

文章编号: 1000-4750(2014)01-0023-06

非线性动力方程的精细时空有限元方法

江小燕, 王建国

(合肥工业大学土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘 要: 根据 Hamilton 变作用定律构造了时空有限元矩阵; 并根据传递矩阵原理, 利用时间的一维性将时空有限元矩阵变换为时间方向的传递矩阵, 将初值问题转化为一般矩阵相乘问题以方便求解。为了保证计算的稳定性, 参考了精细积分的思想提出精细时空有限元方法, 并给出线性问题在时间级数荷载作用下的计算式。数值分析结果证明该方法在线性问题分析上非常准确并可以推广到非线性动力方程的求解; 只需将非线性解看作初始解和增量解的叠加, 通过精细时空有限元线性求解方法计算增量解, 逐步修正后即可得到非线性解。结果表明该方法是一个有效的求解非线性动力方程的方法。

关键词: 非线性动力方程; Hamilton 变作用定律; 时空有限元; 精细方法; 传递矩阵

中图分类号: O241 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.09.0664

THE PRECISE SPACE-TIME FINITE ELEMENT METHOD FOR NONLINEAR DYNAMIC EQUATION

JIANG Xiao-yan, WANG Jian-guo

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Based on the Hamilton variable action law, a space-time finite element is deduced. According to the principle of a transfer matrix and one-dimensionality of time, a space-time finite element matrix is transformed to a time-transfer matrix and initial value problems are converted to matrix multiplication problems so as to be solved more easily. In order to ensure the stability of the calculation, the precise space-time finite element method is established on the basis of the precise integration idea, and the calculation formula under the action of series loads is presented. The results of numerical analysis on a linear problem show that this method is very accurate and can be extended to nonlinear dynamic problems. Firstly, regarded a nonlinear solution as a superposition of an initial solution and an incremental solution, and then to calculate the incremental solution using a precise space-time finite element linear solution method, to modify solution gradually, the nonlinear solution can be achieved finally. The results of numerical experiments show that this method is a stable and efficient calculation method on solving nonlinear dynamic problems.

Key words: nonlinear dynamic equation; Hamilton variable action law; space-time finite element; precise method; transfer matrix

近年来, 非线性动力方程的高效计算方法一直作为一个重要的理论问题被人们所广泛研究。对于任意的非线性体系而言, 常采用的是直接积分法, 例如中心差分法、Houbolt 法、Wilson- θ 法、Newmark 法等^[1-2]。但这些方法尚有不足之处。例如, 在用 Newmark 法计算瞬态冲击载荷下的结构弹塑性响

应, 会出现结果失真放大的现象, 这是由于建立这些时间积分格式时, 在时域上缺乏相应变分原理的保证。

而 Hamilton 变作用定律由于在其表达式中包含有体系在初末时刻的速度, 从而自然地包含了初始条件的影响, 因此能完整地表述体系的运动。本文正

收稿日期: 2012-09-12; 修改日期: 2013-03-21

通讯作者: 江小燕(1975—), 女, 安徽怀宁人, 副教授, 博士生, 从事工程力学、结构工程研究(E-mail: jiangxiaoyan@hfut.edu.cn).

作者简介: 王建国(1954—), 男, 安徽怀宁人, 教授, 博士, 博导, 从事工程力学、结构工程研究(E-mail: jiangguow@hfut.edu.cn).

是基于 Hamilton 变作用定律进行时空有限元推导,并根据时空元的特点构造递推计算公式,递推计算的稳定性与步长为函数关系。为了保证计算的稳定性,本文根据精细积分思想^[2-10]构造精细时空元,在保证了解线性问题的准确和稳定的基础上,提出了非线性问题的增量法;将非线性解看作初始解和增量解的叠加,增量解的每步计算采用的也是精细时空有限元,通过增量解对初始解逐步修正最终获得非线性问题的解。本文主要对集中质量的动力问题进行研究,但结构分析中杆件和高维问题也可以采用本文方法进行分析。

1 时空有限元的构造

常见的时空变分原理有两种,一种基于 Hamilton 变作用定律,一种基于 Gurtin 变分原理。Hamilton 变作用定律是时间上的边值问题,而 Gurtin 变分原理则是将混合边值问题转换为初值问题,需要进行 Laplace 变换和逆变换,由于卷积积分是线性的,对非线性问题处理不是很方便。本文构造的递推矩阵在空间上计算量小,不需要完全将时间空间双向离散,避免了一般情况下利用 Hamilton 变作用定律构造时空有限元的计算量巨大的问题。

根据 Hamilton 定律,动力系统满足以下公式:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} W dt - \sum_i^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (1)$$

其中: 结构总动能 $T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u} \dot{u} d\Omega$; 应变能 $V =$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega; \text{ 外力 } W = \int_{\Omega} (f - c \dot{u}_f) u_f d\Omega。$$

可以利用3次 Hermite 函数对弹性变形 u 、外力 f 在时间域 $(n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ 进行插值:

$$\begin{aligned} u(t) &= H_n N u_n + H_{n+1} N u_{n+1} + T_n \dot{N} u_n + T_{n+1} \dot{N} u_{n+1}, \\ f(t) &= H_n N f_n + H_{n+1} N f_{n+1} + T_n \dot{N} f_n + T_{n+1} \dot{N} f_{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $H_n = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $H_{n+1} = 3\xi^2 - 2\xi^3$,

$$\begin{aligned} T_n &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\Delta t, \quad T_{n+1} = (-\xi^2 + \xi^3)\Delta t, \\ \xi &= \frac{t - t_n}{\Delta t}, \quad \Delta t \text{ 为时间步长; } N \text{ 为结构的形函数。} \end{aligned}$$

对于集中质量问题,则根据式(1)~式(2)可以推出:

$$K u = F \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= \frac{6M}{5\Delta t} - \frac{13}{35}K\Delta t + \frac{1}{2}C; \\ k_{1,2} &= \frac{11}{10}M - \frac{11}{210}K\Delta t^2 - \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{1,3} &= -\frac{6M}{5\Delta t} - \frac{9}{70}K\Delta t + \frac{1}{2}C; \\ k_{1,4} &= \frac{1}{10}M + \frac{13}{420}K\Delta t^2 + \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{2,1} &= \frac{1}{10}M - \frac{11}{210}K\Delta t^2 + \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{2,2} &= \frac{2}{15}M\Delta t - \frac{1}{105}K\Delta t^3; \\ k_{2,3} &= -\frac{1}{10}M - \frac{13}{420}K\Delta t^2 - \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{2,4} &= -\frac{1}{30}M + \frac{1}{140}K\Delta t^3 + \frac{1}{60}C\Delta t^2; \\ k_{3,1} &= -\frac{6M}{5\Delta t} - \frac{9}{70}K\Delta t + \frac{1}{2}C; \\ k_{3,2} &= -\frac{1}{10}M - \frac{13}{420}K\Delta t^2 + \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{3,3} &= \frac{6M}{5\Delta t} - \frac{13}{35}K\Delta t - \frac{1}{2}C; \\ k_{3,4} &= -\frac{11}{10}M + \frac{11}{210}K\Delta t^2 - \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{4,1} &= \frac{1}{10}M + \frac{13}{420}K\Delta t^2 - \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{4,2} &= -\frac{1}{30}M\Delta t + \frac{1}{140}K\Delta t^3 - \frac{1}{60}C\Delta t^2; \\ k_{4,3} &= -\frac{1}{10}M + \frac{11}{210}K\Delta t^2 + \frac{1}{10}C\Delta t; \\ k_{4,4} &= \frac{2}{15}M\Delta t - \frac{1}{105}K\Delta t^3。 \end{aligned}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\Delta t F_n + \frac{11}{210}\Delta t^2 F'_n + \frac{9}{70}\Delta t F_{n+1} - \frac{13}{420}\Delta t^2 F'_{n+1} \\ \frac{11}{210}\Delta t^2 F_n + \frac{1}{105}\Delta t^3 F'_n + \frac{13}{420}\Delta t^2 F_{n+1} - \frac{1}{140}\Delta t^3 F'_{n+1} \\ \frac{9}{70}\Delta t F_n + \frac{13}{420}\Delta t^2 F'_n + \frac{13}{35}\Delta t F_{n+1} - \frac{11}{210}\Delta t^2 F'_{n+1} \\ -\frac{13}{420}\Delta t^2 F_n - \frac{1}{140}\Delta t^3 F'_n - \frac{11}{210}\Delta t^2 F_{n+1} + \frac{1}{105}\Delta t^3 F'_{n+1} \end{bmatrix}$$

其中:

$$M = \int_{\Omega} \rho N^T N d\Omega ; \quad C = \int_{\Omega} c N^T N d\Omega ;$$

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega ; \quad F_n = \int_{\Omega} N^T f_n d\Omega + \int_S N^T t dS$$

2 线性问题的求解

2.1 一般动力问题的求解

一般动力问题一个时间分段 Δt 下可以用时空有限元表示为:

$$K \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中: $K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$; u_n 、 u_{n+1} 为第 n 步和第 $n+1$ 步变形和速度; F_n 、 F_{n+1} 为第 n 步输入节点荷载和

第 $n+1$ 步输出节点荷载。通过式(4)整理可得:

$$\begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ F_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

其中: $a_{11} = -B^{-1}A$; $a_{12} = B^{-1}$; $a_{21} = C - DB^{-1}A$; $a_{22} = DB^{-1}$ 。

可以构造出以下递推公式:

$$u_{n+1} = [a_{11} \quad a_{12}] \begin{Bmatrix} u_n \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

给定初值 u_0 , 按照式(6)可递推计算 u_1, u_2, \dots, u_n 。

由稳定性分析理论可知, 计算结果的稳定性和矩阵 $H = a_{11}$ 的谱半径是有关系的, $\rho(H) \leq 1$ 是稳定的。

令 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $\Delta T = xT$, 可得:

$$\rho(H) = \frac{1 - 1164x^2\pi^2 + 144x^4\pi^4 + 630 + 4\sqrt{88830x^4\pi^4 - 21960x^6\pi^6 - 99225x^2\pi^2 + 1216x^8\pi^8}}{2(315 + 48x^2\pi^2 + 80x^4\pi^4)} \quad (7)$$

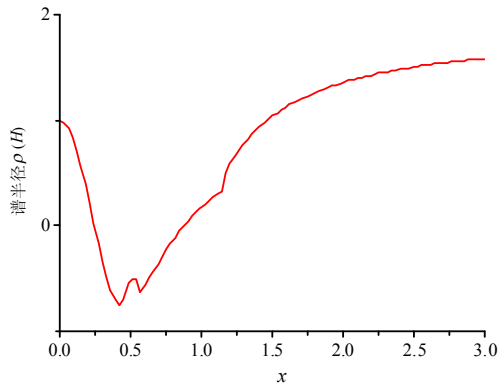


图 1 谱半径

Fig.1 Spectral radius

谱半径 $\rho(H)$ 是 Δt 和 t 之比 x 的函数, 从图 1 看出当 x 大于一定的值时, 式(5)是不稳定的, 为了保证计算结果的精确, 可以将 Δt 取值设置的比较小, 这样的结果就是计算量将会大大增加, 利用式(5)的特点, 本文构造精细递推矩阵, 可以有效地解决以上问题。

2.2 无荷载振动问题的求解

对于无荷载振动时可以表示为:

$$u_{n+1} = [-B^{-1}A]u_n = [H(\Delta t)]u_n$$

如果将 n 到 $n+1$ 之间将步长细分为 m 步, 令 $\Delta\tau = \Delta t / m$, 递推公式可以表示为:

$$u_{n+1} = \prod_{i=1}^m \left[H \left(\frac{\Delta t}{m} \right) \right] u_n = \prod_{i=1}^m [H(\Delta\tau)] u_n \quad (8)$$

可以令 $H(\Delta\tau) = I + \Delta H$, ΔH 一般都是比较小的数字, 之所以这样表达主要是避免小数与大数相加。

如果令 $m = 2^n$, 则有矩阵 t 的精细算法表达式:

$$\prod_{i=1}^{2^n} [H(\Delta\tau)] = I + t_{an}$$

其中: $t_{a1} = 2\Delta H + \Delta H\Delta H$

$$\dots$$

$$t_{aj+1} = 2t_{aj} + t_{aj}t_{aj}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

例如按照以上步骤执行 20 次计算时, 相当于对时间 Δt 进行了 1048576 等分, 如果按照迭代计算, 这是一个巨大的工作量。对于等步长的计算, 每步的递推矩阵 $H(\Delta t)$ 都一样, 可以一次获得精细递推矩阵, 保证递推计算的稳定、准确和高效。

考虑一个动力学问题 $\ddot{u} + u = 0$, $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 0$, 取 $m = 1$ 、 $k = 1$ 、 $\Delta t = 1.0$ 时, 图 2 给出精确解和按照式(5)的原始解、精确解和精细解的计算对比, 从图 2 可以看出, 按照原始递推求解时计算时发散的, 按照精细矩阵法求解, 计算点与精确解是完全一致的, 证明了本文计算方法的有效性。

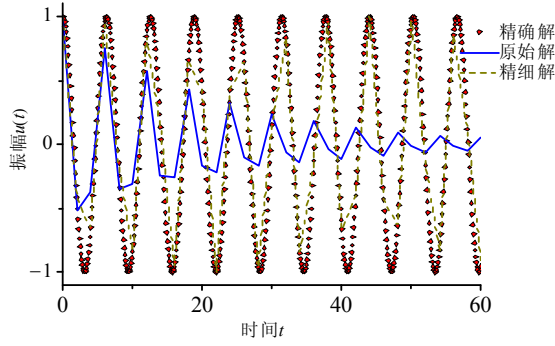


图2 原始解、精确解和精细解的计算对比图

Fig.2 Comparison of primitive solution, precise solution and exact solution

2.3 荷载为常数的振动问题的求解

考虑荷载情况时式(6)可以表示为:

$$u_{n+1} = [H(\Delta t)]u_n + [a_{12}(\Delta t)]F_n(\Delta t) \quad (10)$$

将 n 到 $n+1$ 之间的步长细分为 m 步, 令 $\Delta\tau = \Delta t / m$, $F(t) = [a_{12}(\Delta\tau)]F_n(\Delta\tau, t)$, $\{F(t)\}$ 对于荷载不随时间变化问题为常数, 则式(10)递推计算可以表示为:

$$u^1 = [H(\Delta\tau)]u^0 + F \quad (11)$$

...

$$u^k = [H(\Delta\tau)]u^{k-1} + F \quad (12)$$

$$u^{k+1} = [H(\Delta\tau)]u^k + F \quad (13)$$

...

$$u^m = [H(\Delta\tau)]u^{m-1} + F \quad (14)$$

其中, $u^0 = u_n$ 、 $u^m = u_{n+1}$ 。

式(13)减式(12), 可得:

$$\Delta u^k = [H(\Delta\tau)]\Delta u^{k-1} \quad (15)$$

其中: $\Delta u^{k+1} = u^{k+1} - u^k$; $\Delta u^{k-1} = u^k - u^{k-1}$, 从而可以推出:

$$\Delta u^m = \prod_{k=1}^m [H(\Delta\tau)]\Delta u^0 = t\Delta u^0 \quad (16)$$

t 可以按照式(9)精细算法进行计算。

根据式(11):

$$\Delta u^0 = h^1 u^0 + F \quad (17)$$

根据式(14):

$$\Delta u^m = [h^1]u^m + F \quad (18)$$

由式(17)、式(18)整理可得:

$$u^m = t(u^0 + [h^1]^{-1}F) - [h^1]^{-1}F \quad (19)$$

其中: $h^i = ([H(\Delta\tau)] - I)^i, i=1, 2, \dots, i, \dots, n$ 。

按照式(19)可以递推求解荷载为常数情况的动力问题。

2.4 荷载为级数形式的动力问题求解

对于可以用时间级数表达的动力问题:

$$f(t, \tau) = a_1(t) + a_2(t)\tau + \dots + a_n(t)\tau^{n-1},$$

$$F_{\Delta\tau}(t) = \begin{cases} \int_0^{\Delta\tau} f(t, \tau)(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)d\tau \\ 0 \\ \int_0^{\Delta\tau} \frac{df(t, \tau)}{d\tau}(3\xi^2 - 2\xi^3)d\tau \end{cases}, \quad \xi = \tau / \Delta\tau \quad (20)$$

可以按照下式分析:

$$u^1 = Hu^0 + F(0)$$

...

$$u^{n+1} = Hu^n + F(n\Delta\tau) \quad (21)$$

$$\{\Delta u\}^0 = u^1 - u^0 = h^1 u^0 + F(0)$$

...

$$\{\Delta u\}^n = u^{n+1} - u^n = h^1 u^n + F(n\Delta\tau) \quad (22)$$

$$\{\Delta^2 u\}^0 = \{\Delta u\}^1 - \{\Delta u\}^0 = h^2 u^0 + h^1 F(0) + \Delta F(0)$$

...

$$\{\Delta^2 u\}^n = \{\Delta u\}^{n+1} - \{\Delta u\}^n = h^2 u^n + h^1 F(n\Delta\tau) + \Delta F(n\Delta\tau) \quad (23)$$

按照式(21)~式(23)可以递推计算出:

$$\{\Delta^n u\}^0 = \{\Delta^{n-1} u\}^1 - \{\Delta^{n-1} u\}^0 = h^n u^0 + h^{n-1} F(0) + \sum_{i=1}^{n-1} h^{n-i-1} \Delta^i F(0)$$

同理可以推出:

$$\begin{aligned} \{\Delta^n u\}^m &= \{\Delta^{n-1} u\}^{m+1} - \{\Delta^{n-1} u\}^m = \\ &h^n u^m + h^{n-1} F(\Delta t) + \sum_{i=1}^{n-1} h^{n-i-1} \{\Delta^i F(\Delta t)\} \\ \Delta F(t) &= F(\Delta\tau + t) - F(t) \end{aligned}$$

...

$$\Delta^n F(t) = \Delta^{n-1} F(\Delta\tau + t) - \Delta^{n-1} F(t)$$

其中: 对于 $\Delta F(t), \dots, \Delta^n F(t)$ 的显式表达式, 则由泰勒公式展开可得:

$$\Delta F(t) = F(\Delta\tau + t) - F(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\tau^i}{i!} F^i(t)$$

...

$$\Delta F(n\Delta\tau + t) = F(n\Delta\tau + t) - F((n-1)\Delta\tau + t) =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n^i - (n-1)^i) \Delta\tau^i}{i!} F^i(t) \quad (24)$$

同样有:

$$\Delta^2 \mathbf{F}(t) = \Delta \mathbf{F}(\Delta\tau + t) - \Delta \mathbf{F}(t) = \sum_{i=2}^n \frac{(2^i - 2)\Delta\tau^i}{i!} \mathbf{F}^i(t)$$

...

$$\Delta^2 \mathbf{F}(n\Delta\tau + t) = \Delta \mathbf{F}(n\Delta\tau + t) - \Delta \mathbf{F}((n-1)\Delta\tau + t) = \sum_{i=2}^n \frac{(n^i - 2(n-1)^i + (n-2)^i)\Delta\tau^i}{i!} \mathbf{F}^i(t) \quad (25)$$

根据式(24)~式(25)可得:

$$\Delta^j \mathbf{F}(t) = \sum_{i=j}^n \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^j \left(\frac{(-1)^{n-k} j!(n-k)^i}{(j-k)!k!} \right) \Delta\tau^i \mathbf{F}^i(t) \quad (26)$$

则 n 阶级数问题的解为:

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{t} \left(\mathbf{u}^0 + [\mathbf{h}^1]^{-1} \mathbf{F}(0) + [\mathbf{h}^n]^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbf{h}^{n-i-1}] \Delta^i \mathbf{F}(0) \right) - \left([\mathbf{h}^1]^{-1} \mathbf{F}(\Delta t) + [\mathbf{h}^n]^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{h}^{n-i-1}] \Delta^i \mathbf{F}(\Delta t) \right) \right) \quad (27)$$

考虑以下动力问题:

$$\ddot{u} + u + 2 + 0.2t - 0.02t^2 + 0.002t^3 = 0,$$

$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0$$

取 $\Delta t = 2.5$, 图 3 给出精细解与精确解之比。从图形看结果吻合性非常好, 虽然步长较大, 但没有出现发散现象。

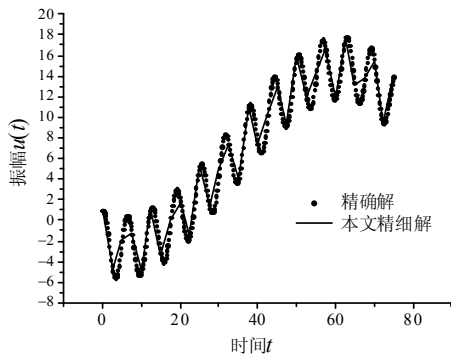


图 3 精细解与精确解对比

Fig.3 Comparison of precise solution and exact solution

3 非线性问题的求解

3.1 非线性问题的求解

考虑非线性问题, 可以仿照式(4)将非线性问题表示为如下形式:

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_{n+1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_n \\ \mathbf{N}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

其中, \mathbf{N}_n 、 \mathbf{N}_{n+1} 表示非线性项部分。

本文提出一种增量递推法求解上面的非线性

问题, 给定第 i 步初始解 \mathbf{u}_{n+1}^{i-1} , 通过增量 $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^i$ 逐步修正得到修正解 \mathbf{u}_{n+1}^i 。

令 $\mathbf{u}_n^i = \mathbf{u}_n^{i-1} + \Delta \mathbf{u}_n^i$, $\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_{n+1}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i$, 并将 \mathbf{N}_{n+1} 、 \mathbf{N}_n 进行线性化:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_n^i \\ \mathbf{N}_{n+1}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_n^{i-1} \\ \mathbf{N}_{n+1}^{i-1} \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_T^{i-1} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^i \\ \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i \end{Bmatrix},$$

\mathbf{K}_T^{i-1} 是切向刚度矩阵, 代入式(28)并整理可得:

$$\mathbf{K}_T^{i-1} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^i \\ \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_n^{i-1} \\ \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{i-1} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

其中:

$$\Delta \mathbf{F}_n^{i-1} = \mathbf{F}_n - [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^{i-1} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{i-1} \end{Bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{F}_{n+1}^{i-1} = \mathbf{F}_{n+1} - [\mathbf{C}, \mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^{i-1} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{i-1} \end{Bmatrix}.$$

将式(29)整理可以表示为 i 步增量递推形式:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^i \\ \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^{i-1} & \mathbf{a}_{12}^{i-1} \\ \mathbf{a}_{21}^{i-1} & \mathbf{a}_{22}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_n^i \\ \Delta \mathbf{F}_n^{i-1} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

由于 \mathbf{u}_n^i 为已知, $\Delta \mathbf{u}_n^i$ 始终为 0, 所以该式递推格式为:

$$\{\Delta \mathbf{u}_n^i\} = \mathbf{a}_{12}^{i-1} \{\Delta \mathbf{F}_n^{i-1}\} \quad (31)$$

式(31)中的 \mathbf{a}_{12}^{i-1} 可以同样采用精细矩阵算法进行计算。

3.2 算例

为了验证本文计算方法的有效性, 考虑一个非线性问题 $\ddot{u} + 0.05\dot{u} + u + u^3 + \sin(t) = 0$, $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 0$, 利用上式, $\Delta t = 1.0$ 时按照增量计算得到下面的解, 计算点数为 30, 结果和 Runge-Kutta 法进行比较, Runge-Kutta 计算点数为 250, 数值结果表明两种方法非常吻合。

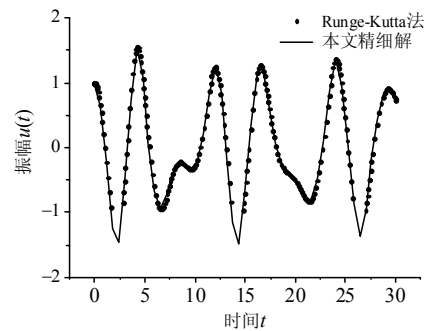


图 4 精细解和 Runge-Kutta 法结果比较

Fig.4 Comparison of precise solution and Runge-Kutta method

4 结论

本文根据 Hamilton 变作用定律构造了时空有限元, 利用时间的一维性, 将其转换为传递矩阵, 避免了直接在时间方向离散。由于计算的稳定性和传递矩阵的谱半径有关系, 本文提出了时空有限元的精细计算方法, 该方法可以达到数值意义上的精确解。对于一般时变问题可以进行级数展开, 本文也给出了荷载为时间级数形式问题的解。数值分析表明本文方法在线性问题上是非常准确的。本文最后将该方法推广到非线性问题分析上, 将非线性问题的求解转化为增量解的求解, 通过每步增量解的精细计算, 逐步修正初始解, 最终可以得到非线性问题的解, 数值证明该非线性解也是稳定可靠的。

参考文献:

- [1] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics [J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1959, 85(3): 67—94.
- [2] Bathe K J. Finite element procedures in engineering analysis [M]. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1982: 499—556.
- [3] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131—136.
Zhong Wanxie. On precise time integration method for structural dynamics [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131—136. (in Chinese)
- [4] 谭述君, 高强, 钟万勰. Duhamel 项的精细积分方法在非线性和微分方程数值求解中的应用[J]. 计算力学学报, 2010, 27(5): 752—759.
Tan Shujun, Gao Qiang, Zhong Wanxie. Applications of Duhamel terms precise integration method in solving nonlinear differential equations [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(5): 752—759. (in Chinese)
- [5] 刘婷婷, 张文首, 林家浩. 基于 Householder 方法的子域精细积分[J]. 计算力学学报, 2009, 26(4): 535—539.
Liu Tingting, Zhang Wenshou, Lin Jiahao. Subdomain precise integration method based on Householder method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, 26(4): 535—539. (in Chinese)
- [6] 陈伯望, 王海波. 结构非线性动力分析的精细积分多步法[J]. 工程力学, 2009, 26(5): 41—46.
Chen Bowang, Wang Haibo. Precise integral multi-step method for nonlinear dynamic analysis of structures [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(5): 41—46. (in Chinese)
- [7] Zhong W X, Williams F W. A precise time step integration method. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers [J]. Part C. Journal of Mechanical Engineering Science, 1994, 208(6): 427—430.
- [8] 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的更新精细积分方法[J]. 力学学报, 2004, 36(2): 191—196.
Wang Mengfu, Zhou Xiyuan. Renew al precise time step integration method of structural dynamic analysis [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2004, 36(2): 191—196. (in Chinese)
- [9] 储德文, 王元丰. 精细直接积分法的积分方法选择[J]. 工程力学, 2002, 19(6): 115—119.
Chu Dewen, Wang Yuanfeng. Integration formula selection for precise direct integration method. [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(6): 115—119. (in Chinese)
- [10] Zhong W X. On precise integration method [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 163(1): 59—78.