

文章编号: 1000-4750(2014)10-0027-06

基于微孔贯通细观损伤模型的金属韧性断裂分析

姜 薇, 李亚智, 束一秀, 樊振兴

(西北工业大学航空学院, 西安 710000)

摘 要: 韧性材料断裂过程通常可看作是材料内部微孔洞的形核、扩展及相互贯通的积累。经典的 Gurson-Tvergaard (GT)模型能够很好地模拟具有变形均匀、各向同性的孔洞的萌生及扩展过程;但无法模拟由孔洞贯通而引起的局部变形过程,因此需要对其修正,引入相应的孔洞贯通准则。该文采用两种贯通准则对经典 GT 模型进行修正,即 Thomason 的塑性极限载荷准则和临界等效塑性应变准则。借助用户自定义程序 UMAT 将采用这两种贯通准则修正的 GT 本构关系嵌入至商用有限元软件 ABAQUS 中,从而可通过对金属材料应力状态和断裂机理的分析控制孔洞的贯通。以一组含有不同缺口根半径的圆棒拉伸试验件为例,分析了该类金属构件自孔洞萌生至最终断裂的整个损伤演化过程,并与试验数据进行了对比,验证了该模型的有效性。该文还讨论了金属断裂过程中应力三轴度对微裂纹萌生与扩展的影响。

关键词: 韧性断裂; 细观损伤模型; 孔洞贯通; 损伤准则; 应力三轴度

中图分类号: TB31 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0351

INVESTIGATION OF METALLIC DUCTILE FRACTURE BY VOID-BASED MESO-DAMAGE MODEL

JIANG Wei, LI Ya-zhi, SHU Yi-xiu, FAN Zhen-xing

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710000, China)

Abstract: The ductile fracture of metallic materials is usually the result of void nucleation, growth and coalescence. The classical Gurson-Tvergaard (GT) model has proven to be an effective means for simulating the nucleation and growth of voids with homogenous deformations. However, as for the localized deformation due to the void coalescence, the GT model is limited. The original GT damage model is extended to the problem of localized deformations by incorporating two different void coalescence criteria in the paper. One is based on the plastic-limit-load model proposed by Thomason; the other assumes the onset of void coalescence using a critical equivalent plastic strain as a power law of stress triaxiality (defined by the ratio of the hydrostatic stress to the equivalent stress). Hence, void coalescence can be controlled by physical mechanisms, rather than by a critical void volume fraction which cannot be taken as a constant. The extended constitutive models are implemented into an implicit finite element code via a user defined material subroutine (UMAT) in ABAQUS. The void-based meso-damage model was adopted to study the ductile fracture of a series of notched round tensile bars. It is shown that the predictions of the fracture behavior from void nucleation to final material failure have a good agreement with the experiment data, which validates the proposed model. Also, the effects of stress triaxiality on the nucleation and propagation of microcracks are discussed.

Key words: ductile failure; meso-damage model; void coalescence; failure criterion; stress triaxiality

收稿日期: 2013-04-18; 修改日期: 2013-06-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11272259, 11002104)

通讯作者: 姜 薇(1987—), 女, 陕西人, 博士生, 主要从事金属韧性断裂研究(E-mail: jiangwei0525@mail.nwpu.edu.cn).

作者简介: 李亚智(1962—), 男, 陕西人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构损伤容限、弹塑性、疲劳断裂研究(E-mail: yazhi.li@nwpu.edu.cn);

束一秀(1988—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事多部位损伤数值方法研究(E-mail: shuyixiu@mail.nwpu.edu.cn);

樊振兴(1987—), 男, 河南人, 硕士生, 主要从事复合材料连接件工程算法研究(E-mail: fanzxwy@163.com).

细观损伤力学将金属材料的宏观断裂行为与细观结构变量及材料的连续属性有机关联在了一起。于是,宏观韧性断裂过程就可分为两个阶段:孔洞的萌生和扩展所引起的各向同性变形过程以及孔洞贯通所引起的局部变形过程。Gurson 模型^[1]在材料的屈服函数中考虑了损伤(孔洞体积分数, f)和静水压力的影响,被广泛用于分析韧性断裂过程。基于 Gurson 模型, Tvergaard^[2]引入了两个修正参数来考虑孔洞间的相互作用以及材料的应变强化效应。Needleman 和 Tvergaard^[3]则借助一组线性关系实现了对孔洞贯通后材料迅速失去承载能力这一过程的描述。Chu 和 Needleman^[4]提出了一系列适用于 Gurson 模型的孔洞萌生准则。

应用 Needleman 和 Tvergaard 的线性孔洞贯通模型时,临界孔洞体积分数 f_c 常被视作材料内部孔洞开始贯通的标志,并认为 f_c 是仅与材料相关的常数。然而,许多研究表明 f_c 与初始孔洞体积分数、孔洞形状、孔洞间距、应力三轴度以及应变强化指数等因素密切相关。因此,有必要引入考虑材料细观结构和应力状态的孔洞聚合准则。Thomason^[5]认为可将塑性临界载荷模型作为孔洞连通准则,其中孔洞贯通与否由孔洞之间韧带上的局部屈服状态决定,这样就统一考虑了材料和应力状态的影响。Bao^[6]、Bai 和 Wierzbicki^[7]对 2024-T351 铝合金进行了大量的试验,分别得到了基于等效应变的宏观韧性断裂准则,即当宏观等效应变达到临界值(是应力三轴度的函数)时,材料将丧失承载能力。Gao 等^[8-9]通过试验分析了 5083 铝合金和 DH36 钢的韧性断裂过程,针对两种材料分别建立了考虑三轴应力状态影响的等效应变孔洞贯通准则并将其应用于数值分析中。

针对经典 Gurson-Tvergaard(GT)模型在分析局部变形过程中的局限性,本文采用两种不同的孔洞贯通准则对其修正,从而建立了完整的模拟孔洞的萌生、扩展和贯通过程的损伤模型。通过将该模型以用户程序的形式嵌入有限元软件,对具有不同缺口根半径的轴对称拉伸金属圆棒进行了断裂行为分析,并讨论了应力三轴度的影响。

1 基于微孔贯通的细观损伤模型

1.1 孔洞萌生和扩展模型

因孔洞萌生和扩展而引起的材料软化行为可以由 GT 本构关系准确描述。适用于各向同性硬化

材料的 GT 屈服函数具有以下的形式^[1]:

$$\Phi = \left(\frac{q}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \quad (1)$$

其中: p 是静水压力; q 是 Mises 等效应力; $\bar{\sigma}$ 为基体材料(不含孔洞的密实材料)的流动应力,是基体等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_m^p$ 的函数; f 是材料的当前孔洞体积分数; 常数 q_1 和 q_2 描述孔洞间的相互影响。

基体材料的应变强化作用可由 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}_m^p)$ 描述,其中 $\bar{\varepsilon}_m^p$ 由等效塑性功来确定:

$$(1-f)\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}_m^p = \sigma : d\varepsilon^p \quad (2)$$

其中: $d\varepsilon^p$ 是材料塑性应变率张量; $d\bar{\varepsilon}_m^p$ 是基体材料的等效塑性应变率。

载荷的作用下,孔洞体积分数的改变主要是由于已有孔洞的扩展以及新孔洞的萌生所导致的。因此,孔洞体积分数的变化具有以下形式:

$$df = (1-f)d\varepsilon^p : I + Ad\bar{\varepsilon}_m^p \quad (3)$$

式(3)中,第一项是因孔洞扩展而引起的孔洞体积分数改变量;新孔洞萌生的主要形式是基体粒子在界面处的断裂或脱粘,因此可采用式(3)第二项由应变控制的孔洞萌生模型来描述。其中,孔洞萌生强度因子 A 是基体等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_m^p$ 的函数,通常认为它服从正态分布^[4]:

$$A = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_m^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad (4)$$

其中: f_N 为孔洞体积分数中形核部分的极限值; ε_N 是孔洞萌生时的平均等效塑性应变; s_N 是该正态分布的标准差。

1.2 基于应力状态的损伤准则

1.2.1 塑性极限载荷准则

Thomason 通过研究发现:韧性断裂过程后期的局部塑性变形可看作材料内部孔洞间的韧带上的内部颈缩引起的,可由塑性极限载荷来描述孔洞是否开始贯通。Thomason 认为孔洞的贯通条件可以表示为^[5]:

$$\sigma_1 = \sigma_1^L \quad (5)$$

其中: σ_1^L 为塑性极限载荷,表示材料抵抗孔洞贯通的能力; σ_1 是当前屈服面上材料点的最大主应力。

采用含椭球孔洞的三维体胞, Thomason 得到了孔洞贯通的极限载荷:

$$\frac{\sigma_1^L}{\bar{\sigma}} = \left(\alpha \left(\frac{R_z}{X - R_x} \right)^{-2} + \beta \left(\frac{R_x}{X} \right)^{-1/2} \right) \left(1 - \frac{\pi R_x^2}{X^2} \right) \quad (6)$$

其中： x 、 y 和 z 轴分别为最小、中间和最大主应力方向； X 为体胞在 x 轴方向的当前长度； R_x 、 R_z 分别是椭圆孔洞的 x 轴和 z 轴半径。含椭圆孔洞的体胞所在的局部坐标系由 x 、 y 和 z 轴定义。Pardoen 和 Hutchinson^[10] 的研究结果表明 α 和 β 与应变强化指数 n 有关。通常可假定 β 取常数 1.24，而 α 是 n 的二次函数：

$$\alpha(n) = 0.1 + 0.217n + 4.83n^2, \quad 0 \leq n \leq 0.3 \quad (7)$$

假设孔洞在变形过程中始终保持球形，式(6)中的孔洞几何参数可直接由当前孔洞体积分数和主应变 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 确定：

$$R_x = R_y = R_z = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} f e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}} \quad (8)$$

$$X = Y = \sqrt{e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} / 2 \quad (9)$$

由式(6)、式(8)和式(9)可以看出，在塑性极限载荷的计算中，考虑了材料内部的孔洞几何形状、间距以及当前应变状态的影响，孔洞何时开始贯通不再简单地由一个常数决定。

1.2.2 等效塑性应变准则

假设孔洞周期性分布，则材料可以看作由大量的中心含孔洞的六面体单位体胞堆积而成。当塑形屈服发生在孔洞间的韧带上时，就可以认为该体胞失效了^[16]。临界等效塑性应变值常被用作材料韧性的宏观度量。因此，可以考虑借助于临界等效塑性应变来模拟由孔洞连通引起的材料失效行为，建立基于等效塑性应变的贯通准则。实际工程结构中，裂纹总是在具有最高应力三轴度的部位萌生，例如轴对称拉伸圆棒最小截面中心处。此外，应力三轴度也是描述应力状态对韧性断裂影响的主要参数。因此，可以考虑建立以应力三轴度参数为函数的等效塑性应变贯通准则。

Oh 等^[11]通过试验给出了适用于 API X65 钢的指数形式的等效塑性应变失效准则：

$$\bar{\varepsilon}_f = 3.29e^{-1.54T_{ave}} + 0.10 \quad (10)$$

其中， T_{ave} 为当前材料点上的平均应力三轴度水平：

$$T_{ave} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_f} \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{p}{q} d\varepsilon \quad (11)$$

$\bar{\varepsilon}_f$ 是临界等效塑性应变。在本文中，该准则也用于模拟金属材料的韧性断裂，从而考虑了应力状态对孔洞贯通的影响。

1.3 孔洞贯通模型

Tvergaard 和 Needleman 在 1984 年提出的 f^* 函数^[3]被用来考虑材料失效时孔洞迅速连通的过程。当材料内部的孔洞体积分数 f 达到贯通准则所确定的临界值时，贯通发生，在损伤模型中 f 由 f^* 所替代：

$$f^* = \begin{cases} f & , f < f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_f - f_c} (f - f_c) & , f \geq f_c \end{cases} \quad (12)$$

其中： f_c 是孔洞开始连通时的临界孔洞体积分数； $f_u^* = 1/q_1$ 是应力为零时的 f^* 的值； f_f 是材料最终失效时的孔洞体积分数。

1.4 损伤模型在 ABAQUS 中的实现

为本文在 ABAQUS 有限元软件的基础上，编写了用户自定义子程序 UMAT。其中涉及到两个关键的数值过程：其一，是采用何种方法对率形式的本构方程进行数值积分。本文采用了 Aravas^[12]所提出的欧拉向后积分方法。其二，在隐式有限元方法中，为了采用牛顿法求解全局平衡方程，需提供线性化模量来建立切线刚度矩阵(雅可比矩阵)，通常此过程涉及到矩阵求逆，较为困难。本文采用了 Zhang 等^[13]给出了基于图形返回算法的显式求解一致切向模量的方法计算切线模量。

2 有限元分析

为了验证损伤模型的有效性，本文分析了与 Oh 等^[11]研究所用试验件尺寸相同的缺口拉伸圆棒的韧性断裂过程。同时，为了考虑三轴应力状态对材料拉伸韧性断裂的影响，对三种不同缺口根半径的拉伸圆棒进行了建模。根据试验件的轴对称特性，有限元分析中采用了 8 节点轴对称缩减积分单元(CAX8R)。图 1 是缺口拉伸圆棒的几何构形，图 2 是本文使用的有限元模型。

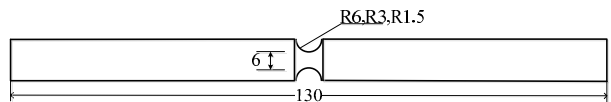


图 1 缺口拉伸试验件几何结构

Fig.1 Geometries of notched tensile specimens

2.1 宏观力学参数

圆棒材料为广泛用于天然气运输的高强度管用钢材 API X65。API X65 钢为高强度低合金钢，在拉伸载荷作用下的材料常数为：弹性模量 $E=210.7\text{GPa}$ ；泊松比 $\nu = 0.3$ ；初始屈服强度 $\sigma_0 =$

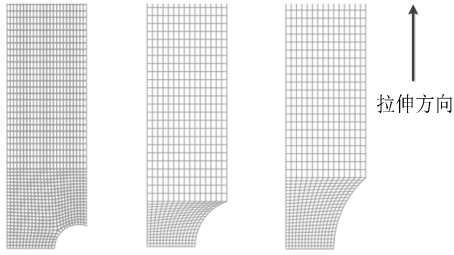


图2 缺口拉伸试验件的轴对称有限元模型

Fig.2 Axisymmetric finite element meshes for notched tensile bars

464.5MPa。为考虑材料的应变强化作用,需要材料的真实应力-应变曲线。本文使用 Ramberg-Osgood 形式拟合 Oh 等试验所得 API X65 钢的单轴拉伸真实应力-应变曲线。

2.2 确定模型损失参数

在使用本文修正的 GT 损伤模型进行断裂预测时,需确定其中 8 个损伤模型参数: 2 个 Gurson 屈服函数参数(q_1, q_2)和 6 个与孔洞体积分数相关的参数($f_0, f_c, f_F, \varepsilon_N, s_N$ 和 f_N)。

本文所研究材料为高强度管用钢 API X65, 质地纯净, 孔洞萌生非常不明显。孔洞参数选用 Chu 和 Needleman^[4] 所给出的建议值 $\varepsilon_N = 0.3$ 和 $s_N = 0.1$, 而 f_N 则取 0.0008。有一些学者认为, 对于大多数韧性金属在初次近似计算中, 初始孔洞体积分数 f_0 可以近似取 MnS 粒子的体积百分数。MnS 的体积百分数可以由 Franklin 公式计算得到^[14]:

$$f_v = 0.054 \left(S\% - \frac{0.001}{Mn\%} \right) \quad (13)$$

其中, $S\%$ 和 $Mn\%$ 分别是硫和锰的质量百分数。本文中, 首先由式(13)计算出 f_0 的初始近似取值, 然后对某一组缺口圆棒试验件(R6)的试验结果进行拟合, 反推得到合适的 f_0 。材料最终失效时的孔洞体积分数 f_F 依赖于初始孔洞体积分数, 相对不太敏感, 通常认为其取值范围在 0.15~0.2。可以由 Zhang 的经验公式^[15]近似得到:

$$f_F = 0.15 + 2f_0 \quad (14)$$

$\varepsilon_N, s_N, f_N, f_0$ 和 f_F 按照上述说明取值, 在本文采用的两组损伤模型参数中相同。而临界孔洞连通体积分数 f_c 则由 2 种孔洞贯通准则(塑性极限载荷准则和等效塑性应变准则)分别确定。在两组参数中, q 参数也是分别确定: 第一组采用 Tvergaard^[2] 所建议的经典值 $q_1 = 1.5$ 、 $q_2 = 1.0$; 第二组则基于 Faleskog 等^[14] 的研究结果, 根据 q 参数对应变强化指数(n)和初始屈服应力对弹性模量的比值(σ_0 / E)

的依赖性以及 Faleskog 所给出的研究结果插值得到。表 1 列出了本文所用的两组损伤模型参数。

表 1 损伤模型参数

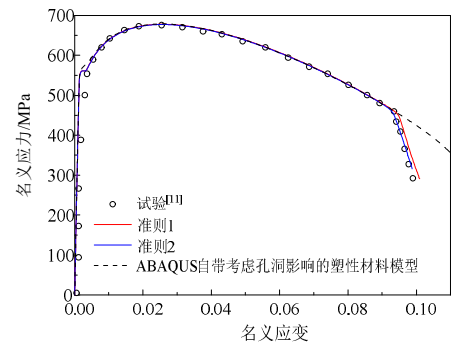
Table 1 Damage model parameters

	ε_N	s_N	f_N	f_0	f_c	f_F	q_1	q_2
1	0.3	0.1	0.0008	0.0005	准则 1	0.151	1.5	1.0
2	0.3	0.1	0.0008	0.0005	准则 2	0.151	1.70	0.85

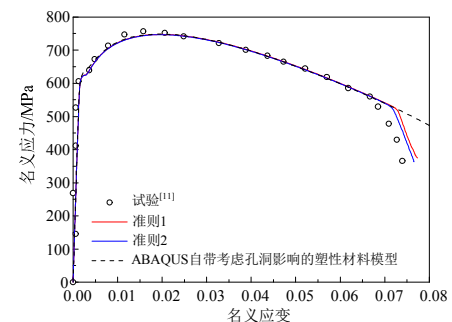
2.3 与试验结果比较

对缺口根部半径分别为 6mm、3mm 和 1.5mm 的圆棒试验件进行了有限元分析, 这些试验件在拉伸载荷的作用下, 具有不同的应力三轴度水平。图 3 将采用本文所修正的损伤模型断裂分析结果与采用 ABAQUS 自带的多孔金属材料模型(Porous metal material)的数值结果及 Oh 等的试验结果进行了对比。考虑到 Oh 等的试验中对轴向位移的监测范围是试验件中部 25mm 的部分, 图 3 中的名义应力和名义应变分别由距离对称截面 12.5mm 的截面上的总的节点力和平均节点位移计算得到。

由图 3 可以发现: 与试验件几何构形(即缺口半径)无关, 采用上述两种连通准则的损伤模型均能得到与试验数据吻合很好的数值模拟结果。而 ABAQUS 所自带的考虑孔洞影响的金属材料模型尽管可以很好地模拟孔洞贯通之前的材料应力-应变响应, 但由于缺少对孔洞贯通的定义, 无法有效预测孔洞开始贯通后, 材料迅速丧失承载能力的现象。



(a) R6



(b) R3

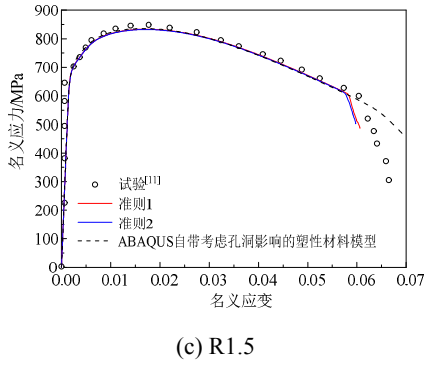


图3 缺口拉伸圆棒的模拟和试验结果

Fig.3 Comparison of FEM results with notched tensile tests

2.4 裂纹在形成与扩展

采用本文的损伤模型模拟金属材料的韧性断裂时，单元失效时可认为裂纹发生了萌生或扩展。因此，该方法不仅能够模拟裂纹萌生的位置，而且能够预测裂纹的扩展路径。应用等效塑性应变准则对 R6 缺口试验件中裂纹萌生和扩展进行了分析。图 4(a)给出了试验件中的裂纹萌生位置，即试验件对称截面的中心处；图 4(b)中，失效的单元近似标示出了裂纹的扩展路径，即在试验件的对称截面上，由中心向圆棒自由表面扩展。这些结果与试验中观察到的现象是一致的。图 4(c)描述了裂纹萌生时刻，试验件孔洞体积分数的分布情况(“SDV12”即为 UMAT 中的计算得到的内变量孔洞体积分数)，最大的孔洞体积分数出现在对称截面附近的中心位置。

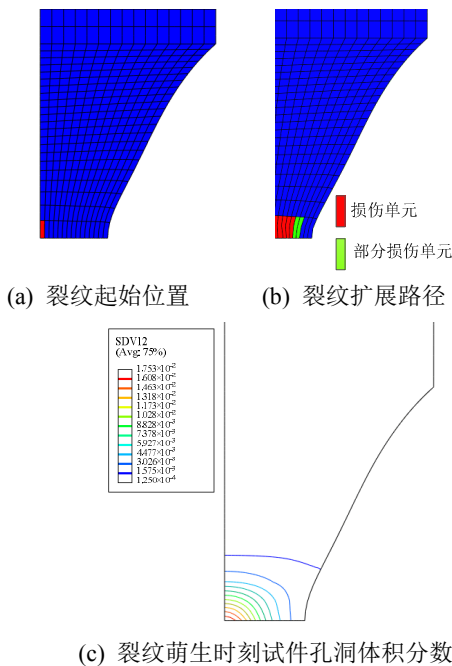


图4 R6 试验件模拟结果

Fig.4 The FEM results of R6 notched tensile bar

2.5 应力三轴度的影响

对任一试验件，在对称截面上最高的应力三轴度总是出现在中心，而最低的应力三轴度总是出现在靠近自由表面的位置。图 5 给出了裂纹萌生时刻试验件最小截面上的应力三轴度参数 T 的分布情况。根据 GT 本构关系，较高的应力三轴度和不断积累的塑性变形加速了裂纹在试验件中的形成和扩展。从而解释了裂纹首先在试验件对称截面中部形成的原因。

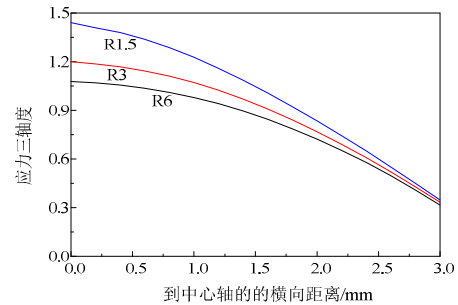


图5 裂纹萌生时刻试件对称截面上的应力三轴度分布
Fig.5 Variation in stress triaxialities along minimum section at crack initiation

图 6 给出了加载过程中，试验件对称截面中心应力三轴度参数 T 随等效塑性应变 $\bar{\epsilon}^p$ 变化的曲线。对于具有不同缺口根半径的试验件，不同几何构形导致了试验件中部应力三轴度水平的不同。由图 5 和图 6 可以看出，R6 试验件的应力三轴度水平最低，而 R1.5 试验件的应力三轴度水平最高。因而，应力三轴度水平随着缺口半径的增大而降低。图 6 还显示出，各试验件均在破坏瞬间应力三轴度水平达到了峰值，并在卸载后迅速回落。除此之外，不同应力三轴度水平导致孔洞在不同的塑性变形下开始贯通，此后孔洞体积分数迅速增长，在破坏时达到最大值并且不再改变(见图 7)；宏观上对称截面应力三轴度水平高的 R1.5 试件在较低的塑性变形下首先发生破坏。

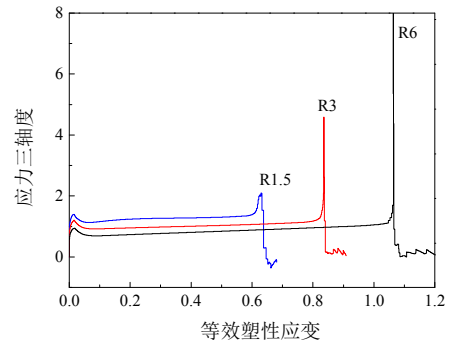


图6 加载历程中裂纹萌生处的不同应力三轴度水平
Fig.6 Different stress triaxialities at the center of specimens

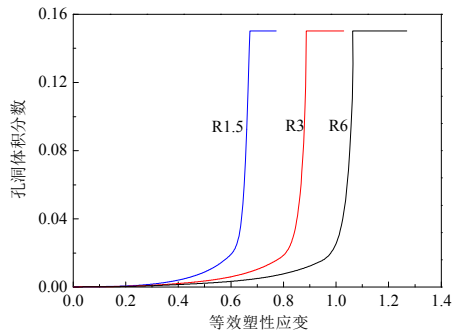


图7 裂纹萌生处孔洞体积分数随等效塑性应变的变化

Fig.7 Void volume fraction versus equivalent plastic strain

3 结论

采用两种考虑应力状态和断裂机理的贯通准则对经典 Gurson-Tvergaard (GT)模型进行修正,建立了可预测裂纹萌生、扩展和贯通的损伤模型。然后以含缺口圆棒金属件为例,模拟了金属材料的韧性断裂过程,验证了该方法的有效性,为模拟小尺寸金属结构的裂纹形成和扩展提供了可行的方法。从本文的数值模拟结果可以得到以下结论:

(1) 基于两种孔洞贯通准则扩展的 GT 本构关系可以很好地预测金属材料的韧性断裂过程。

(2) 裂纹首先在应力三轴度最高且孔洞体积分数最大的位置萌生并在试验件的最小截面上扩展。

(3) 不同应力三轴度水平会导致孔洞在不同的等效塑性应变水平下开始贯通并直至断裂。

参考文献:

- [1] Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I yield criteria and flow rules for porous ductile media [J]. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1977, 99(1): 2–15.
- [2] Tvergaard V. On localization in ductile materials containing spherical voids [J]. *International Journal of Fracture*, 1982, 18(4): 237–252.
- [3] Tvergaard V, Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar [J]. *Acta Metallurgica*, 1984, 32(1): 157–169.
- [4] Chu C C, Needleman A. Void nucleation effects in biaxial stretched sheets [J]. *Journal of Engineering*

- Materials and Technology*, 1980, 102(3): 249–256.
- [5] Thomason P F. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of micro-voids [J]. *Acta Metallurgica*, 1985, 33(6): 1087–1095.
- [6] Bao Y. Dependence of ductile crack formation in tensile tests on stress triaxiality, stress and strain ratios [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, 72(4): 505–522.
- [7] Bai Y L, Wierzbicki T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence [J]. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24(6): 1071–1096.
- [8] Gao X S, Zhang T T, Hayden M, Roe C. Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy [J]. *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(12): 2366–2382.
- [9] Gao X S, Zhang G H, Roe C. A study on the effect of the stress state on ductile fracture [J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2010, 19(1): 75–94.
- [10] Pardoen T, Hutchinson J W. An extended model for void growth and coalescence [J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(12): 2467–2512.
- [11] Oh C K, Kim Y J, Baek J H, Kim W S. Development of stress-modified fracture strain for ductile failure of API X65 steel [J]. *International Journal of Fracture*, 2007, 143(2): 119–133.
- [12] Aravas N. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(7): 1395–1416.
- [13] Zhang Z L. Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 121(1/2/3/4): 29–44.
- [14] Faleskog J, Shih C F. Micromechanics of coalescence I: Synergistic effects of elasticity, plastic yielding and multi-size-scale voids [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1997, 45(1): 21–25, 27–50.
- [15] Zhang Z L, Thaulow C, Odegard J. A complete Gurson model approach for ductile fracture [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, 67(2): 155–168.
- [16] Koplik J, Needleman A. Void growth and coalescence in porous plastic solids [J]. *International Journal of Solids Structures*, 1988, 24(8): 835–853.