与基金的投资者的行为有关联）。

例：甲从 1985 年至 1990 年每年初向退休基金存款 10,000 元。已知该基金在 1985 到 1989 年的年收益率分别为 13%、11%、9%、9%和 10%。分别用资本加权法和时间加权法计算甲在这五年中的平均回报率。

解：

1) 资本加权法（投资期限超过一年）

计算 1990 年底的账户余额：

$$10,000[(1+13\%)(1+11\%)(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)$$
$$+(1+11\%)(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)$$
$$+(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)+(1+9\%)(1+10\%)$$
$$+(1+10\%)]=66,958.37$$

从而资本加权年收益率 i 满足：

$$10,000\ddot{s}_{\overline{5|}i}=66,958.37$$

解得 i = **9.90%**

思考：这个收益率结果与每年的存款额有很大的关系，如果甲在 5 年中每年的存款不是等额的，但总额仍然为 5 万元，结果会有怎样的变化？

2) 已知：$j_1 = .13$，$j_2 = .11$，$j_3 = .09$，$j_4 = .09$，$j_5 = .10$

从而可得：

$$i = [(1+13\%)(1+11\%)(1+9\%)(1+9\%)(1+10\%)]^{1/5} - 1$$

$$= 10.39\%$$

注☞ 这个收益率计算结果与每年的存款额无关，它反应了该基金在这几年的平均收益情况。

例：某账户在年初的余额为 100,000；5 月 1 日余额为 112,000 元，同时投入 30,000 元；到 11 月 1 日余额降为 125,000 元，同时提取 42,000 元。在下一年的 1 月 1 日又变为 100,000 元。

分别用（1）资本加权法（2）时间加权法计算年收益率。

解：该项目的时间流程为

|--------------|--------------------|--------------|

日/月	1/1	1/5	1/11	1/1
余额	100,000	112,000	125,000	100,000
净投入		30,000	42,000	

1）资本加权法

A = 100,000， B = 100,000，

C = 30,000－42,000 =－12,000， I= 12,000

从而有

$$i=\frac{I}{A+\sum_t C_t(1-t)}$$

$$=\frac{12,000}{100,000+30,000\times\frac{8}{12}-42,000\times\frac{2}{12}}=10.62\%$$

2）时间加权法

$$i=\frac{112,000}{100,000}\times\frac{125,000}{112,000+30,000}\times\frac{100,000}{125,000-42,000}-1$$

$$=1.12\times0.88\times1.205-1=18.79\%$$

1)和 2)结果的比较分析

方法 2)的收益率明显大于方法 1)

方法 1)的三个子区间的投资收益分析：

在前四个月和最后两个月的投资效益很好，在年中的六个月则效益较差。而恰好在效益差的时期投入了新的资本，在效益好的时期提取了部分本金。

所以，单独从资金的变化看，收益率必然不高。

❖ 方法 1)的 10.62%表示了投资资金本身的运行以及投资者在这个项目中的投资效果总体评测

❖ 方法 2)的 18.79%则只表示了投资资金本身的运行情况，与投资者的投资行为无关

当投资平稳或中间新投入或提取的资金与各时刻的资本余额比较相对较小时，两种方法的差异较小。

注☞ 虽然方法 2)的结果较方法 1)的结果要客观一些，但是前者需要掌握更多的投资信息，即：每次资本变动时的投资余额，这一点有时很难做到。

投资额方法和投资年方法

问题的提出：

有些投资资金是由不同的个体投资者组成，如：养老基金是由许多个人账户组成的，每个账户不能单独进行投资，必须通过参加基金的整体投资，然后在投资收益中占有相应的份额。

这些账户随时有资本的投入，整个基金也随时在进行投资和收益，如何计算每个账户的收益率呢？

关键：从资本量和投资时间两方面考虑

投资组合方法（portfolio method）

关键：以基金的全部收入为基础，计算平均的年收益率，基金中每个账户都以该年收益率计算收益。

- 采用这种方法,无论每个投资者是何时开始参加投资的，在每个投资年度的年收益率都是一样的
- 在短时间内，该种方法简单易行。但如果投资期限较长，特别是利率波动较大时，采用平均利率的方法就可能会带来很大的不公平

例：某基金在某个投资年度的平均年收益率为 8%，这个收益率是基金这 5 年各种投资组合综合的投资收益水平，这几年投资市场呈上升趋势。某投资者是两年前参加该基金的，而基金这两年的年平均收益率为 10%，如果对这个投资者仍然以年 8%的收益率计算当年账户的收益，可能会使其放弃对该基金的投资，或是不能吸引更多的投资者参加该项目。

注☞ 此时对于原先的投资者有利

投资年方法（investment year method）

关键：对每项投资既考虑原始投资时刻的利率情况，也考虑投资期间各个时刻的利率情况。

- 这种方法是从六、七十年代在美国开始流行的，当时美国正处于一段较长的利率上升期，76 年为 6%，79 年为 15.5%，80 年为 21.5%。
- 当利率上升时，投资年方法优于投资额方法；反之，则有相反的结论。银行和保险公司通常愿意采用投资年方法，以吸收新储蓄和新投保。

在采用投资年方法时，通常只考虑固定的一段时间，剩余的时期仍采用投资额方法，如：

只对投资者刚刚进入基金的前几年内的投资资金考虑年收益率的调整（例如 5 年）

投资年方法的实际操作步骤是：

构造一个二维的利率表，其中

z——代表项目的起始年代

y——代表原始的投资日期

前面几列代表用投资年方法计算的年度内已经经过的投资时间（用t表示），最大年限记为 m；

每个投资用原始投资年度y和当前日期$y+t$标识；

当采用投资年方法时（投资时间不超过 m），对应的利率记为i_t^y；

当投资时间超过了投资年方法的年限 m，则一律将利率记为i^{y+t}。

注☞ 这里假设所有的资金变动都是在年初进行的。

投资年方法示例（$m=5$） 单位：%

y	i_1^y	i_2^y	i_3^y	i_4^y	i_5^y	i^{y+5}	$y+5$
z	8.00	8.10	8.10	8.25	8.30	8.10	$z+5$
$z+1$	8.25	8.25	8.40	8.50	8.50	8.35	$z+6$
$z+2$	8.50	8.70	8.75	8.90	9.00	8.60	$z+7$
$z+3$	9.00	9.00	9.10	9.10	9.20	8.85	$z+8$
$z+4$	9.00	9.10	9.20	9.30	9.40	9.10	$z+9$
$z+5$	9.25	9.35	9.50	9.55	9.60	9.35	$z+10$
$z+6$	9.50	9.50	9.60	9.70	9.70		
$z+7$	10.00	10.00	9.90	9.80			
$z+8$	10.00	9.80	9.70				
$z+9$	9.50	9.50					
$z+10$	9.00						

表的使用：

1）计算某投资者在某投资年度的收益率

——在第一列找到相应的原始投资时间（y）

——沿水平方向找到对应的第几个投资年度

——如果投资年度超过m，则继续沿列方向向下顺沿直至找到相应的年收益率

例：z=1980，考虑 1980 到 1990 期间某基金的投资收益。若某人在 1982 年（初）投资 5000 元，到 1985 年（底）的收益是多少？到 1990 年（底）呢？

解：由上表可得

到 1985 年（底）的收益是

$$5000(1+8.5\%)(1+8.7\%)(1+8.75\%)(1+8.9\%)=6983.71$$

到 1990 年（底）的收益是

$$5000(1+8.5\%)(1+8.7\%)(1+8.75\%)(1+8.9\%)(1+9.0\%)$$

$$(1+8.6\%)(1+8.85\%)(1+9.1\%)(1+9.35\%)=10735.3$$

2）查找某给定年度的收益率

先找到对应的年份，沿倒对角线方向向右上方排列的一组利率都是这一年不同的投资者的可能利率。

例：z=1980，在 1987 年可能的利率为：10.00%，9.50%，9.50%，9.30%，9.20%，8.60%，即在 1987 年：

1987 年参加该项目的投资者的年利率为 10.00%；

1986 年参加该项目的投资者的年利率为 9.50%；

1985 年参加该项目的投资者的年利率为 9.50%；

1984 年参加该项目的投资者的年利率为 9.30%；

1983 年参加该项目的投资者的年利率为 9.20%；

1980 至 1982 年其间参加该项目的所有投资者的年利率均为 8.60%

§ 3.3 资本预算（capital budgeting）

资本预算——指个人或企业投资者对投资方向和投资量进行决策的过程，一般考虑以下两种分析方法：1）当存在多种收益率的时候，考虑项目的投资决策；2）以事先给定的利率贴现未来的现金流，计算整个投资的**净现值**。

注☞ 实际上，事先给定的利率常常是一种保守的估计以保证投资者最低的受益。

1. 收益率方法与净现值方法

实际的投资分析过程是由许多因素组成的，例如要进行不同项目的风险评估、收益率分析比较以及其他与项目有关的可行性分析，但这里我们只强调从收益率角度来决策项目。

收益率方法：

投资者可以根据本身的融资成本和投资利润指标设置一个最小可接受收益率，然后将各种项目的收益率与之相比较，排出优先次序。

净现值方法（ net present value method）：

投资者用**最小可接受利率** i 计算每个可选项目的净现值 $P(i)$，如果 $P(i)$ 为负值，则拒绝该项目；如果 $P(i)$ 为正值，则可以考虑接受该项目，相应的 NPV 值就是该项目所需的净投入或净收益。

例：将表 3.1 中的投资项目进行资本预算分析。

解：净现值为

$$P(i) = 1{,}000(-10 - 5v - v^2 - v^3 - v^4 - v^5 + 7v^6 + 8v^7 + 9v^8 + 10v^9 + 12v^{10})$$

如下表所示

利率i(%)	0	5	10	15	20	25
NPV $P(i)$	27,000	12,675	3,695	-2,046	-5,778	-8,236

这是一个标准的投资项目的前期分析，NPV 代表了不同收益率下的净收益。

例：某投资项目需要在当前投入 100 元、第二年底投入 132 元，在第一年底可以收回 230 元。讨论这个项目在这两年的资本预算分析。

解：净现值公式为

$$P(i) = -100 + 230v - 132v^2$$

下表为不同利率下的净现值结果：

利率i（%）	0	5	10	15	20	25
NPV	-2.00	-0.68	0	0.19	0	-0.48

结论：10%和 20%是两个临界收益率，只有当收益率介于 10%和 20%之间时，有$P(i) > 0$，即有正的净收益现值，项目可被接受，且当 i=14.78%时，$P(i)$达到最大。

讨论：在本例中，如果投资者给定的最小可接受收益率为 5%，则相应的净收益现值为负，这个项目应被拒绝；可如果投资者给定的最小可接受收益率为 15%，则项目将被接受。

例：用 NPV 法讨论项目“甲以年利率 10%从乙处融资 1 万元，期限一年；同时，甲将这笔资金投资于年利率 12%的项目”是否被接受。

解：由 $C_1 = -2000$，$R_1 = 2000$ 可得项目的 NPV 为

$$P(i) = 2000v$$

因为 NPV 永远为正值，所以对于任何利率，该项目都可以接受。

例：用 NPV 方法讨论项目“已知某账户的当前余额为 100 万元，在第一年底提出 150 万元，在第二年底又投入 90 万元”是否被接受。

解：若以 1 万元为单位，则有

$$R_0 = -100，\quad R_1 = 150，\quad R_2 = -90，$$

从而有

$$P(i) = -10v^2(10i^2 + 5i + 4) < 0$$

无论利率为何值，$P(i)$均为负值，该项目应被拒绝。

例：某投资者面临以下的两种投资项目收入（最初的投入均为一万元）：

项目	第一年底	第二年底	第三年底	收益率(%)	NPV(10%)
A	5,000	5,000	5,000	23.4	2,434.26
B	0	0	17,280	20.0	2,982.72

试对其进行投资决策分析。

解：

1) 依据收益率（相同的最初投入）的比较，应该选择项目 A；

2) 依据净现值(以相同的收益率 10％计算)的比较，应该选择项目 B。

讨论：比较两个项目的净现值函数

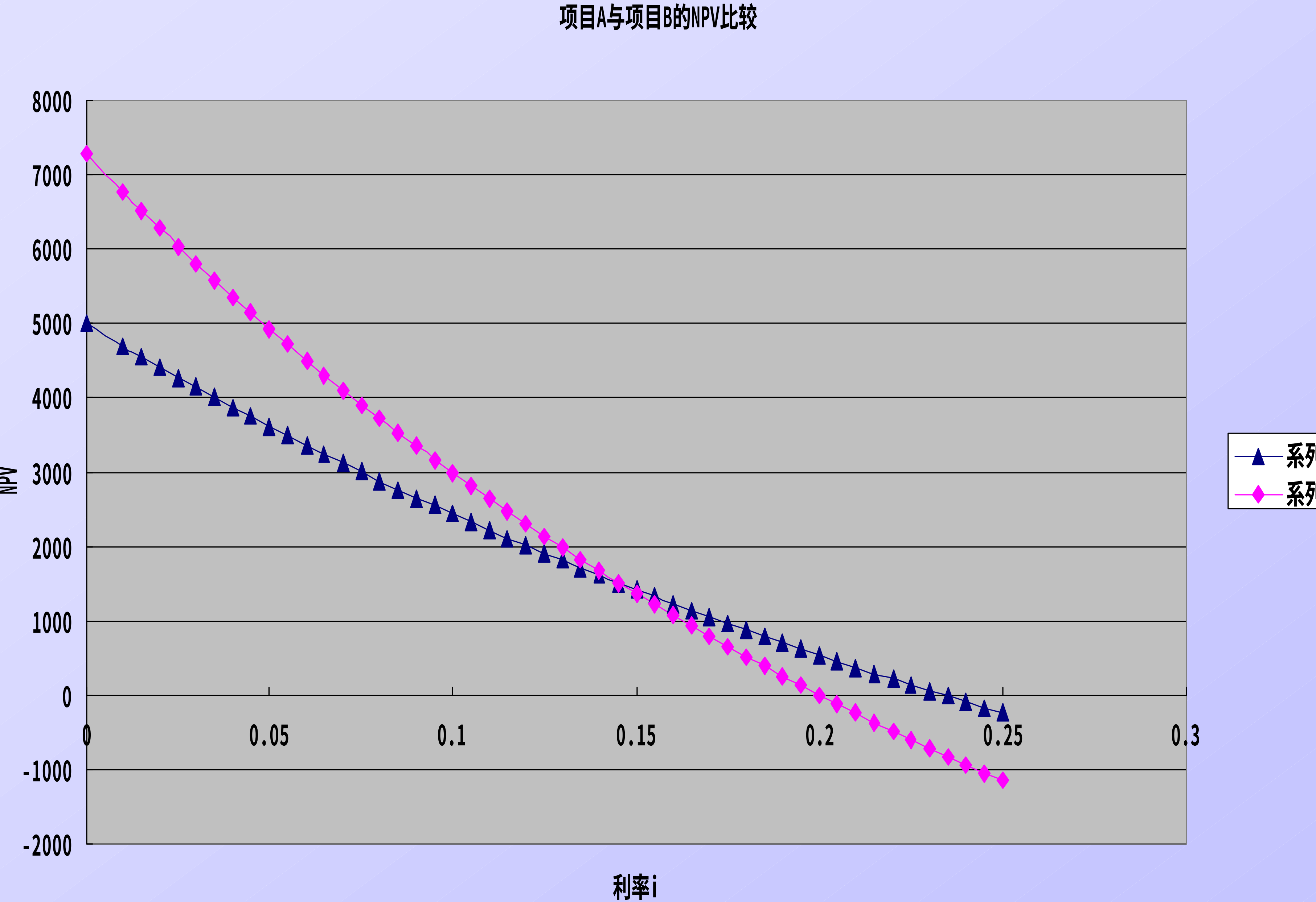
$$P_A(i) = 5000(a_{\overline{3}|i} - 2)$$

$$P_B(i) = 5000[3.456(1+i)^{-3} - 2]$$

分析两个净现值函数可以得到下述结论：

1）若可接受收益率在 14.499％以内，则选择项目 B；

2）若可接受收益率介于 14.499％与 23.375％之间，则选择项目 A。


项目A与项目B的NPV比较
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
-2000
NPV
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
利率i

项目回报率与项目融资率

关键：如果投资期间每个时刻的未结资本余额都是正数，收益率则唯一

净投资项目（pure investment project）——即：

对所有时刻 $t=1,2,...,n$，有 $B_t \geq 0$

在整个净投资项目期间，投资者始终处于资本的投入状态，只有项目结束时一次性收回投资。

净融资项目（pure financing project）——即：

对所有时刻 $t=1,2,...,n$，有 $B_t < 0$

在整个净融资项目期间，投资者不断地从项目中获得资金，他实际上已经从一个投资方变成为一个受益方。

综合项目（mixed project）——即：在整个投资期间净投资、净融资两种状态都有

对于净投资期，称（唯一的）收益率为“项目回报率”(project return rate)，用 r 表示；

对于净融资期，称（唯一的）收益率为“**项目融资率**”(project financing rate)，用 f 表示。

从投资者角度看，希望 r 比 f 大，例如，银行作为投资者所提供的贷款利率要高于同档期的存款利率。

综合项目的收益率计算：

设原始的资本余额为

$$B_0 = C_0$$

随后的资本余额可以用递归公式表示：$t = 1,2,\ldots,n$

$$B_t = B_{t-1}(1+r) + C_t, \quad 当 B_{t-1} \geq 0$$

或

$$B_t = B_{t-1}(1+f) + C_t, \quad 当 B_{t-1} < 0$$

最终的资本余额是关于r和 f的多项式：

$$B_n = C_0(1+r)^{m_0}(1+f)^{n-m_0} + C_1(1+r)^{m_1}(1+f)^{n-m_1-1} + \cdots + C$$

其中：m_j为整数，表示从时刻j到时刻 n 中使用项目回报率r的总的区间数（其它时间段内则使用项目融资率 f），且满足：$n \geq m_0 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$。

例：某投资项目为：立即投入 1600 元，两年后投入 10000 元，在第一年底收回 10000 元。

1）若 $r=f$，计算收益率 i；

2）用 f 表示 r；

3）若 r=70%，f = 30% ，该投资项目是否可以接受？

4）若 f = 50%，3）的结论如何？

解：

1）令：$i=r=f$，则价值方程为

$$1600(1+i)^2 + 10000 = 10000(1+i)$$

方程的解为：$i=25\%$ 或 $i=400\%$，从而这是一个存在两种收益率的项目。

2）因为第一年初的投资余额是正值 $B_0=1600$，所以第一年的年利率为投资利率 r，从而有

$$B_1=1600(1+r)-10000$$

为了使 $B_2=0$，必然有：$B_1<0$，所以第二年的年利率应为融资利率 f，从而有

$$B_2=B_1(1+f)+10000$$

由 $B_2=0$ 可得 r 与 f 的关系式为：

$$r = \frac{10000}{1600}\left(1 - \frac{1}{1+f}\right) - 1 = 5.25 - \frac{6.25}{1+f}$$

该项目的投融资利率对应关系如下表所示：

项目投/融资利率表　　单位：%

融资利率 f	25	100	150	200	300	400
回报利率 r	25	212.5	275	317	369	400

结论：r 是 f 的单调递增函数，并且有两个点满足 $r=f$，在这两个点之间有 $r>f$（正常的利率关系），而在这两个点之外有 $r<f$（反常的利率关系）。

注☞ 也可以考虑 f 关于 r 的函数关系

$$f=\frac{1+r}{5.25-r}$$

3）这种条件下的资本余额分别为：

B_0= 1600

B_1= 1600×1.7－10,000 =－7280

B_2= (－7280)×1.3 + 10,000 = 536

因为 B_2 > 0，所以投资者应拒绝该项目。

4）这种条件下在第二年底的资本余额为：

$$B_2 = (-7280) \times 1.5 + 10,000 = -920$$

所以，投资者应接受这个项目。

思考：为什么当融资利率为 30%时投资者应拒绝该项目，而当融资利率升为 50%时投资者却接受了该项目？

关键：项目的现金流是确定不变的

分析：3）和 4）两种情况的唯一区别在于第二年的融资利率 f

投资者在第一年底的净资本收入为 7280 元（融资贷款），当贷款利率仅为 30%时，第二年底应还款

7280×（1+30%）= 9464 < 10000

但投资者被要求还款 10000 元，这是不可接受的。

当贷款利率为 50%时，第二年底应还款

7280×（1+50%）= 10920 > 10000

由于投资者仅被要求还款 10000 元，从而投资者接受了该项目。

临界融资利率为 37.36%。

§3.4 实例分析

例：某养老基金随时接受缴费（contribution）和领取（withdrawal），在每笔业务结束时，结算基金的价值。1991 年的情况如下(单位：1,000)：

日期	1/1/91	3/1/91	9/1/91	11/1/91	1/1/92
基金余额	1,000	1,240	1,600	1,080	900

缴费情况： 2/28/91 200,000； 8/31/91 200,000

领取情况： 10/31/91 500,000；12/31/91 200,000

分别用资本加权法和时间加权法计算收益率。

解：基金在各个时刻的实际余额

$B_0 = 1000$，$B_{1/6} = 1240 - 200 = 1040$，

$B_{2/3} = 1600 - 200 = 1400$，$B_{5/6} = 1080 + 500 = 1580$，

$B_1 = 1100$

资本加权法：

$A = 1000$，$B = 1100$，$C = 200 + 200 - 500 = -100$，

$I = 1100 - 1000 - (-100) = 200$

$$i=\frac{200}{1000+200\times\frac{5}{6}+200\times\frac{1}{3}-500\times\frac{1}{6}}=\mathbf{17.38}\%$$

时间加权法：

$$1+i=\frac{1040}{1000}\times\frac{1400}{1240}\times\frac{1580}{1600}\times\frac{1100}{1080}$$

$$=1.04\times1.129\times0.9875\times1.0185$$

$$=1.181$$

$$i=\mathbf{18.1}\%$$

结论：两种计算收益率方法的结果差异不大。

例：10000 元贷款用于投资，有两种选择：

1)每年底 3000 元回报，累计十年；

2)在第二年底和第五年底回报 8000 元，在第七年底和第十年底回报 7000 元。

投资者计划将所有资金存入信贷账户，如果账户余额为赤字，以年利率 15%收取利息，如果账户余额为盈利，则以年利率 9%计入利息。在两种情况下计算第十年底的余额。

解：

1）计算账户余额首次出现盈利的时刻k：

$$10000(1.15)^k < 3000 s_{\overline{k}|15\%}$$

可得：$k = 5$，

$$B_5 = 3000 s_{\overline{5}|15\%} - 10{,}000(1.15)^5 = \mathbf{1135.7}$$

进而有：

$$B_{10} = 3000 s_{\overline{5}|9\%} + 1135.7(1.09)^5 = \mathbf{18129}$$

2）计算账户在各个回报时刻的余额：

$$B_2 = -10{,}000(1.15)^2 + 8000 = -\mathbf{5225} < \mathbf{0}$$

$$B_5 = -5225(1.15)^3 + 8000 = \mathbf{53.43 > 0}$$

$$B_7 = 53.43(1.09)^2 + 7000 = \mathbf{7063}$$

$$B_{10} = 7063(1.09)^3 + 7000 = \mathbf{16147}$$

结论：第一种方法的盈利多一些。