

对数学分析教学的反思

郇中丹

北京师范大学数学科学学院 100875

1、整体感觉

由于不知的原因,长期以来人们形成了中国的学生学习刻苦和基础好的印象.然而所看到的实际情况则大相径庭.再加上高校中利益分配机制的原因,教师的精力大多主要放在炮制论文上,在本科教学上基本上得过且过,而教学管理基本是形式管理.在这样的背景下,本科教育质量的不断下滑自然是不可避免的.本科生教学质量的无保障,造成研究生质量的更大滑坡.几个周期下来,恶性循环,形成积重难返的状况.

作为一个有良知的高校教师,对于这样的一种自我陶醉(学生学习刻苦基础好)下的无视教育根本的状况自然会奋起一搏.然而个人虽然百般奋力,但都是杯水车薪,最终是落得无可奈何,尽心竭力而已.

面对这样的教学和教育状况,从力所能及的本科教学出发,根据自身对数学,学科和学生培养的思考,学习和研究.以数学分析课程为出发点,从教授方法,内容和思想上着手本科生的培养.不遗余力,做了种种尝试.似乎也有些效果,但整体感觉仍然是隔靴挠痒,不触及关键.在投入产出上更是不可谓不是事倍功半.虽然做的事情自认为是有意义,并且也受到学生的欢迎,但与预期的差距仍然很大.这也许是教育的周期长,效果显现出来得慢吧!

这里仅仅对于笔者十年来在与分析课程相关的本科教学过程中的做法和思考做一个初步的反思.

2. 对分析类课程的理解

本科数学教育是数学专业人才和数学教育人才培养的基础和摇篮,本科数学教育的不当所造成的缺憾是难以弥补的,对于个人如此,对于一个国家也是如此.重点大学不应当是炫耀的招牌,而应当是对国家和人民的责任.

重点大学的数学本科教育应当造就出合格的数学基础人才.这些人才应当有坚实的数学理论和运算基础,有正确的数学观念,有良好的数学交流能力和应用能力.

数学分析和高等代数(包括多项式理论和线性代数)无论在数学知识上,还是在思想上都是本科数学教育的基本载体.这一点远远不是仅从本科课程的逻辑系统上说的.更是从现代数学的每一步发展成果都会或快或慢的改进数学分析和高等代数的课程内容和论证手段这一点上所说的.具体地说,数学分析和高等代数是数学中传递最优秀数学思想和方法的基本渠道,它们不仅集中了已有的最优秀数学思想和方法,而且还要及时反映数学和科学的发展和进步.可以说这两门课程是最优秀数学思想和方法活生生的集中反映.

具体到数学分析课程,它为分析类数学提供了直观背景、思想、方法、范例和基本训练.说数学分析为分析类课程或分析方法课程提供了直观背景指的是:数学分析以实直线,实平面,三维实空间直至 n 维实空间(或 n 维欧氏空间)上的微积分为内容,这些内容有着很好的直观背景.无论是在数学发展史上,还是人们的实际数学研究和应用上,这些内容都是出发点,是在抽象数学思维中获取直观理解或解释的基本模型或“几何”形象.数学分析课程展

示的数学结论(定理)所使用的方法也大多已经不再是这些结果创始人的原有思想方法,而是在至今数学研究和应用中精炼出的(“简捷”)思想方法. 由于 n 维欧氏空间自身所具有的良好数学性质, 数学分析中的结果一般具有完美性, 它们不仅能很好地展示其数学的和实际的含义, 而且往往也是可得到的最优结果, 因而常常能够作为理解和思考复杂数学问题的借鉴或范例. 数学研究者大多有这样的感觉, 其做作的研究工作在某种意义上就是在深入地使用微积分和线性代数的思想和工具. 因此, 根据我们的经验和了解, 数学分析所提供的训练对于学生的未来发展是至关重要的. 在笔者遇到的基础数学专业和应用数学专业的研究生中, 其在专业方面所遭遇的失败, 大多与多元微积分和线性代数方面的本科缺憾有关, 而且这些缺憾对这些研究生的妨碍往往是难以克服的.

正如线性代数, 多元微积分和实变函数这些在上世纪五六十年代的所谓高深数学已经成为不少非数学专业的必修课一样, 以往的一些数学本科的分析类选修课程已经成为数学必修课. 这当中包括实变函数, 偏微分方程和泛函分析.

目前实变函数已经在成为在现代意义下实分析数学方法课程, 它是数学和其他理论性科学学科的必备工具. 以所谓应用数学为例, 目前应用数学研究生中出现的不少障碍都与实分析有关. 这是由于实分析方法是微积分方法的自然完善化, 而测度和抽象积分, Fourier 分析在其他科学和工程领域中已经为常识性知识.

随着统计方法和计算机技术的普及, 数学建模已经成为大学生的基础训练之一, 而偏微分方程无疑是至今为止在现代科学意义下最优秀的数学建模成就. 因此偏微分方程课程不仅能为学生提供在当今科学技术发展背景下所必需的数学知识和数学方法, 而且也是学生获取高水平和高品位的数学创造或建模的机会. 本科的偏微分方程课程内容主要是偏微分方程的经典结果, 这些结果不仅自身有着无比的重要性, 而且是在现代数学精神下展示的, 犹如数学分析中一系列结果的处理一样: 这是经典结果在现代意义下的学习, 其中处处展现出与当今成就和思想的关联.

而泛函分析课程在某种意义上可以看成是对数学分析的“回归”, 也就是在超越有限维空间意义下对微积分的再造. 它力求像微积分为有限维数学提供了呈现平台那样, 为无限维数学(诸如各类微分和积分方程, 函数论和随机数学等)贡献类似的平台. 与其他本科数学课程相比, 本科泛函分析课程也是在现代数学观念的指导下对一百多年来所建立起来的经典泛函分析的结果和思想方法的传授.

本科分析类课程中无疑包含了传统分析课程的基本内容, 然而这些课程不仅在内容上大大超越了这些基本内容, 而且在观念, 方法和训练上是现代的, 也就是要求对思想和方法的把握.

3. 分析类课程的教学经历

本文中有关分析类课程教学的感受是基于个人下面的教学经历:

1. 四轮数学分析课程

(1) 2001-9 至 2003-1: 2001 级数学分析, 严格按照王昆扬《简明数学分析》(高等教育出版社, 2001 年 7 月第 1 版) 讲授; 同时开设 Maple 实验课, 并检验了讨论班的可行性.

(2) 2003-9 至 2005-1: 2003 级数学分析. 以王昆扬《简明数学分析》(高等教育出版社, 2001 年 7 月第 1 版) 为脉络, 对教学内容做了必要的补充和修改; 同时开设了 Maple 实验课, 并系统地组织了本科讨论班.

(3) 2006-9 至 2008-1: 2006 级数学分析. 以俄罗斯阿黑莫夫等《数学分析讲义》(王昆扬

译, 高等教育出版社 2006 年 6 月) 为脉络, 辅之以王昆扬《简明数学分析》(高等教育出版社, 2001 年 7 月第 1 版) 和自编讲稿; 同时开设 Maple 实验课, 并系统地规范化地组织本科讨论班.

(4) 2008-9 至 2010-1: 2008 级数学分析. 以郇中丹, 刘永平, 王昆扬《简明数学分析》(高等教育出版社, 2009 年 7 月第 2 版) 为教材讲授; 同时开设 Maple 实验课, 并系统地规范化地组织本科讨论班, 以 Emil Artin 的 The Gamma Function 和 John W. Milnor 的 Topology from the differentiable viewpoint 为讨论班的主干材料.

2. 两轮实变函数和偏微分方程教学

(1) 2005-2 至 2006-1: 2003 级实变函数和偏微分方程教学. 实变函数使用 R. L. Wheeden 和 Z. Zygmund 的 Measure and integral (Marcel Dekker, Inc. 1977) 为教材. 并组织本科讨论班和学生自己安排的习题研讨活动.

偏微分方程以 Robert C. McOwen 的 Partial Differential Equations: Method and Applications (Pearson Education, 北京: 清华大学出版社, 2004 年 7 月第一版) 为教材, 以郇中丹和黄海洋的《偏微分方程》(高等教育出版社, 2004 年 7 月第一版) 为参考教材.

(2) 2010-1 至 2011-1: 2008 级实变函数和偏微分方程教学. 实变函数仍使用 R. L. Wheeden 和 Z. Zygmund 的 Measure and integral (Marcel Dekker, Inc. 1977) 为教材. 以郇中丹和黄海洋的《偏微分方程》(高等教育出版社, 2004 年 7 月第一版) 为教材. 这两门课中教师没有再特别地组织教学以外的其他活动.

4. 数学分析课程的设计和教学效果

教学的组织以数学分析课程的形式最完整, 包括大课, 实验课, 讨论班和传统的辅导. 在实变函数课程和偏微分方程课程中, 一般不再以教师要求的形式组织专门的其他类似讨论或研讨的活动, 而是以学生自身的能动性而定. 从笔者的教学理念上说, 数学分析中的各项活动是为学生提供初步的训练和引导, 以便本科生中的活跃者把握数学学习和交流的常见手段, 在其发展中能够顺利地自主地开展各项数学学习和研讨活动. 而不必要在教师控制下被动的参与各种活动.

1. 数学分析课程的设计

(1) **大课讲授(6 学时):** 目标是讲清楚实数理论、多元微分学、积分学(包括勒贝格积分和黎曼积分)和 \mathbb{R}^n 中曲面上的积分; 强调数学训练, 特别是对理论体系的理解;

(2) **实验课(2 学时):** 目标是掌握成熟的数学化软件(Maple)的基本操作, 获得使用计算机技术手段的机会; 在观念上, 扩展对数学的理解, 感受数学理论的核心作用; 同时切实提高学生阅读英文专业文献的能力. 第一学期的教学方式以教师的讲解为主, 学生在教师指导下的探索使用 Maple 解决高中数学和数学分析中的问题; 后两个学期学生在教师指导下以探索 Maple 在本科数学学习中的进一步使用, 作业方式是学生以实验小组的形式递交双周或月实验报告.

(3) **讨论班(2 学时):** 从形式上是让学生学会在众人面前陈述数学论证和结果, 获得口头数学表达的经验; 从内容上, 力求使得学生初步感受数学分析在当代数学理论中的作用, 学习和体验数学分析和线性代数的那些看似“简单而没有用的结果和方法”是如何被用于获得

在数学理论和实际应用中重要结果和工具的, 并在这当中获得有意义的攻坚体验.

2. 学生的反馈

学生的反馈是根据对 2008 级学生的情况的初步调查作出的. 反馈内容按照对整个课程, 对实验课和对讨论班的意见分为三类. 每一类中又分为收获和困惑两部分.

(1) 大课的收获和困惑

学生的收获主要在三个方面:

- (i) 在数学课的学习目标上: 由过去的背题应付考试, 转向“学习数学就要把握数学的体系, 把概念和定理说清楚”;
- (ii) 在数学能力上: 是要“把数学问题严格地用数学语言写清楚”;
- (iii) 在数学的钻研上: 要“绞尽脑汁把问题搞清楚, 写明白”.

从学生收获方面的意见看, 至少部分同学的数学学习上转向了正确方向: 在学习上开始把理解所学的数学体系作为学习目标的一部分; 在学习目的或要获取的能力上, 开始追求对数学的理解和表达; 而在钻研上, 开始集中精力在搞清楚问题和表达清楚解决问题的过程这两个方面.

学生的困惑包括四个部分:

- (i) 课程的难度是学生抱怨的主要内容: “难, 作业量大, 可模仿的东西少”;
- (ii) 在学生的态度上: “困难而产生抵触情绪”;
- (iii) 难的原因是“不知如何做题”;
- (iv) 这样就感到“课程负担重”.

从学生的困惑方面的意见看, 这些是在从背题和模仿题的学习方式向把握数学内容的体系和在练习中掌握数学体系的学习方式的转变过程中的困难引起的. 无论什么样的教学方式, 数学分析课程得到抱怨大体上也是这些内容. 这样的抱怨是正常的. 如何让更多的学生最终实现上述转变是个值得深入研究的问题. 当然这里仅仅是数学分析课程学习阶段的情况.

(2) 实验课的收获和困惑

学生的收获分为四个方面:

- (i) 在 Maple 内容的把握上: “初步掌握 Maple, 学会了简单 Maple 编程”;
- (ii) 在 Maple 与数学学习的联系上: 能够“利用 Maple 讨论数学问题”;
- (iii) 在语言上: “克服了一些对英文软件的畏惧感”;
- (iv) 在学习方式上: 开始了“合作”.

从学生的收获看, 这些收获正是实验课所要达到的目的.

学生的困惑也分为四个方面

- (i) 记忆上的困难: “记不住指令”;
- (ii) 在 Maple 使用上: “实验结果与预想不一致时, 应对有困难”;
- (iii) 在语言上: “英文上花费时间较多”;
- (iv) 数学上: 存在一些“数学层面中的问题”.

学生的困惑是正常的, 困惑(ii-iv)恰恰反映了实验课的目的部分实现了, 学生感觉到了数学和计算机技术相互关系方面的问题. 实验课的一个目的就是提高学生的专业阅读能力.

(3) 讨论班的收获和困惑

讨论班的收获分为三个方面:

- (i) 在表达方式上: “敢在众人面前讲述自己的想法了”;
- (ii) 在专业阅读上: “学会了读专业英文书”;
- (iii) 在学习能力上: “学习能力得到培养”。

由此看到讨论班达到了部分的教学目标, 但与讨论班的设想的目的还有很大差距. 学生的收获还是在浅层面上.

学生的困惑集中在两个方面:

- (i) 不能与讲授者一起想: “速度快”;
- (ii) 不会参与: “不知如何讨论, 没有讨论习惯”。

这两点困惑恰恰显现了学生中普遍存在的问题: 不会自己思考, 一切都在模仿, 而且是为了在某种“竞争”的场合打败别人而模仿, 因此是“暗使力气”, 不愿意也不会与别人讨论与合作. 这些从另一个方面恰恰说明了讨论班这种教学方式对本科生的意义. 当然, 这不仅仅是一个单纯的学习方式问题, 还牵涉到深层次的问题.

5. 对学生状况的反思

学生的培养不是教师个人单方面的工作, 而是一个包括学校环境和学生素质在内的复杂问题. 从过去十年的教学经验看, 教师的努力无疑对于学生的培养有着巨大和无可替代的作用, 教师的付出也是有收获的. 但从教师的角度看这种收获的代价是很高的. 这也不奇怪, 学生的培养本来就不是单个教师所能胜任的. 笔者无法全面讨论学生培养的种种因素. 这里仅从学生的状况, 教师教学过程和学校环境的三个角度讨论进行反思.

学生的状况或学生的特点是什么呢? 这里概括为下面三点:

- (i) **在学习愿望上:** 有要学的愿望, 但不愿意下功夫, 希望从前人和外人 (认为比自己高, 自己与其没有利害冲突的人) 那里找到万全之策;
- (ii) **在学习态度上:** 希望所接受的知识符合自己的已有的思维模式, 不愿意或意识不到 (即便是被教师反复说明并要求) 要修正或更新这些模式;
- (iii) **在学习动力上:** 有很强的上进心, 但大多是与人比, 而不是知识上的.

这些可以说是高等教育中碰到的普遍现象. 形成这些现象的原因是根深蒂固的. 学生们的这种心理状态也在不断地被各种因素强化. 尽管这些现象是与高等教育的目的相矛盾的, 然而却是生命力旺盛地存在着. 这就在很大程度上使得数学高等教育的目标难以实现. 也注定教学过程的艰巨和艰难.

6. 对教学过程的反思

这里仅在技术层面上对说经历的教学过程做一下反思:

在教学内容的组织上应当说是严整的, 这可以从第四段中的第一小段“数学分析课程的设计”看出. 然而实施过程中基本困难在于教学辅导系统的薄弱. 这包括担任教学辅导各种的研究生不能胜任实验课和讨论班的工作, 甚至大课的一般辅导(因为这些本科学习阶段学

的不是所辅导的教材)也不能胜任,这样就使得主讲教师要担负起所有的教学和辅导工作.这就使得课程的实施只有个别教师在牺牲其他工作的前提下才能完成.当然,还有一种选择就让,教学过程中大部分关键教学辅导活动名存实亡.

在教学内容上,尽管设计的内容在逻辑上是必需和可行的.但考虑到目前学生的实际情况,其适合程度的还有待深入研究.这是由于,设计这些内容的教师是以高层次人才为目标的,对于课程的论证多是从数学角度讨论的.而从其他方面的考虑不足,其中包括北京师范大学数学专业的学生的水平和能力.然而,其他方面的考虑往往超出了笔者力所能及的范围.坦率地说,数学专业课程的研究应当从数学专业的整体上规划和支持,否则只能是教师的个人的无谓努力.

7. 对教学组织环境的反思

什么样的教学组织环境是理想的是一个可望而不可及的问题.这里仅就笔者的个人经历的中美大学本科教学做一些粗浅的讨论.

我们的本科教学的存在如下三方面的问题:

- (i) 在观念上:认为本科教学低人一等;
- (ii) 在教学内容设计上:本科教学计划笼统,缺乏具体的安排;
- (iii) 教学内容上:教师处理教学内容的随意性.

问题(i)造成了教师对与本科教学的回避和低投入.而教学内容设计上的粗糙使得教师对教学内容难以把握;教师的随意性就是自然的结果.这必然造成本科生的低质量.

相比较之下,美国的本科教学有比我们本科教学优势的地方有:

- (i) 在观念上:高度重视本科教育.这不仅表现在口头上,而且表现在每位教师的工作安排上:本科教学量是基本工作量;
- (ii) 在教学内容设计上:教学计划和教学安排系统而周密.其本科教学进度精确到每节课.而且切实可行.
- (iii) 教学内容上:教师对教学内容的处置权仅限于个别选讲部分.这保证课程的客观性,也就是保证了课程可比性和可靠性.

我们目前也在努力建立详尽的教务管理系统,然而着眼点在形式.因而也就不奇怪,这样的系统不仅没有帮助克服上面提到的三个问题,也难以帮助教师提高教学质量,有时甚至适得其反.

8. 结论和展望

本科教育是高层次人才培养的基础.数学本科教学的缺陷所造成的后患是无法克服的,基于这一点,我们开始了已经历时十年的本科分析课程建设.回顾这十年的经历,已经澄清了一些问题,并做了些力所能及的工作和取得了难忘的经验.然而面临的问题仍是巨大的.