

两类有脱层损伤层合圆柱壳的半解析法研究¹⁾

张银波²⁾ 但 敏³⁾

(中国民航大学航空工程学院, 天津 300300)

摘要 为了研究层合壳脱层, 本文首先建立了柱坐标系下 Hamilton 正则方程的 8 节点等参元列式; 然后分别采用了“先分后合”模型和“弱粘接”模型对开口壳的脱层损伤进行了模拟; 通过利用层间的力学关系建立了整个壳的求解方程; 最后分别从粘接完好和脱层两类情况对开口壳进行研究, 并计算脱层前缘裂纹扩展的能量释放率. 数值实例的分析结果表明环向脱层受外载荷影响大于轴向脱层外载荷影响, 脱层深度对两类脱层模型影响较大.

关键词 Hamilton 正则方程, 8 节点等参元, 圆柱壳, 脱层

中图分类号: O343 文献标识码: A DOI: 10.6052/1000-0879-13-141

SEMI-ANALYTICAL SOLUTION FOR TWO KINDS OF DELAMINATION MODELS OF LAMINATED CYLINDRICAL SHELLS¹⁾

ZHANG Yinbo²⁾ DAN Min³⁾

(Aeronautical Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract To study the delamination process of a laminated shell, the 8-node isoparametric element formulation for laminated shells based on the Hamilton canonical equation in the Cylindrical Coordinates is derived firstly. Then the separating-combining model and the weak-interface model are used to simulate the delamination between layers. The solution for whole shells is obtained. For the perfect interface and delamination situation, the two models are analyzed and the energy release rate of the delaminated shell is obtained finally. The results of numerical examples show that the energy release rate of a circumferential delamination is larger than that of an axial delamination, and the laminated thickness affects greatly the two models.

Key words Hamilton canonical equation, 8-node isoparametric element, cylindrical shell, delamination

引 言

当代各种先进的民用航空动力装置, 都对结构提出更可靠、更轻、更耐久等要求. 为了适应发动机的发展, 国外主流航空发动机制造厂商纷纷发展新型航空材料, 复合材料就是其中重要材料之一^[1]. 例如 GE 公司在 GE90 型发动机的风扇叶片和出口导流叶片均采用树脂基复合材料, RB211, Trent800 和 PW4084 等发动机的包容环均采用了 Kevlar 树脂复合材料作为保护层^[2].

在这些壳类结构的层合复合材料中, 层合壳的

层间由于局部制造的缺陷和长期服役, 导致相邻层间出现脱层损伤, 而脱层是复合材料结构中常见的且较具威胁性的破坏形式之一, 国内外有大量文献对脱层进行研究^[3-7]. 其中文献 [6] 针对复合材料层合壳脱层损伤问题提出“先分后合”的数学模型, 文献 [7] 在该数学模型的基础上研究了脱层板的固有频率. “先分后合”的数学模型有较完善的计算过程, 但是该模型推导较为复杂, 而层间“弱界面”模型^[8-9]有相对简单的推导过程, 在模拟脱层中有一定的优越性.

2013-04-09 收到第 1 稿, 2013-07-18 收到修改稿.

1) 中国民航大学校内科研基金 (06kym12) 资助项目.

2) 张银波, 1979 年生, 硕士, 讲师, 主要研究民用航空发动机结构强度. E-mail: zhangyinbo@163.com

3) 但敏, 1983 年生, 硕士, 讲师, 主要研究民用航空发动机结构强度. E-mail: danmincauc@163.com

本文在弹性力学 Hamilton 正则方程的半解析法 [10-11] 的基础上, 首先运用 8 节点有限元 [7] 建立了复合材料层合壳的混合控制方程; 然后利用层间位移和应力关系, 将这两类层合开口壳的脱层损伤模型进行运用, 验证了半解析法在层合开口壳脱层模型上运用的正确性.

1 Hamilton 正则方程的 8 节点等参元列式

对于绝大多数工程材料, 在直角坐标系下, 材料单元体的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{\theta r} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中, $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{\theta r}, \tau_{xr}, \tau_{x\theta}$ 为应力分量; u, v 和 w 分别表示 x, θ, r 3 个方向的位移; r 为单层薄壳的中性面半径; $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{16}, C_{22}, C_{23}, C_{26}, C_{33}, C_{36}, C_{44}, C_{45}, C_{55}, C_{66}$ 是弹性材料的刚度系数, $C_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 与工程弹性参数的转变关系可见文献 [12].

对于图 1 (h_k 为第 k 层厚度, 其他参数解释见下文) 中的整个壳, 根据文献 [13-15], 以 r 坐标模拟为时间 t , 利用修正后的 Hellinger-Reissner 变分原理可将壳的总势能表示为

$$\delta \Pi = \delta \iiint_V L_R dV + \delta \iint_{S_A} (\lambda_1^T \mathbf{B}_{p\bar{q}} - \lambda_0^T \mathbf{B}_{\bar{p}q}) dS \quad (2)$$

其中 $L_R = \frac{\hat{P}}{r} \mathbf{Q}_{,r} - H$ 是 Reissner's 能密度函数; $\hat{P} = r\mathbf{P} = r[\tau_{xr} \quad \tau_{\theta r} \quad \sigma_r]^T$, H 为 Hamil-

ton 函数, $\mathbf{Q}_{,r} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r}$, $\hat{P} = r[\tau_{xr} \quad \tau_{\theta r} \quad \sigma_r]^T$, $\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w]^T$; $S_A = S_u + S_\sigma + S_m$ 为混合边界条件; $\lambda_1 = [\lambda_x - 1 \quad \lambda_\theta - 1 \quad \lambda_r - 1]^T$ 和 $\lambda_0 = [\lambda_x \quad \lambda_\theta \quad \lambda_r]^T$ 是特意引入的特征系数 [7]; $\lambda_i (i = x, \theta, r)$ 的值为 1 和 0, 以此来表示边界状态的特征; $\mathbf{B}_{p\bar{q}} = [p_x(u - \bar{u}) \quad p_\theta(v - \bar{v}) \quad p_r(w - \bar{w})]^T$, $p_i (i = x, \theta, r)$ 是边界面 3 个坐标轴方向上的应力分量; \bar{u}, \bar{v} 和 \bar{w} 是边界面 3 个坐标轴方向上给定的位移分量; $\mathbf{B}_{\bar{p}q} = [\bar{p}_x u \quad \bar{p}_\theta v \quad \bar{p}_r w]^T$, $\bar{p}_i (i = x, \theta, r)$ 是边界面 3 个坐标轴方向上给定的应力分量. 其值可见文献 [7].

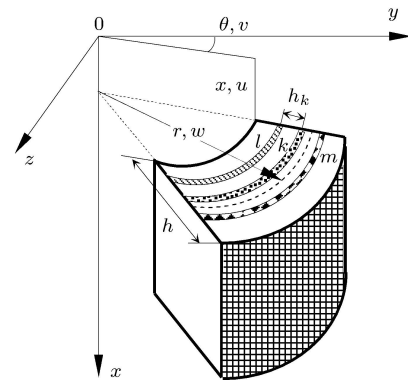


图 1 层合圆柱壳

利用高阶单元具有比低阶线性单元更高的收敛率, 8 节点有限元比 4 节点有限元具有更快的收敛率, 本文引入 8 节点形函数 [7], 对每一薄层进行网格划分, 见图 2.

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)/2, & i = 2, 6 \\ (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2)/2, & i = 4, 8 \\ (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)/4, & i = 1, 3, 5, 7 \end{cases} \quad (3)$$

通过控制 ξ 和 η 的值来选取节点. 即可得图 1 中某

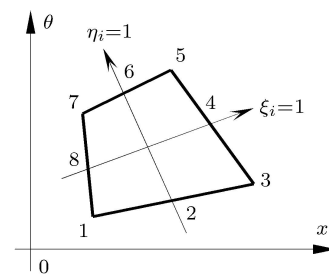


图 2 8 节点等参元

一个网格的形函数矩阵

$$\mathbf{N}_{\text{all}} = \begin{bmatrix} \bar{N}(x, \theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{N}(x, \theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{N}(x, \theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中

$$\bar{N}(x, \theta) = [N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta) \ N_4(\xi, \eta) \ N_5(\xi, \eta) \ N_6(\xi, \eta) \ N_7(\xi, \eta) \ N_8(\xi, \eta)]$$

设混合状态 Hamiltonian 等参元的场函数为

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, r) &= \mathbf{N}_{\text{all}} \mathbf{U}_{\text{all}}^T(r) \\ v(x, \theta, r) &= \mathbf{N}_{\text{all}} \mathbf{V}_{\text{all}}^T(r) \\ w(x, \theta, r) &= \mathbf{N}_{\text{all}} \mathbf{W}_{\text{all}}^T(r) \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xr}(x, \theta, r) &= \mathbf{N}_{\text{all}} \boldsymbol{\tau}_{xr, \text{all}}^T(r) \\ \tau_{\theta r}(x, \theta, r) &= \mathbf{N}_{\text{all}} \boldsymbol{\tau}_{\theta r, \text{all}}^T(r) \\ \sigma_r(x, \theta, r) &= \mathbf{N}_{\text{all}} \boldsymbol{\sigma}_{r, \text{all}}^T(r) \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\text{all}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\text{all}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\text{all}} \end{bmatrix} \quad (5c)$$

根据式 (5a) 和式 (5b), 可将式 (2) 中 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 写成矩阵形式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{N} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{N} \mathbf{Q}_e \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式 (6) 中下标 e 表示某一薄层中的编号为 e 的一个网格, 在处理完边界后整合到式 (2) 中. 然后对式 (2) 进行变分并分步积分, 即可得下列方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{Q}_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{F} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{Q}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Xi} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式 (7) 中矩阵 \mathbf{C} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{F} , \mathbf{D} 和 $\boldsymbol{\Xi}$ 的详细表达见文献 [7,12].

将第 k 薄层中的所有网格进行拼装并求逆, 即可得到单层壳的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{V}^{(k)}(z) = \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{V}^{(k)}(z) + \mathbf{G}^{(k)} \quad (8)$$

式 (8) 中等式右侧 $\mathbf{K}^{(k)}$ 表示第 k 层积分后所得状态方程, 其余两项类推, 详情见文献 [7], 由常数

微分方程知, 式 (8) 的解为

$$\mathbf{V}^{(k)}(r) = \exp(\mathbf{K}^{(k)} r) \mathbf{V}^{(k)}(0) + \int_0^r \exp(\mathbf{K}^{(k)}(r - \tau)) \mathbf{G}^{(k)}(\tau) d\tau \quad (9)$$

令 $\mathbf{G}^{(k)}(\tau) = \mathbf{0}$ 忽略自身重量, 式 (9) 可以写成

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k)} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k)}$ 和 $\mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k)}$ 分别表示第 k 层壳的上下状态矢量; $\mathbf{T}^{(k)} = \exp(\mathbf{K}^{(k)} r)$ 是该层的传递矩阵.

同理类推, 可得层合壳中其他每层的控制方程. 例如第 $(k+1)$ 层有

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k+1)} \quad (11)$$

2 两类层合壳脱层模型

2.1 “先分后合”模型

把壳划分成上、下两个子壳, 并建立统一的坐标系, 如图 3 所示. 壳结构依次从内至外编号, 共 m 层.

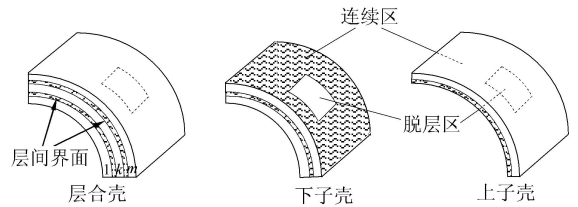


图 3 带有脱层的层合壳

对上、下两个子壳分别在 $x-\theta$ 曲面上采用相同的方法进行有限元离散, 并将层合壳分为脱层区和连续区两部分, 因此将式 (10) 和式 (11) 的力学分量 (包括应力分量和位移分量) 进行分类得到上子壳的状态方程

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_c^{\text{tt}}(r_t) \\ \mathbf{M}_d^{\text{tt}}(r_t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^t & \mathbf{T}_{12}^t \\ \mathbf{T}_{21}^t & \mathbf{T}_{22}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_c^{\text{tb}}(r_d) \\ \mathbf{M}_d^{\text{tb}}(r_d) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_c^t \\ \mathbf{F}_d^t \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{M}_c^{\text{tt}}(r_t)$ 和 $\mathbf{M}_c^{\text{tb}}(r_d)$ 为连续区外表面和内表面的力学分量; $\mathbf{M}_d^{\text{tt}}(r_t)$ 和 $\mathbf{M}_d^{\text{tb}}(r_d)$ 为脱层区外表面和内表面的力学分量; $\mathbf{T}_{ij}^t (i, j = 1, 2)$ 表示上子壳控制方程; \mathbf{F}_c^t 和 \mathbf{F}_d^t 分别表示上子壳重力分量.

在式 (12) 中, “c” 表示层合壳, “d” 表示脱层. “tt, tb” 第一个上标 “t” 表示上子壳, 第 2 个上标 “t” 标示上子壳的上表面, 第 2 个上标 “b” 标示上子壳的下表面.

同理得到下子壳的状态方程

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_c^{bt}(r_d) \\ \mathbf{M}_d^{bt}(r_d) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^b & \mathbf{T}_{12}^b \\ \mathbf{T}_{21}^b & \mathbf{T}_{22}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_c^{bb}(r_b) \\ \mathbf{M}_d^{bb}(r_b) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_c^b \\ \mathbf{F}_d^b \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中, $\mathbf{M}_c^{bt}(r_d)$ 和 $\mathbf{M}_c^{bb}(r_b)$ 表示连续区外表面和内表面的力学分量; $\mathbf{M}_d^{bt}(r_d)$ 和 $\mathbf{M}_d^{bb}(r_b)$ 表示脱层区外表面和内表面的力学分量; \mathbf{T}_{ij}^b ($i, j = 1, 2$) 表示上子壳控制方程; \mathbf{F}_c^b 和 \mathbf{F}_d^b 分别表示下子壳重力分量.

因为上子壳的内表面与下子壳的外表面在连续区内应力和位移分量是连续的, 即

$$\mathbf{M}_c^{tb}(r_d) = \mathbf{M}_c^{bt}(r_d) \quad (14)$$

因此将式 (12) 和式 (13) 联立得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_c^{tt}(r_t) \\ \mathbf{M}_d^{tt}(r_t) \\ \mathbf{M}_d^{bt}(r_d) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^t \mathbf{T}_{11}^b & \mathbf{T}_{11}^t \mathbf{T}_{12}^b & \mathbf{T}_{12}^t \\ \mathbf{T}_{21}^t \mathbf{T}_{11}^b & \mathbf{T}_{21}^t \mathbf{T}_{12}^b & \mathbf{T}_{22}^t \\ \mathbf{T}_{21}^b & \mathbf{T}_{22}^b & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_c^{bb}(r_b) \\ \mathbf{M}_d^{bb}(r_b) \\ \mathbf{M}_d^{tb}(r_d) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_c^t + \mathbf{T}_{11}^t \mathbf{F}_c^b \\ \mathbf{F}_d^t + \mathbf{T}_{21}^t \mathbf{F}_c^b \\ \mathbf{F}_d^b \end{Bmatrix} \quad (15)$$

在式 (15) 中, 层合壳内、外层表面和两个脱层表面的边界条件中有一半是已知的, 假定层合壳内、外层表面以及两个脱层表面的应力分量已知, 则由式 (15) 可求得内、外层表面以及两个脱层表面的位移分量, 再利用式 (12) 和式 (13), 即可求出含脱层损伤层合壳任意位置处所有的位移和应力分量.

2.2 弱粘接模型

对于层与层之间的界面, 不考虑层间粘接层的厚度, 无论是粘接完好还是发生脱层, 其力学性能关系有

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xr}^{(k+1)bot} &= \tau_{xr}^{(k)top} = K_{xr}^{(k)}(u^{(k+1)bot} - u^{(k)top}) \\ \tau_{\theta r}^{(k+1)bot} &= \tau_{\theta r}^{(k)top} = K_{\theta r}^{(k)}(v^{(k+1)bot} - v^{(k)top}) \\ \sigma_r^{(k+1)bot} &= \sigma_r^{(k)top} = K_{rr}^{(k)}(w^{(k+1)bot} - w^{(k)top}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $K_{ij}^{(k)}$ ($i, j = x, \theta, r$) 为第 k 层和第 $(k+1)$ 层之间的分离系数, 该值的取得与界面应力有关; $\tau_{ij}^{(k)top}$

($i, j = x, \theta, r$) 表示第 k 层上表面某节点的应力; $u^{(k+1)bot}$ ($u = u, v, w$) 表示第 $(k+1)$ 上某节点的位移, 其余类推.

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xr}^{(k+1)bot} \\ \tau_{\theta r}^{(k+1)bot} \\ \sigma_r^{(k+1)bot} \\ u^{(k+1)bot} \\ v^{(k+1)bot} \\ w^{(k+1)bot} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{xr} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\theta r} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{rr} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xr}^{(k)top} \\ \tau_{\theta r}^{(k)top} \\ \sigma_r^{(k)top} \\ u^{(k)top} \\ v^{(k)top} \\ w^{(k)top} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

其中, 对于界面分离关系为线性时, R_{ij} ($i, j = x, \theta, r$) 为常数. 可以看出 $R_{ij} = 0$ 表示层间粘接完好, $R_{ij} \rightarrow \infty$ 表示层间出现脱层.

式 (17) 可以写成

$$\mathbf{V}_{bot}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{V}_{top}^{(k)} \quad (18)$$

式中 $\mathbf{M}^{(k)}$ 表示式 (17) 行列式矩阵.

由式 (10) 和式 (11) 可得

$$\mathbf{V}_{top}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{V}_{bot}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \mathbf{V}_{bot}^{(k)} \quad (19)$$

对于共 m 层的层合壳, 同理可以得到

$$\mathbf{V}_{top}^{(m)} = \left(\prod_{k=1}^m \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \right) \mathbf{V}_{bot}^{(1)} \quad (20)$$

这样即可得到整个壳的控制方程. 对于理想粘接情况, $\mathbf{M}^{(k)}$ 均是单位矩阵; 出现界面脱层, 根据分离系数 R_{ij} 定义不同的系数就可以得到不同的界面模型.

3 求解

对于式 (10) 的齐次边界情况, 可得方程的通解^[12]为

$$\mathbf{R}_k(r_k) = \mathbf{T}_k(-t_k) \mathbf{R}_k(0) \quad (21a)$$

式中 t_k 是第 k 层的厚度; r_k 是第 k 层的中径, 对于 m 层的壳, 根据层间应力和位移的连续性, 有

$$\mathbf{R}_m(h) = \left(\prod_{j=1}^m \mathbf{T}_j \right) \mathbf{R}_1(0) \quad (21b)$$

式 (21a) 和 (21b) 中 $\mathbf{R}_k(0)$ 表示第 k 层的下表面应力位移参数; $\mathbf{T}_k(-t_k)$ 表示刚度矩阵; $\mathbf{R}_k(r_k)$ 表示上表面应力位移参数.

将其写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}(h) \\ \mathbf{Q}(h) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{Q}(0) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

式 (22) 中 $\mathbf{P}(h)$ 表示整个壳的上表面应力; $\mathbf{Q}(h)$ 表示整个壳的上表面位移; \mathbf{T}_{ij} ($i, j = 1, 2$) 表示整个壳的传递矩阵.

参照图 3, 如果式 (22) 中 h 代表整个层合壳厚度, 设整个层合壳的上下表面加载应力为 $\mathbf{P}(h)$, $\mathbf{P}(0)$, 通过式 (22) 可以求得

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{T}_{12}^{-1} (\mathbf{P}(h) - \mathbf{T}_{11}\mathbf{P}(0)) \quad (23)$$

$$\mathbf{Q}(h) = \mathbf{T}_{21}\mathbf{P}(0) + \mathbf{T}_{22}\mathbf{Q}(0) \quad (24)$$

式中, $\mathbf{Q}(h)$ 和 $\mathbf{Q}(0)$ 即为整个层合壳上、下表面的位移.

在已求解出整个层合壳下表面的位移 $\mathbf{Q}(0)$, 和已知道整个层合壳下表面的应力 $\mathbf{P}(0)$ 情况下, 将式 (22) 中的 h 设定为图 3 中第 1 层的厚度, 利用式 (22) 可求解出图 3 中第 1 层的 $\mathbf{P}(h)$ 和 $\mathbf{Q}(h)$. 以此类推, 即可求解出整个层合壳中每一层的应力和位移.

4 裂纹扩展的能量释放率

对于脱层壳, 由于中间含有脱层长度为 L_2 穿透裂纹, 根据 Griffith 的裂纹扩展理论, 恒力条件下的裂纹体, 在力 P 的作用下, 弹性伸长量 a 在裂纹长度不变的情况下, 载荷 P 与其作用点位移 a 成正比, 即如图 4 中直线 OM 所示.

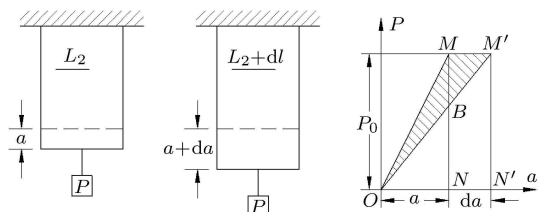


图 4 弹性体能量模型

由于直线 OM 的斜率即为弹性体的刚度系数, 其倒数 λ 称为柔度系数, 简称柔度, 等于单位载荷作用下的位移, 有

$$\lambda = \frac{a}{P} \quad (25)$$

在固定载荷 P_0 作用下, 当裂纹长度扩展 da 时, 弹性裂纹体刚度下降, 柔度增加, 载荷与位移关系改为斜率较小的直线 OM' , 当裂纹面扩展时, 弹性体所储存的应变能没有减少, 反而增加, 其增加量为 $(S_{OM'N'} - S_{OMN})$ (带下标的 S 表示面积). 载荷作的功等于 $MM'N'N$ 的面积, 外力所作的功除了部分供给弹性系增加应变能外, 还有剩余功

$$S_{MM'N'N} (S_{OM'N'} - S_{OMN}) = S_{OMM'} \quad (26)$$

该剩余功即图中阴影面积部分. 又因为 $S_{OMM'} = S_{MM'N'N}/2$, 这部分功用来使裂纹扩展, 恰好与弹性系应变能的增加相等, 都是外力做功的一半.

Griffith 的裂纹扩展理论中, 将层合壳和外载荷构成一起的整个系统的能量 (即势能) 用 U 表示, 裂纹扩展 S , 则单位面积系统能量的能量释放率 G_I 满足下式.

$$G_I = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta S} = - \lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial S} \quad (27)$$

负号是因为裂纹扩展时, 系统势能下降. 下标 I 表示第 1 类裂纹.

在裂纹扩展过程中, 因为 da , dl 和 $S_{OMM'}$ 都是微量, 如果脱层前缘为直线, 有

$$G_I = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial S} = - \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta MM'}{\Delta S} = - \frac{Pda/2}{bdl} \quad (28)$$

式 (25) 中有 $da = Pd\lambda$, 即式 (28) 可表示为

$$G_I = - \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{P^2 d\lambda}{2 dl} \quad (29)$$

将式 (24) 中所求的 $\mathbf{P}(h)$ 和 $\mathbf{Q}(h)$ 代入式 (29), 通过计算可以求出整个脱层壳的 G_I .

5 数值实例

本算例采用某种复合材料圆柱壳, 壳外侧受到均匀拉力 $q = 1$ 的作用, 壳内侧自由, 材料参数如下

(此处单位为无量纲化处理, 详情见文献 [13])

$$C_{12}/C_{11} = 0.246\ 269, C_{13}/C_{11} = 0.083\ 171\ 5$$

$$C_{22}/C_{11} = 0.543\ 103, C_{23}/C_{11} = 0.115\ 017$$

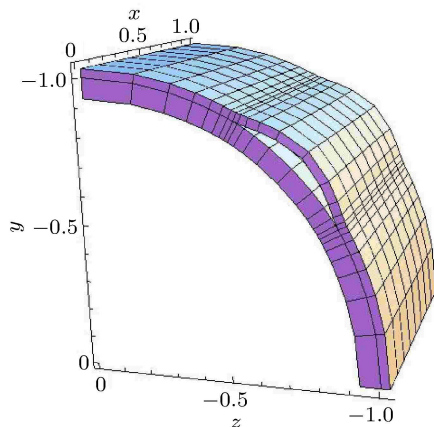
$$C_{33}/C_{11} = 0.530\ 172, C_{44}/C_{11} = 0.266\ 810$$

$$C_{55}/C_{11} = 0.159\ 914, C_{66}/C_{11} = 0.262\ 931$$

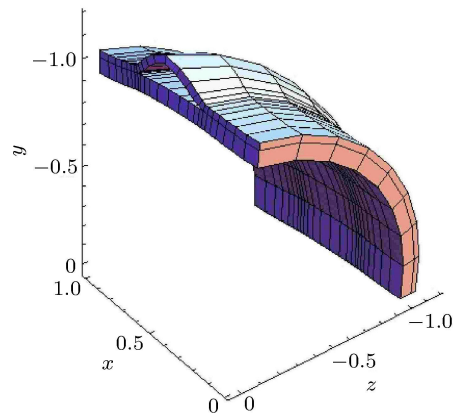
铺设方式为从内层到外层为 $[90^\circ/0^\circ]_3$, 几何参数为壳的平均半径 $r_0 = 1$, 壳长 $x = 1$, 中面弧长 $l = \pi r_0/2$, 总厚度 $h = 0.1r_0$, $h_1 = h_3 = 0.1h$, $h_2 = 0.8h$. 壳共分为 6 个薄层, 各层厚度从内到外分别为 $d_1 = 0.1h$, $d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0.2h$, $d_6 = 0.1h$.

一维贯穿脱层情况: 见图 5(a), 壳 $\theta = 0, \pi/2$ 边简支 (θ 为 $yo z$ 平面上的圆周角), $x = 0, l$ 边自由, 脱层半径 $r_d = r_0$, 脱层区域在壳几何中心且贯穿圆柱壳向两侧扩展.

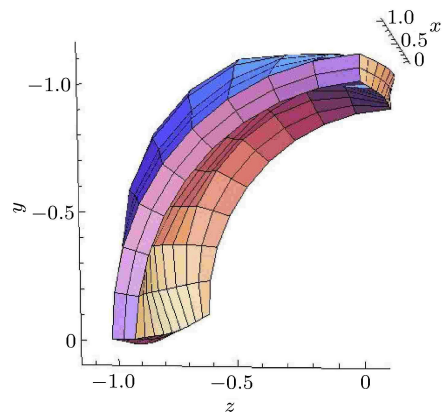
二维中间脱层情况: 见图 5(c), 壳 $\theta = 0, \pi/2$ 边固支; $x = 0, l$ 边自由, 脱层半径 $r_d = r_0$, 脱层区域在壳的几何中心且为矩形圆柱壳, 由中间向四边扩展.



(a) 环向一维贯穿脱层



(b) 轴向一维贯穿脱层



(c) 二维中间脱层

图 5 壳的层示意图

表 1 和表 2 中未加括号的数值是利用“先分后合”模型计算的, 方括号的数值是利用“弱粘接”模型计算所得. 为了满足 $R_{ij} \rightarrow \infty$, 经过多次试验, 当 R_{ij} 的数值取得大于 10^4 后, 可以逼近结果. 从本算例中可以看出, 无论是发生一维贯穿脱层还是二维中间脱层, 由于粘接作用, 虽然下子壳上没有施加力的作用, 还是在半径方向上有一定的位移, 随着脱层长度的增加, 下子壳的半径方向位移逐渐减小,

表 1 脱层壳不同脱层尺寸 (弧长) 下最大位移比较

	0.2l	0.3l	0.4l	0.5l	0.6l
上子壳上表面	33.778 1 [33.660 0]	46.559 3 [46.417 3]	57.214 [57.127 3]	59.090 7 [58.890 7]	61.712 1 [61.675 0]
上子壳下表面	33.614 7 [33.602 6]	46.342 6 [46.392 6]	56.956 7 [56.917 0]	58.817 7 [58.737 7]	61.441 7 [61.394 2]
下子壳上表面	20.618 1 [20.601 7]	17.544 9 [17.370 6]	14.230 0 [14.198 7]	11.372 1 [11.321 2]	9.129 98 [9.112 08]
下子壳下表面	20.248 1 [20.517 3]	17.131 9 [17.286 0]	14.170 3 [14.170 0]	11.337 9 [11.309 8]	9.106 23 [9.076 23]

表 2 脱层壳不同脱层尺寸 (长 × 宽) 下最大位移比较

	0.2×0.2	0.3×0.3	0.4×0.4	0.5×0.5	0.6×0.6
上子壳上表面	29.7090 [29.692 7]	33.298 7 [33.267 8]	37.120 5 [37.108 5]	45.000 4 [49.9817]	48.367 5 [48.317 3]
上子壳下表面	29.567 1 [29.552 7]	33.139 6 [33.097 6]	36.942 9 [36.907 5]	44.776 4 [44.627 6]	48.116 2 [47.966 2]
下子壳上表面	28.230 1 [28.217 6]	28.165 9 [28.117 6]	26.621 7 [26.599 7]	25.944 8 [25.927 3]	24.222 5 [24.201 7]
下子壳下表面	28.035 3 [27.895 3]	27.892 6 [27.837 1]	26.354 4 [26.347 1]	25.672 9 [25.617 6]	24.094 2 [23.992 8]

即上子壳对下子壳的影响随着脱层长度的增加而逐渐减小。

脱层壳能量释放率计算：如图 5(a) 所示环向脱层，在脱层长度占全部长度的 30%； $\theta = 0, \pi/2$ 边固支； $x=0, l$ 边自由的情况下，不同脱层半径 r_d 的能量释放率见图 6。如图 5(b) 所示，在脱层长度为 40%； $\theta = 0, \pi/2$ 边固支； $x = 0, l$ 边自由的情况下不同脱层半径 r_d 的能量释放率见图 7。

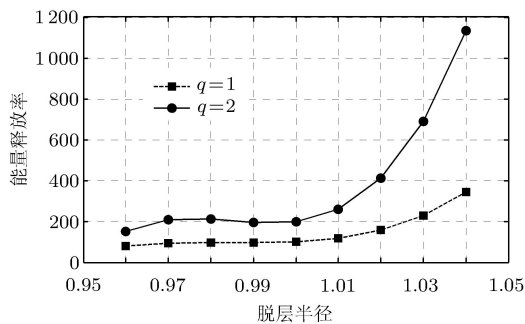


图 6 环向脱层时能量释放率

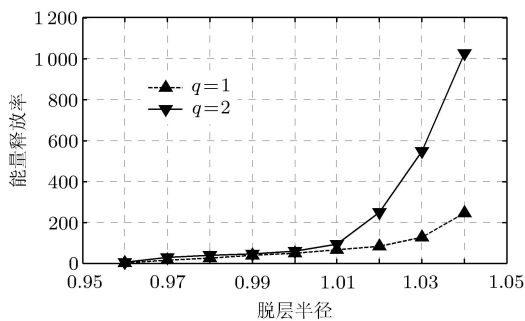


图 7 轴向脱层时能量释放率

通过图 6 和图 7 可以看出，对于同一脱层长度，外载荷增加时，不同脱层半径下的能量释放率增加速度不一样，越靠近载荷加载，更容易发生脱层。同时环向脱层受外载荷影响大于轴向脱层外载荷影响，对于壳类件，在选择受力载荷时需要考虑结构可能发生脱层的方向。

6 结 论

本文是基于弹性材料修正后的 H-R 变分原理，建立了柱坐标系下 Hamilton 正则方程 8 节点等参元列式，运用层间力学关系，完成了两类层合开口壳脱层损伤模型的半解析法研究。通过对两个模型的研究，得到如下结论：

(1) 利用二次插值函数较高的计算精度，结合等参元可以处理各种复杂形状的优点，在丰富了 Hamilton 正则方程的半解析法的同时，可以封装为有限元商业软件中的固定模块，以便后期做更深的研究；

(2) 研究发现，“先分后合”模型在模拟已知单层脱层情况下的力学情况较为方便，对于多层脱层情况，该方法显得复杂，计算过程中由于层间的接触问题而使得该法的局限性较大；

(3) 本文中的“弱粘接”模型可以模拟多层层间失效的情况，模型简单，通用性较好。但是该模型只能近似模拟层合壳的完全脱层， R_{ij} 值的选取对最终结果有较大影响。

本文的方法可以进一步推广到压电材料中去。利用 9 节点作为插值函数，仍可采用本文方法进行类推。

参 考 文 献

- 1 刘大响. 高性能航空发动机的发展对材料技术的要求. 燃气涡轮试验与研究, 1998, 11(3): 1-5 (Liu Daxiang. The requirement of development of high performance engine on material technology. *Gas Turbine Experiment and Research*, 1998, 11(3): 1-5 (in Chinese))
- 2 张津, 洪杰, 陈光. 现代航空发动机技术与发展. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006
- 3 Zou Z, Reid SR, Li S. A continuum damage model for delaminations in laminated composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(2): 333-356

- Tianxi, Liao Wendong, Chen Qianghong, et al. Modal analysis of elastic-viscoelastic composite structure based on ANSYS secondary development. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(4): 41-45 (in Chinese)
- 4 李相辉. 轴向运动黏弹性夹层梁的横向振动分析. [硕士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2011 (Li Xianghui. Transverse vibration analysis on axially moving viscoelastic sandwich beam. [Master Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2011 (in Chinese))
 - 5 王慧彩, 赵德有. 黏弹性阻尼夹层板动力特性分析及其试验研究. 船舶力学, 2005, 9(4): 109-118 (Wang Huicai, Zhao Deyou. Dynamic analysis and experiment of viscoelastic damped sandwich plate. *Journal of Ship Mechanics*, 2005, 9(4): 109-118 (in Chinese))
 - 6 张敬莹. 黏弹性夹层板振动特性的有限元分析. [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2007 (Zhang Jingying. Transverse vibration analysis on axially moving viscoelastic sandwich beam. [Master Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007 (in Chinese))
 - 7 周银锋, 王忠明. 轴向运动黏弹性板的横向振动特性. 应用数学与力学, 2007, 28(2): 191-199 (Zhou Yinfeng, Wang Zhongming. Transverse vibration characteristics of axially moving viscoelastic plate. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28(2): 191-199 (in Chinese))
 - 8 高正, 杨晓东. 轴向运动黏弹性板横向振动特性分析的有限差分法. 沈阳航空工业学院学报, 2009, 26(3): 14-18 (Gao Zheng, Yao Xiaodong. Finite difference method of transverse vibration characteristics of an axially moving viscoelastic plates. *Journal of Shenyang Institute of Aeronautical Engineering*, 2009, 26(3): 14-18 (in Chinese))
 - 9 黄勇, 李胜宏, 刘先斌. 宽带噪声作用下黏弹性板的矩 Lyapunov 指数. 力学学报, 2011, 43(3): 551-560 (Huang Yong, Li Shenghong, Liu Xianbin. On the moment Lyapunov exponent of a viscoelastic plate subjected to the excitation of wide band noises. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(3): 551-560 (in Chinese))
 - 10 李中华, 李映辉. 轴向运动黏弹性夹层板的多模态耦合横向振动. 复合材料学报, 2012, 29(3): 219-225 (Li Zhonghua, Li Yinghui. Multi-mode coupled transverse vibration of axially moving viscoelastic sandwich plate. *Acta Materialia Sinica*, 2012, 29(3): 219-225 (in Chinese))
 - 11 Yu Shann-Chewn, Huang Shyh-Chin. Vibration of a three-layered viscoelastic sandwich circular plate. *Mechanical Science*, 2001, 43(10): 2215-2236
 - 12 Li Longfei, Wang Xingzhe, Zhou Youhe. Dynamic characteristics of traveling waves for a rotating laminated circular plate with viscoelastic core layer. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(12): 2836-2847
 - 13 曹志远. 板壳振动理论. 北京: 中国铁道出版社, 1989

(责任编辑: 刘希国)

(上接第 53 页)

- 4 Shi Guang-Yu. On the interface elements for delamination simulation of laminated plates subject to low-velocity impact. In: Yao ZH, Yuan MW, Computational Mechanics, Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2007: 229
- 5 王素玲, 张一鸣, 姜民政等. 裂纹在非均匀岩层内扩展机理研究. 力学与实践, 2012, 34(6): 38-45 (Wang Suling, Zhang Yiming, Jiang Minzheng, et al. The mechanism of crack extension in non-uniform rock. *Mechanics in Engineering*, 2012, 34(6): 38-45 (in Chinese))
- 6 卿光辉, 张焕铜. 层合开口壳脱层损伤分析的半解析法. 机械强度, 2011, 33(1): 93-98 (Qing Guanghui, Zhang Huantong. Semi-analytical solution for delamination analysis of laminated cylindrical open shells. *Journal of Mechanical Strength*, 2011, 33(1): 93-98 (in Chinese))
- 7 但敏, 卿光辉. 脱层板固有频率的有限元方法分析. 动力学与控制学报, 2011, 9(1): 7-11 (Dan Min, Qing Guanghui. Natural frequencies analysis of delamination planes with finite element method. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(1): 7-11 (in Chinese))
- 8 Chen WQ, Cai JB, Ye GR. Exact solution of cross-ply laminates with bonding interfacial imperfections. *AIAA Journal*, 2003, 41(11): 2244-2250
- 9 Chen WQ, Lee KY. Exact solution of angle-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections. *Composite Structures*, 2004, 65(3-4): 329-337
- 10 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 11 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2003
- 12 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论. 北京: 科学出版社, 1996
- 13 唐立民, 褚致中, 邹贵平等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 347-360 (Tang Limin, Chu Zhizhong, Zhou Guipin, et al. The semi-analytical solution of mixed state Hamilton element and the computation of laminated plates. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1992, 9(4): 347-360 (in Chinese))
- 14 Ding Kewei, Tang Limin. Exact solution for axisymmetric thick laminated shells. *Composite Structures*, 1999, 46(2): 125-129
- 15 Ding HJ, Chen WQ, Xu RQ. New state space formulations for transversely isotropic piezoelectricity with application. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(3): 319-326

(责任编辑: 刘希国)