

关于分析力学的三本名著

——分析力学札记之二十四

梅凤翔¹⁾

(北京理工大学力学系, 北京 100081)

摘要 介绍 20 世纪初分析力学的 3 本名著: Appell 的, Суслов 的和 Whittaker 的.

关键词 分析力学, 名著, 点评

中图分类号: O31 **文献标识码:** A

doi: 10.6052/1000-0879-13-218

1 Appell 的理论力学

1.1 概况

Appell P (1855~1930), 汉译阿佩尔, 法国数学家, 力学家. 他的著作《Traité de Mécanique Rationnelle》(《理性力学》)^[1], 共 5 卷, 1893 年出第 1 版, 1902 年出第 2 版, 1909 年出第 3 版, 被誉为 19 世纪末最著名的教材之一. 1911 年前 3 卷被译成俄文, 1960 年将前 2 卷 1953 年第 6 版译成俄文, 并改名为《理论力学》.

1.2 内容

Appell 书的前 2 卷共 27 章 532 节.

第 1 卷静力学·点的动力学, 计 16 章, 包括矢量理论, 运动学, 力学基本定律·质量与力, 功·力函数, 点的平衡·系统的平衡, 刚体的平衡, 可变系统, 可能速度原理, 摩擦概念, 一般知识·直线运动·炮弹运动, 中心力·行星的椭圆运动, 点沿固定曲线和动曲线的运动, 点沿固定曲面和动曲面的运动, 自由质点的 Lagrange 方程, d'Alembert 原理·最小作用量原理, 正则方程, Jacobi 定理.

第 2 卷系统动力学·分析力学, 计 11 章, 包括惯性矩, 系统运动普遍定理·7 个万有运动方程, 刚体运动·平面平行运动, 刚体定点运动, 自由刚体, 相对运动, d'Alembert 原理, 分析动力学普遍方程, 正则方程·Jacobi 定理和 Poisson 定理·Hamilton 原理·最小作用量原理和最小拘束原理, 打击, 机器概念·相似.

本文于 2013-05-21 收到.

1) 梅凤翔, 教授. E-mail: meifx@bit.edu.cn

1.3 精彩章节

(1) 第 464 节, 直接应用 Lagrange 方程于最小参数数目的不可能性.

(2) 第 465 节, 既适合完整系统, 又适合非完整系统的运动方程的普遍形式.

(3) 第 469 节, 仅用一个函数 T 表征非完整系统的不可能性.

(4) 第 470 节, 伺服约束.

1.4 点评

(1) 文献 [2] 以“关于 Appell 的理论力学”为题, 从理论力学教材的角度做了一些讨论. 实际上, 有 8 章涉及分析力学内容, 包括 d'Alembert 原理, Lagrange 方程, 正则方程, Hamilton 原理, Jacobi 定理, 最小作用量原理, 最小拘束原理, 分析动力学普遍方程等.

(2) 书中将 d'Alembert 原理与 d'Alembert-Lagrange 原理, 即动力学普遍方程, 统称为 d'Alembert 原理.

(3) Appell 书中最重要的贡献, 就是“分析动力学普遍方程”, 即 Appell 方程, 它既适合完整系统, 又适合非完整系统.

(4) 书中介绍了伺服约束, 这类约束是主动约束, 非 Chetaev 型约束, 需专门研究.

(5) Appell 书在虚位移原理的充分性证明中, 利用了实位移是虚位移之一的条件, 因此, 证明仅适合双面理想定常完整系统, 或双面理想非完整齐次约束系统. 目前尚未见到原理的严格证明.

(6) Appell 书中的虚位移原理和动力学普遍方程的前提条件是“无摩擦约束”, 在俄译本中改为理想约束. 然而, 两者不是一样的.

(7) Appell 方程的积分方法还有待研究.

2 Суслов 的理论力学

2.1 概况

Суслов Г К(1857~1932), 汉译苏斯洛夫, 俄罗斯力学家. 1880 年与 Ляпунов АМ(1857~1918) 同时毕业于彼得堡大学. 在莫斯科大学完成博士学位论文《允许有给定积分的力函数》, 一生发表近 50 篇原创性论文, 大部分涉及点和刚体的经典动力学问题^[3]. Суслов 重视力学的基本概念和方法论, 表述在他的分析力学教程和一系列论文中. 1900 年出版两卷《分析力学基础》, 1946 年改名为《理论力学》^[4], 由 Бухгольц 和 Голбцман 校订, 指出改名从近代术语观点看更能反映书的内容.

2.2 内容

Суслов 的《理论力学》, 共 4 部分, 57 章, 315 节. 第 1 部分为矢量代数和解析基础, 共 4 章. 第 2 部分为运动学共 9 章. 第 3 部分为质点动力学, 共 11 章. 第 4 部分为质点系动力学, 共 33 章, 包括质量集合的 2 章; 系统动力学基本原理·运动方程·动力学定律的 7 章, 其中有虚位移, 可能位移, 第 1 类 Lagrange 方程, 第 2 类 Lagrange 方程, Hamilton 方程; 力学普遍原理的 2 章: 微分原理和积分原理; 静力学的 4 章, 其中有虚位移原理、平衡稳定性; 动力学方程的积分的 5 章; Jacobi 最终乘子, Jacobi-Poisson 定理, 独立坐标中的 Hamilton 主函数·特征函数, 对非自由运动与条件方程相关的坐标中的主函数和特征函数, 特征函数的某些应用; 刚体动力学的 10 章: 自由刚体的运动方程, 非自由刚体的运动方程, 刚体定点运动·Euler 情形, 刚体定点运动·正和逆 Poinsot 运动, 刚体定点运动: Lagrange 情形, 刚体定点运动: Ковалевская 情形, 遵从有限约束的非自由刚体的运动的例子, 遵从不可积微分约束的非自由刚体运动的例子, 刚体定点运动: Бобылёв-Стеклов 情形, 属于具有固有运动的轴的刚体运动方程; 打击理论的 3 章: 质点的打击理论, 质点系的打击理论, 刚体的打击理论.

Суслов 这本书长达 655 页, 其中属于分析力学的包括第 1 类 Lagrange 方程, 第 2 类 Lagrange 方程, Hamilton 方程, 微分原理, 积分原理, 虚位移原理, Jacobi 最终乘子, Jacobi-Poisson 定理, Hamilton 主函数, 受有约束的刚体运动等.

2.3 精彩章节

(1) 第 87 节牛顿第三定律, 写到: “牛顿第一定律指出物体上是否施力, 第二定律指出力的模和方

向, 第三定律说到物体相互作用的重要性质, 因此说到力的根源. …… 按牛顿的表述, 取物质或质量作为基本概念, 借助时间和空间的概念, 那么力就是导出概念. 反之, 取力作为基本概念, 此时质量概念可借助一些条件来导出”.

(2) 第 201 节 Hamilton 形式的稳定作用量原理, 指出该原理不适合具有不可积微分约束的系统.

(3) 第 207 节虚位移原理, 给出形式

$$\sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \leq 0$$

(4) 第 208 节虚位移原理对确定系统平衡位置的应用, 给出质点系同时受到有限约束和微分约束的带乘子的方程.

(5) 第 264 节非自由刚体一般情形的运动方程, 给出刚体同时受到有限约束和微分约束的带乘子的方程.

(6) 第 300 节属于具有固有运动轴的刚体运动方程.

2.4 点评

(1) 作为 Ляпунов 的同学, Суслов 更偏重教学, 他对牛顿第三定律的理解与众不同.

(2) 给出的虚位移原理的形式, 既适合双面约束又适合单面约束系统, 是虚位移原理的全面准确表达.

(3) Суслов 认为对非完整系统 Hamilton 原理不是稳定作用量原理. 原理中 $d\delta$ 运算不能交换的结果被 Новосёлов 称为非完整系统 Hamilton 原理的 Суслов 形式^[5-6].

(4) 给出同时受有完整约束和非完整约束的平衡方程以及刚体运动微分方程. 这样处理比分别研究完整约束和非完整约束系统更具普遍性.

(5) 第 300 节实际是动轴理论, 它可应用于建立非完整系统的微分方程, 方程中会出现约束力^[7].

(6) Суслов 博士学位论文的结果被称为动力学逆问题中的经典 Суслов 问题^[8-9].

(7) Суслов 关于虚位移原理充分性的证明不够充分. 他将动能定理写成形式

$$\delta T = \sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^n \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v$$

由理想约束性质

$$\sum_{v=1}^n \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \geq 0$$

而得到

$$\sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \leq 0$$

实际上, 动能定理给出的是

$$dT = \sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^n \mathbf{R}_v \cdot d\mathbf{r}_v$$

仅当实位移是虚位移之一时, 才能将 d 写成 δ . 因此, 这种证明仅适合理想完整定常系统或理想非完整齐次约束系统.

3 Whittaker 的分析动力学

3.1 概况

Whittaker ET (1873~1956), 汉译惠特克, 英国数学家, 力学家. 他的著作 *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, with an Introduction to the Problem of Three Bodies*^[10] 由剑桥大学出版社出版, 1904 年出第 1 版, 1917 年出第 2 版, 1927 年出第 3 版, 1937 年出第 4 版, 1937 年出俄译本, 名为《分析动力学》, 1944 年美国第 1 次印刷.

3.2 内容

Whittaker 的书共 16 章, 205 节, 456 页, 包括运动学预备, 运动方程, 积分可用原理, 质点动力学可解问题, 刚体动力学说明, 刚体动力学可解问题, 振动理论, 非完整系统·耗散系统, 最小作用量原理和最小曲率原理, Hamilton 系统及其积分不变量, 动力学的变换理论, 动力学系统的积分性质, 三体问题的降阶, Bruns 和 Poincaré 定理, 轨道的一般理论, 用级数积分等.

3.3 精彩章节

(1) 第 29 节受绕轴匀速转动约束系统的运动, 给出一类相对运动力学方程.

(2) 第 30 节准坐标下的 Lagrange 方程, 介绍了 Boltzmann 和 Hamel 的工作.

(3) 第 31 节给出广义势函数的例子.

(4) 第 32 节初始运动.

(5) 第 42 节利用能量积分将一动力学系统降阶为较少自由度问题.

(6) 第 151 节已知一个积分确定作用在系统上的力.

3.4 点评

(1) 朱照宣先生曾说过, Whittaker 这本书把

1904 年以前有关经典动力学的成果做了很好的总结. 朱先生的话很中肯.

(2) Whittaker 的书被许多书刊列为主要参考文献.

(3) 全书材料准确, 大多给出出处, 习题典型、难度较大, 排版很少有错.

(4) 受匀速转动约束问题被 Лурье 推广到一般情形^[11].

(5) 广义势函数引出的 Helmholtz 条件, 即自伴随条件, 在 Lagrange 力学逆问题中被广泛采用^[12].

(6) 利用能量积分降阶结果得到的方程, 被称为 Whittaker 方程. 多年前, 作者审过一篇稿件, 国内一位年轻作者未看过这本书, 独自导出了这个方程, 当然不能发表了. Whittaker 方程可推广到一类非完整系统^[7].

(7) 已知一个积分确定作用在系统上的力, 被称为 Bertrand 定理, 被推广应用于非完整系统^[9].

(8) 此外, 20 世纪 30 年代, Whittaker 给出不能 Lagrange 化的例子, 也被称为 Whittaker 方程, 有形式^[12]

$$\ddot{q}_1 = q_1, \quad \ddot{q}_2 = \dot{q}_1$$

Whittaker 方程在分析力学的发展过程中有重要作用^[13].

(9) 第 90 节研究了非完整系统在小的意义下的稳定性问题, 认为待定乘子是小量, 因此, 非完整约束方程中的系数取为常数, 而约束方程可积分, 这样就把非完整系统平衡稳定性问题变成了相应完整系统问题. 这样是不对的.^[14]

(10) 第 97 节碰撞之例中将 Coulomb 摩擦定律作为联系法向和切向冲量间的物理条件. 1984 年 Kane 举例指出, 这个条件有时不成立. 文献 [15] 给出两种修正方案.

4 结论

介绍的 3 本书是 20 世纪初关于理论力学和分析力学的名著, 其中 Appell 的和 Суслов 的风格相近, 而 Whittaker 的是另一种风格. 作者在学习这 3 本书中, 受益非浅, 启发良多.

参 考 文 献

- 1 Appell P. *Traité de Mécanique Rationnelle*, T1, TII. Sixième Éd. Paris: Gauthier-Villars, 1953
- 2 梅凤翔. 关于 Appell 的理论力学. *力学与实践*, 2010, 32(3): 111-112

- 3 Моисеев НД. Очерки Развития Механики. Москва: Изд. Моск. Унив, 1961
- 4 Суслов ГК. Теоретическая Механика. Москва: Гостехизлат, 1946
- 5 Новосёлов ВС. Варцацонные Методы в Механике Лендснград: Лгу, 1966
- 6 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991
- 7 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
- 8 Галиуллин АС. Методы Решения Обратных Задач Динамики. Москва: Наука, 1986
- 9 梅凤翔. 动力学逆问题. 北京: 国防工业出版社, 2009
- 10 Whittaker ET. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, with an Introduction to the Problem of Three Bodies. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1904
- 11 Лурье АИ. Аналитическая Механика. Москва: ГИФМЛ, 1961
- 12 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics I. New York: Springer-Verlag, 1978
- 13 梅凤翔. 关于 Whittaker 方程和 Hojman-Urrutia 方程. 力学与实践, 2012,34(3):62-63
- 14 Савин ГН, Путята ТВ, Фрадлин БН. Очерки Развития Некоторых Фундаментальных Проблем Механики. Киев: Наукова Духка, 1964
- 15 刘延柱. 关于摩擦碰撞的 Kane 难题. 力学与实践, 2012, 34(1): 91-94

(责任编辑: 胡漫)

理论力学多面摩擦问题的程式化解法

苏振超^{*,1)} 薛艳霞^{*} 王怀磊[†]

^{*} (厦门大学嘉庚学院土木工程系, 福建厦门 363105)

[†] (南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘要 为有效克服试凑法、穷举法在处理多面摩擦临界状态问题时造成的重复计算, 通过引入临界状态集和偏离度两个新概念, 提出一种求解多面摩擦临界状态问题的程式化方法. 通过一个较为复杂的多面摩擦问题验证了方法的有效性. 结果表明, 该方法显著降低试凑不同临界状态带来的计算量, 可作为摩擦问题计算机辅助求解的一种有效算法.

关键词 多面摩擦, 临界状态集, 偏离度, 程式化, 静摩擦

中图分类号: O31 **文献标识码:** A

doi: 10.6052/1000-0879-13-230

引言

静摩擦的临界状态是理论力学静力学部分中的一个重要内容, 也是学习的难点之一. 随着作用在一个物体上外力的变化, 其临界状态可能会发生切换^[1]. 而对于具有多个摩擦接触面 (以下简称多面摩擦) 的物体系统, 由于各摩擦面都有可能进入临界状态, 则随着外力的不断变化, 系统处于临界状态的位置会发生变化, 其临界状态的切换会更复杂. 若将多个摩擦接触面中发生临界状态的位置组成的集合定义为临界状态集, 则在特定外力作用下, 如何确定

系统的临界状态集是静摩擦问题的难点之所在.

现行的理论力学教材^[2-7] 在处理静摩擦问题时大都采用试凑法和穷举法, 即任选一处或几处摩擦面并假设其达到临界状态, 然后利用平衡方程和摩擦定律求解其他处的摩擦力及法向约束反力, 最后根据库伦静摩擦定律 (以下简称摩擦定律) 判断解的合理性. 这种方法显然是可行的, 但是对于摩擦面较多的系统, 由于对系统的临界状态集没有任何先验的知识, 给出的假设往往具有一定的盲目性, 因此常常需要反复对临界状态集进行多次选择, 造成不必要的重复计算.

本文基于对多面摩擦问题的分析与归纳, 试图寻求一种求解多面摩擦问题的程式化方法, 以克服试凑法、穷举法在处理多面摩擦临界状态问题时的盲目性, 提高问题的求解效率.

1 多面摩擦问题的程式化求解流程

在求解具有多面摩擦的平衡系统关于某一物理或几何参数的极值 (如位置, 倾角等) 问题时, 往往需要确定系统的临界状态集. 求解步骤一般如下:

(1) 列出系统的静力学平衡方程 (此时一般为超

2013-05-28 收到第 1 稿, 2013-11-05 收到修改稿.

1) E-mail: suzc888@126.com