

文章编号: 1000-4750(2014)10-0021-06

# 基于切平面布点的一种改进响应面方法

赵维涛<sup>1,2</sup>, 邱志平<sup>2</sup>

(1. 沈阳航空航天大学航空航天工程学院, 沈阳 110136; 2. 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

**摘 要:** 基于合理选择试验点的位置, 该文提出一种改进响应面方法。该方法首先在经过设计点的切平面上布置试验点, 然后沿切平面法向量方向移动试验点, 并利用设计点和先前试验点的信息布置加强试验点。所布置的试验点既对设计点附近区域给予足够重视, 同时又考虑极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势, 进而提高响应面函数在设计点附近区域的拟合精度。在响应面函数的拟合过程中, 该文方法能够保证响应面函数在设计点处是无误差的, 进一步提高失效概率的评估精度。算例表明, 对于显式和隐式极限状态函数, 该方法均具有较好的效率和精度。

**关键词:** 结构可靠性; 响应面; 切平面; 失效概率; 试验点

中图分类号: O213.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0335

## AN ADAPTIVE RESPONSE SURFACE METHOD BASED ON THE SELECTION OF EXPERIMENTAL POINTS USING TANGENT PLANE

ZHAO Wei-tao<sup>1,2</sup>, QIU Zhi-ping<sup>2</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. Institute of Solid Mechanics, Beihang University, Beijing 100083, China)

**Abstract:** An improved response surface method is proposed based on a reasonable selection of experimental points. The experimental points are selected in a tangent plane through the design point, and these experimental points are moved along the normal vector of the tangent plane. The reinforced experimental points are selected by using the information of the design point and the experimental point selected previously. The experimental points of the proposed method focus on the design point and consider the trend of the limit state function (LSF) around the region of a design point, so that the fitting precision of a response surface function (RSF) to the LSF around the region of the design point is increased. In the process of the fitting of RSF, in order to improve the evaluation accuracy of failure probability, the proposed method can guarantee that there is no error between the RSF and LSF at the design point. Examples given have demonstrated the efficiency and the accuracy of the proposed method for both numerical and implicit LSFs.

**Key words:** structural reliability; response surface; tangent plane; failure probability; experimental point

在结构可靠性分析过程中, 常用的方法有一次二阶矩方法, 二次二阶矩方法<sup>[1]</sup>, Monte-Carlo 方法<sup>[2]</sup>等。一次二阶矩方法形式简单, 应用较多, 但对于非线性程度较高的极限状态函数, 其计算精度较差。二次二阶矩方法虽然提高了计算精度, 但计

算复杂, 不便应用。Monte-Carlo 方法虽然是一种精确的评估方法, 但对于大型复杂结构计算量较大, 有时甚至是不可实现的。为了解决上述问题, 人们提出了响应面方法。

Bucher 和 Bourgund<sup>[3]</sup>用一个不含交叉项的二次

收稿日期: 2013-04-16; 修改日期: 2013-12-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(10872017); 航空基金项目(2013ZA54004); 辽宁省教育厅科研项目(L2014072)

通讯作者: 赵维涛(1977—), 男, 辽宁人, 副教授, 博士, 主要从事结构可靠性研究(E-mail: zhwt201@163.com).

作者简介: 邱志平(1962—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构可靠性研究(E-mail: zpqiu@buaa.edu.cn).

多项式作为响应面函数,但该方法只进行了两次迭代,在有些情况下计算精度不足。Rajashekhar 和 Ellingwood<sup>[4]</sup>通过多次插值技术将 Bucher 的方法进行下去,直到满足一定的收敛准则。Nguyen 等<sup>[5]</sup>基于双加权回归技术提出了一种改进的响应面方法,在首次计算时采用线性多项式构建响应面函数,在后续迭代中采用不含交叉项的二次多项式构建响应面函数。Kang 等<sup>[6]</sup>利用移动最小二乘法去拟合响应面函数,并将最可能失效点(设计点)增加到先前的试验点集中去更新响应面函数。Allaix 和 Carbone<sup>[7]</sup>讨论了试验点位置的选取方式,首先根据各变量的敏度信息对试验点进行旋转,然后在旋转后的坐标系下构建响应面函数。国内学者对响应面方法也做了大量研究,韩枫等<sup>[8]</sup>以多变量函数的单变量分析为基础,提出了一种合理确定高次响应面形式的算法,可以有效地减少响应面中待定系数的数量,降低了计算的困难。范文亮等<sup>[9]</sup>提出了考虑交叉项的自适应响应面方法,该方法通过严格的数学推导给出了极限状态曲面中交叉项是否存在的判断准则,提高了多项式响应面函数的计算效率。吕震宙等<sup>[10]</sup>提出了一种高精度响应面方法,该方法能够在设计点附近更好地拟合真实的极限状态函数,失效概率评估精度较高。程晔等<sup>[11]</sup>在响应面重构过程中,采取不断缩减样本窗口的方法来提高响应面在设计点附近的拟合精度,进而提高可靠度分析的精度。李洪双和吕震宙<sup>[12]</sup>给出了结构可靠性分析的支持向量机的响应面方法,并改进了训练样本的选择方法,为结构可靠性分析提供了新途径。

由于设计点附近区域对结构失效概率贡献较大,因此大多数响应面对设计点给予了足够的重视,能够给出较为精确的设计点和可靠性指标。然而对于非线性程度较高的极限状态函数,仅仅在设计点处具有较好的近似是不够的,还应考虑极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势,以提高失效概率的评估精度。针对这一问题,本文在传统响应面方法的基础上,提出了一种改进方法。该方法首先在经过设计点的切平面上布置试验点,然后沿切平面法向量方向移动试验点,并利用设计点和切平面上的试验点信息布置加强试验点。所布置的试验点既对设计点给予足够重视,同时又考虑了极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势,从而提高了失效概率的评估精度。

## 1 改进的响应面方法

### 1.1 试验点的布置

#### 1) 布置初始试验点

以均值点为中心,沿各个坐标轴的负方向布置试验点,共得到  $n+1$  个试验点<sup>[6]</sup>。

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^\top \quad (1)$$

$$\mathbf{X}_j = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i - 3\sigma_i, \dots, \mu_n)^\top,$$

$$j = 2, 3, \dots, n+1; i = j-1 \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{X}_\mu$  为随机变量均值矢量;  $\mu_i$  和  $\sigma_i$  分别为随机变量  $x_i$  的均值和标准差;  $n$  为随机变量个数。

#### 2) 求解设计点

用步骤 1) 中的  $n+1$  个试验点拟合线性响应面函数,并应用一次二阶矩方法求得设计点,该设计点记为  $\mathbf{X}_{DL}$ 。沿向量  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{X}_{DL} - \mathbf{X}_\mu$  的方向进行序列插值,将  $\mathbf{X}_{DL}$  拉到到极限状态曲面附近,序列插值公式如下:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{X}_{i-1} - \mathbf{X}_i}{g(\mathbf{X}_i) - g(\mathbf{X}_{i-1})} g(\mathbf{X}_i) \quad (3)$$

式中,  $g(\mathbf{X}_i)$  为极限状态函数在  $\mathbf{X}_i$  处的函数值。当  $i=1$  时,  $\mathbf{X}_0$  为  $\mathbf{X}_\mu$ ,  $\mathbf{X}_1$  为  $\mathbf{X}_{DL}$ 。序列插值的收敛条件为:

$$\left| \frac{g(\mathbf{X}_i)}{g(\mathbf{X}_\mu)} \right| \leq \varepsilon \quad (4)$$

式中,  $\varepsilon$  为常数,本文中取  $\varepsilon = 0.001$ 。将满足收敛条件的试验点记为  $\mathbf{X}_D$ 。

#### 3) 作切平面

以  $\boldsymbol{\omega}$  的单位向量  $\boldsymbol{\eta}$  为法向量,作经过  $\mathbf{X}_D$  在极限状态曲面上的切平面,切平面方程为:

$$\boldsymbol{\eta}^\top \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_D) = 0 \quad (5)$$

将该平面与第  $i$  个坐标轴的交点记为  $\mathbf{X}_i^c$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 。此处只需记录交点坐标信息,不计算极限状态函数值。

#### 4) 在切平面上布置试验点

构造向量  $\mathbf{V}_i = \mathbf{X}_i^c - \mathbf{X}_D$ , 其单位向量为  $\boldsymbol{\xi}_i$ , 并沿  $\boldsymbol{\xi}_i$  方向以  $\mathbf{X}_D$  为基点布置试验点  $\mathbf{X}_i^{(1)}$ 。由于设计点附近的区域对失效概率贡献较大,本文以系数  $0.5\sigma$  进行布置试验点,即:

$$\mathbf{X}_i^{(1)} = \mathbf{X}_D + 0.5\sigma \cdot \boldsymbol{\xi}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

式中:  $\sigma$  为随机变量标准差矢量; 符号  $\cdot$  表示两个矢量对应元素相乘。

## 5) 布置加强试验点

比较  $g(\mathbf{X}_i^{(1)})$  与  $g(\mathbf{X}_\mu)$  的符号。若两者同号, 沿  $\boldsymbol{\eta}$  方向以  $\mathbf{X}_i^{(1)}$  为基点布置试验点  $\mathbf{X}_i^{(2)}$ , 即:

$$\mathbf{X}_i^{(2)} = \mathbf{X}_i^{(1)} + k_i \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\eta}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7)$$

若两者异号, 沿  $\boldsymbol{\eta}$  的负方向以  $\mathbf{X}_i^{(1)}$  为基点布置试验点  $\mathbf{X}_i^{(2)}$ , 即:

$$\mathbf{X}_i^{(2)} = \mathbf{X}_i^{(1)} - k_i \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\eta}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

式中, 系数  $k_i$  的表达式如下:

$$k_i = \left| \frac{g(\mathbf{X}_i^{(1)})}{g(\mathbf{X}_\mu) - g(\mathbf{X}_i^{(1)})} \right|, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

利用  $\mathbf{X}_i^{(1)}$  和  $\mathbf{X}_i^{(2)}$  的信息, 采用线性插值方法求得近似位于极限状态曲线上的试验点  $\mathbf{X}_i^L$ , 即:

$$\mathbf{X}_i^L = \mathbf{X}_i^{(1)} + \frac{\mathbf{X}_i^{(2)} - \mathbf{X}_i^{(1)}}{g(\mathbf{X}_i^{(1)}) - g(\mathbf{X}_i^{(2)})} g(\mathbf{X}_i^{(1)}), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

此处只需记录  $\mathbf{X}_i^L$  坐标信息。构造向量  $\mathbf{S}_i = \mathbf{X}_i^L - \mathbf{X}_D$ , 其单位向量为  $\boldsymbol{\gamma}_i$ , 并沿  $\boldsymbol{\gamma}_i$  方向以  $\mathbf{X}_D$  为基点布置试验点  $\mathbf{X}_i^{(3)}$ 。为了考虑极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势, 本文以系数  $1.5\boldsymbol{\sigma}$  进行布置试验点, 即:

$$\mathbf{X}_i^{(3)} = \mathbf{X}_D + 1.5\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\gamma}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

从以上试验点布置方案可以看出:  $\mathbf{X}_i^{(1)}$  和  $\mathbf{X}_i^{(2)}$  位于设计点附近区域,  $\mathbf{X}_i^{(3)}$  考虑了极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势。在二维标准正态空间内,  $\mathbf{X}_D$ 、 $\mathbf{X}_i^{(1)}$ 、 $\mathbf{X}_i^{(2)}$  和  $\mathbf{X}_i^{(3)}$  见图 1。从图 1 可以看出, 所布置的试验点在对设计点给予足够重视的同时, 还考虑了极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势。因此, 本文的试验点布置方案能够保证响应面函数在失效概率贡献较大区域内具有较好的近似能力, 进而提高了失效概率的评估精度。

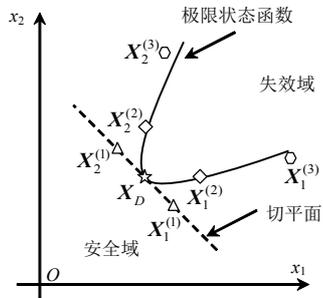


图 1 在二维标准正态空间内的试验点

Fig.1 Experimental points in the two-dimensional standard normal space

## 1.2 响应面函数的拟合

在响应面函数的选择上, 本文采用工程上常用的不含交叉项的二次多项式的形式, 即:

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 \quad (12)$$

式中,  $a_0$ 、 $a_i$  和  $b_i$  为待定系数。

由于在均值点附近的试验点可能会过度偏离真实极限状态曲面, 从而影响响应面函数的拟合精度。因此, 本文采用  $\mathbf{X}_D$ 、步骤 4) 和步骤 5) 中的试验点, 即试验点  $\mathbf{X}_D$ 、 $\mathbf{X}_i^{(1)}$ 、 $\mathbf{X}_i^{(2)}$  和  $\mathbf{X}_i^{(3)}$  进行拟合响应面函数。经过第 1.1 节的分析可知, 此时共有  $3n+1$  个试验点。由于试验点的个数多于式(12)中的待定系数的个数, 在采用最小二乘法拟合响应面函数时会在各点产生一定的误差。而在可靠性分析过程中, 精确地找到设计点是必要的。因此本文在响应面函数拟合时, 要求响应面函数在设计点取值恰好等于试验值, 即:

$$\bar{g}(\mathbf{X}_D) = g(\mathbf{X}_D) \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 得:

$$a_0 = g(\mathbf{X}_D) - \sum_{i=1}^n a_i x_{Di} - \sum_{i=1}^n b_i x_{Di}^2 \quad (14)$$

将式(14)反代入式(12), 得:

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}_D) + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_{Di}) + \sum_{i=1}^n b_i (x_i^2 - x_{Di}^2) \quad (15)$$

式中, 待定系数  $a_i$  和  $b_i$  可以利用其他试验点, 即利用  $\mathbf{X}_i^{(1)}$ 、 $\mathbf{X}_i^{(2)}$  和  $\mathbf{X}_i^{(3)}$  采用最小二乘法求得。

通过式(15)可知, 响应面函数在设计点  $\mathbf{X}_D$  处是无误差的。但由第 1.1 节可知  $\mathbf{X}_D$  是由  $\mathbf{X}_{DL}$  通过序列插值得到的, 并非真实的设计点, 因此本文采取如下的迭代方法进行响应面函数的更新。

利用式(15)求得的响应面函数, 采用一次二阶矩方法计算可靠性指标  $\beta$  和新的设计点。用新的设计点替换老的设计点, 重新拟合式(15), 即响应面函数的更新, 然后再次计算可靠性指标  $\beta$  和新的设计点  $\mathbf{X}_D$ 。重复以上过程, 直到同时满足以下的两个收敛条件。

1) 设计点应精确地位于极限状态曲面上, 即满足:

$$\left| \frac{\bar{g}(\mathbf{X}_D)}{g(\mathbf{X}_\mu)} \right| < \varepsilon \quad (16)$$

2) 两次迭代得到的可靠性指标相对变化很小, 即满足:

$$\left| \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\beta_i} \right| < \varepsilon \quad (17)$$

式中,  $\varepsilon$  为常数, 本文中取  $\varepsilon = 0.001$ 。

通过以上分析可知, 本文给出的响应面函数不但能够保证在设计点处无误差, 而且能够兼顾极限状态在设计点附近区域的变化趋势, 进而提高了失效概率的评估精度。

### 1.3 可靠性求解

一次二阶矩方法和经典响应面方法虽然可以很好地给出可靠性指标  $\beta$ , 但对于非线性程度较高的极限状态函数, 由可靠性指标  $\beta$  求得的失效概率 (即  $P_f = \Phi^{-1}(-\beta)$ , 其中  $\Phi$  为标准正态累积分布函数) 的误差较大。然而对于实际工程问题, 极限状态函数的非线性程度一般是未知的。因此, 本文基于所建立的响应面函数, 采用 Monte-Carlo 模拟的重要抽样法计算结构的失效概率。

## 2 算例

### 2.1 算例 1

非线性极限状态函数<sup>[7,13]</sup>如下:

$$g(\mathbf{X}) = 0.1(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2) / \sqrt{2} + 2.5 \quad (18)$$

式中,  $x_1$  和  $x_2$  均为标准正态随机变量。

应用本文方法和经典响应面方法的拟合结果见图 2。从图 2 可以看出, 经典响应面方法虽然能够很好地给出设计点, 但在设计点附近区域与真实极限状态函数之间存在较大的近似误差。而本文方法在对设计点重视的同时, 还兼顾了极限状态函数的变化趋势。不但在设计点处给予了很好的近似, 而且能够在设计点附近区域较好地近似极限状态函数。数值计算结果见表 1。从表 1 可以看出, 文献[7]和本文方法均较好, 但本文方法所需试验点个数较少, 效率较高。另外, 从表 1 还可以看出, 一次二阶矩方法算得的失效概率误差最大, 这主要是由于极限状态函数非线性程度较强所引起的。关于极限状态函数非线性强弱的判别, 本文的观点如下: 极限状态函数非线性的强弱不能单纯依赖“在设计点附近极限状态函数是否平坦”来衡量, 还应“考虑极限状态函数在设计点附近的变化趋势”, 因此二者均对失效概率具有一定的影响。一种较直观的解释应为“极限状态函数非线性强弱与否应该利用一次二阶矩方法的计算误差来衡量”, 因为只

有在极限状态函数为线性时, 一次二阶矩方法给出的解才是精确解。针对本例, 虽然极限状态函数在设计点附近略为平坦, 但一次二阶矩方法的计算误差已经达到了 46.12%, 这足以说明该极限状态函数非线性程度是较强的。

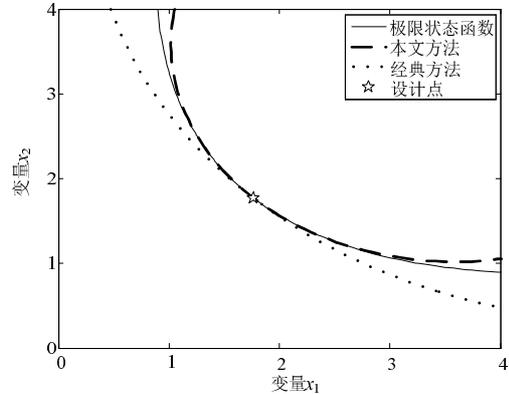


图 2 响应面的近似(算例 1)

Fig.2 Response surface approximations (example 1)

表 1 算例 1 的结果

Table 1 Results of example 1

方法	失效概率	相对误差/(%)	试验点个数
一次二阶矩	$6.21 \times 10^{-3}$	46.12	13
经典响应面	$4.94 \times 10^{-3}$	16.24	18
文献[7] ( $f=1$ )	$4.30 \times 10^{-3}$	1.176	25
文献[7] ( $f=2$ )	$4.30 \times 10^{-3}$	1.176	25
文献[7] ( $f=3$ )	$4.30 \times 10^{-3}$	1.176	25
本文	$4.21 \times 10^{-3}$	-0.161	13
Monte-Carlo	$4.25 \times 10^{-3}$	—	$10^5$

### 2.2 算例 2

非线性极限状态函数<sup>[4,7]</sup>如下:

$$g(\mathbf{X}) = 18.46154 - 7.476923 \times 10^{10} \frac{x_1}{x_2^3} \quad (19)$$

式中,  $x_1$  和  $x_2$  均为正态随机变量, 均值分别为 0.001 和 250, 标准差分别为 0.0002 和 37.5。

应用本文方法和经典响应面方法的拟合结果见图 3。从图 3 可以看出, 经典响应面方法在很

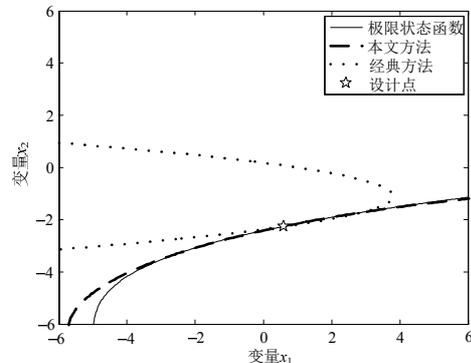


图 3 响应面的近似(算例 2)

Fig.3 Response surface approximations (example 2)

大程度上背离了真实极限状态函数，而本文方法能够较好地近似真实极限状态函数。数值计算结果见表 2。从表 2 可以看出，经典响应面方法的误差最大，这主要是由于经典响应面函数过度地偏离了真实极限状态函数，即经典响应面方法没有考虑极限状态函数在设计点附近的变化趋势。而本文方法恰恰能够解决这一问题，算得的失效概率非常接近 Monte-Carlo 方法算得的失效概率，且所需试验点个数明显少于其他方法，效率较高。

表 2 算例 2 的结果

Table 2 Results of example 2

方法	失效概率	相对误差/(%)	试验点个数
一次二阶矩	$9.88 \times 10^{-3}$	0.919	31
经典响应面	$4.06 \times 10^{-1}$	4047	48
文献[7] ( $f=1$ )	$9.75 \times 10^{-3}$	-0.409	50
文献[7] ( $f=2$ )	$9.70 \times 10^{-3}$	-0.919	80
文献[7] ( $f=3$ )	$9.90 \times 10^{-3}$	1.124	105
文献[4] (A-3)	$9.54 \times 10^{-3}$	-2.554	25
本文	$9.81 \times 10^{-3}$	0.204	17
Monte-Carlo	$9.79 \times 10^{-3}$	-	$10^5$

2.3 算例 3

10 杆桁架结构如图 4 所示<sup>[14]</sup>，水平和竖直杆的长度均为  $L$ ，每根杆的截面积为  $A_i (i=1,2,\dots,10)$ ，弹性模量为  $E$ 。外载  $P_1, P_2$  和  $P_3$  作用图 4 上所示位置。设  $L, A_i, E$  和  $P_i$  为 15 个服从正态分布的基本随机变量，分布参数见表 3。以 2 节点竖向位移不超过 0.004m 建立极限状态函数，即：

$$g(\mathbf{X}) = 0.004 - v_2(\mathbf{X}) \quad (20)$$

式中， $v_2(\mathbf{X})$  为节点 2 的竖向位移函数。

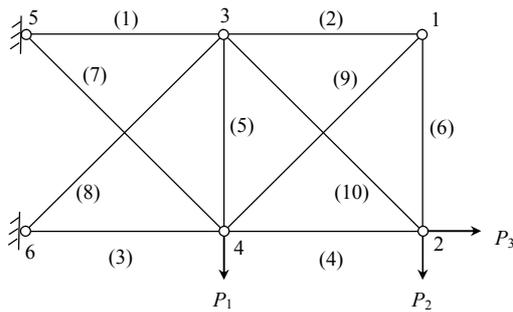


图 4 十杆桁架结构

Fig.4 10-bar truss structure

表 3 算例 3 的分布参数

Table 3 Distribution parameter of example 3

	$L$	$A_i$	$E$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
均值	1/m	$0.001/\text{m}^2$	100/GPa	80/kN	10/kN	10/kN
变异系数	0.05	0.15	0.05	0.05	0.05	0.05

数值计算结果见表 4。从表 4 可以看出，本文方法具有较高的计算效率和较好的计算精度。

表 4 算例 3 的结果

Table 4 Results of example 3

方法	失效概率	相对误差/(%)	试验点个数
一次二阶矩	$2.625 \times 10^{-3}$	-43.46	81
经典响应面	$5.194 \times 10^{-3}$	16.38	96
文献[14] (W LRSM)	$2.625 \times 10^{-3}$	-43.46	155
文献[14] (SVM)	$4.756 \times 10^{-3}$	2.434	155
本文方法	$4.711 \times 10^{-3}$	1.465	65
Monte-Carlo	$4.643 \times 10^{-3}$	-	$10^5$

3 结论

(1) 本文基于在极限状态函数切平面上的试验点布置方案，提出了一种改进的响应面方法。该方法所布置的试验点既对设计点给予了足够的重视，又兼顾了极限状态函数在设计点附近区域的变化趋势，提高了响应面函数在设计点附近区域近似真实极限状态函数的能力。在响应面函数构造过程中，要求响应面函数在设计点处无误差，进一步提高了失效概率的评估精度。

(2) 数值算例结果表明，文中方法所用试验点个数较少，失效概率的评估精度较高。从图 2、图 3 可以看出，本文方法相对经典响应面方法在设计点附近区域具有更好的近似能力，失效概率的评估精度较高。从算例 3 可以看出，本文方法在处理具有多变量的非线性隐式极限状态函数时，仍具有较好的效率和较高的精度。

参考文献：

[1] 周凌, 贾宏光, 安伟光. 相关正态空间中改进的有限步长迭代法[J]. 工程力学, 2012, 29(11): 137-142. Zhou Ling, Jia Hongguang, An Weiguang. Modified limit step length iteration algorithm in correlation normal space [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(11): 137-142. (in Chinese)

[2] 赵维涛, 张旭. 基于 Monte-Carlo 方法的结构系统可靠度计算及敏度分析[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 200-204. Zhao Weitao, Zhang Xu. Reliability calculation and reliability sensitivity analysis of structural system based on Monte-Carlo method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 200-204. (in Chinese)

[3] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems [J]. Structural Safety, 1990, 7(1): 57-66.

[4] Rajashekhar M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis [J]. Structural Safety, 1993, 12(3): 205-220.

[5] Nguyen X S, Sellier A, Duprat F, et al. Adaptive

- response surface method based on a double weighted regression technique [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24(2): 135—143.
- [6] Kang S C, Koh H M, Choo J F. An efficient response surface method using moving least squares approximation for structural reliability analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25(4): 365—371.
- [7] Allaix D L, Carbone V I. An improvement of the response surface method [J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 165—172.
- [8] 韩枫, 李正良, 范文亮. 基于单变量分析的自适应响应面法[J]. 工程力学, 2012, 29(12): 88—94.  
Han Feng, Li Zhengliang, Fan Wenliang. A new adaptive response surface method based on single variable analysis [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(12): 88—94. (in Chinese)
- [9] 范文亮, 张春涛, 李正良, 等. 考虑交叉项的自适应响应面法[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 68—72.  
Fan Wenliang, Zhang Chuntao, Li Zhengliang, et al. An adaptive response surface method with cross terms [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(4): 68—72. (in Chinese)
- [10] 吕震宙, 赵洁, 岳珠峰. 机械可靠性分析的高精度响应面法[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(1): 17—24.  
Lü Zhenzhou, Zhao Jie, Yue Zhufeng. Advanced response surface method for mechanical reliability analysis [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(1): 17—24. (in Chinese)
- [11] 程晔, 周翠英, 黄林冲, 等. 基于缩减样本窗口的响应面重构方法[J]. 计算力学学报, 2011, 28(5): 699—704.  
Cheng Ye, Zhou Cuiying, Huang Linchong, et al. Sequential response surface reconstructing method based on reducing sampling windows [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(5): 699—704. (in Chinese)
- [12] 李洪双, 吕震宙. 结构可靠性分析的支持向量机的响应面法[J]. 计算力学学报, 2009, 26(2): 199—203.  
Li Hongshuang, Lü Zhenzhou. A support vector machine response surface method for structural reliability analysis [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, 26(2): 199—203. (in Chinese)
- [13] Antonio B, Emanuela S. Structural reliability analysis using a standard deterministic finite element code [J]. Structural Safety, 1997, 19(4): 361—382.
- [14] 李洪双, 吕震宙, 赵洁. 基于加权线性响应面法的支持向量机可靠性分析方法[J]. 工程力学, 2007, 24(5): 67—71.  
Li Hongshuang, Lü Zhenzhou, Zhao Jie. A support vector machine method for reliability analysis based on weighted linear response surface [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(5): 67—71. (in Chinese)