

文章编号: 1000-4750(2014)10-0123-06

水力压裂过程的扩展有限元数值模拟方法

盛 茂, 李根生

(油气资源与探测国家重点实验室(中国石油大学(北京)), 北京 102249)

摘 要: 建立了基于扩展有限元法的水力压裂数值模拟方法, 使水力裂缝独立于网格存在, 无需预设裂缝扩展方位。在扩展有限元计算框架下, 将裂缝面处理为求解域内边界, 将缝内水压力转化为相关单元等效节点力; 运用考虑缝内水压力作用的相互积分法来数值求解缝尖应力强度因子; 采用最大能量释放率准则确定裂缝是否继续扩展及扩展方位; 最终编制了计算机程序。利用该方法数值模拟了单条水力裂缝在恒定水压力作用下作非平面扩展, 所得结果分别与室内试验和解析模型相对比。结果表明, 数值结果与室内试验和解析解吻合较好, 缝尖应力强度因子最大相对误差不高于 0.45%, 验证了该方法的可行性和准确性。

关键词: 水力压裂; 数值模拟; 扩展有限元; 油气井; 裂缝

中图分类号: TE357.11 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0370

EXTENDED FINITE ELEMENT MODELING OF HYDRAULIC FRACTURE PROPAGATION

SHENG Mao, LI Gen-sheng

(State Key Laboratory of Petroleum Resources and Prospecting, China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: This paper proposed a numerical scheme to simulate the hydraulic fracture propagation in a frame by an extended finite element method, in which a crack representation is explicit and independent of the mesh grid. The crack faces are treated as internal boundaries, which are opened and supported by hydraulic pressure. An integral scheme is presented to an equal the hydraulic pressure as nodal forces. The interactive integral method is used to calculate the stress intensity factor with the consideration of hydraulic pressure on crack faces. The maximum energy release criterion is selected to determine the propagation condition and crack direction. The corresponding code was prepared and used to simulate the non-planar propagation of a single hydraulic fracture with a constant hydraulic pressure. The numerical results are compared with the lab test and the analytical model. The results show that the numerical results of mode I have an excellent agreement with analytical results, in which the maximum relative error is below 0.45%.

Key words: hydraulic fracturing; numerical simulation; extended finite element method; oil and gas well; fracture

水力压裂是指通过向地层中高排量泵注液体, 使得地层岩石起裂、扩展形成人工裂缝的过程^[1]。该方法广泛应用于石油工程油气井增产, 具有重要工程背景。水力压裂过程涉及到岩石变形和缝内流动, 属于典型的流固耦合问题^[2-4], 并且, 裂缝的存在使得岩石位移场不连续, 数值处理难度较大。

以往研究^[3,5-8]中有限元法常被用于模拟水力压裂过程, 然而, 经典有限元的力学基础为连续介质力学, 本身不具备处理不连续体的能力。实际操作时需将裂缝与网格节点相重合, 裂缝面处理为内边界, 缝内水压力即施加到缝面节点上。为了提高求解精度, 在裂缝周围和尖端区域必须网格加密,

收稿日期: 2013-04-23; 修改日期: 2013-07-31

基金项目: 国家自然科学基金重大国际(地区)合作项目(51210006); 国家自然科学基金重点项目(51234006)

通讯作者: 李根生(1961-), 男, 安徽石台人, 教授, 博士, 博导, 主要从事钻完井、油气井增产等研究工作(E-mail: ligsg@cup.edu.cn).

作者简介: 盛 茂(1985-), 男, 安徽人, 博士生, 从事水力压裂数值模拟研究(E-mail: shengmao@cup.edu.cn).

并且裂缝每扩展一步就得网格重新划分。由此带来的繁重前处理工作和复杂几何拓扑设计限制了计算效率，很难满足水力压裂设计对时效的要求。扩展有限元法是一种适合于求解不连续问题的新型数值方法^[9]，其优点是裂缝独立于网格存在，裂缝扩展无需重新划网格，已被广泛用于求解断裂力学问题^[10]。然而，目前该方法多应用于干裂缝扩展数值模拟，而在解决水力裂缝扩展问题上鲜有报道^[11-13]，与干裂缝扩展问题相比其难点在于：1) 需要将缝面水压力转化为与裂缝相关单元的节点力；2) 采用相互积分法(Interaction integral)计算缝尖应力强度因子时需考虑水压力作用。

本文将扩展有限元法应用于水力压裂模拟问题上，解决了缝内水压力施加到岩石节点和考虑缝内水压力的缝尖应力强度因子求解等问题。首先推导了水力压裂问题的虚功方程；其次给出了求解不连续位移场的扩展有限元差分格式和矩阵方程；再次，针对缝内水压力沿裂缝积分、单元积分方案、裂缝扩展准则等问题，讨论了数值处理方法；最后参照室内试验和解析模型条件设计算例，算例结果与试验和解析结果十分吻合，验证了该方法的可行性和准确性。

1 水力压裂问题的虚功方程

如图 1 所示，考虑二维求解域 V 受水平主应力作用，中心一口井泵注压裂液产生单条裂缝 Σ 。为简化分析，假设求解域内地层均质各向同性，缝内压力均匀分布，地层处于平面应变状态，裂缝作准静态扩展。记求解域外边界的应力边界为 Γ_σ ，位移边界 Γ_u 。定义水力裂缝两侧表面 Σ^+ 、 Σ^- 分别作用流体压力 p^+ 、 p^- ，相应外法线方向为 n^+ 、 n^- 。

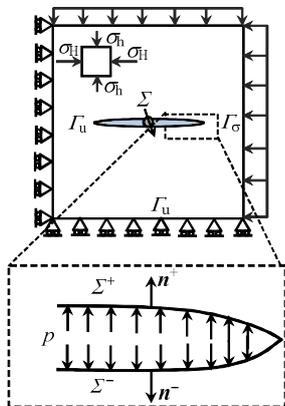


图 1 水力压裂物理模型示意图

Fig.1 Schematic of hydraulic fracturing problem

水力压裂过程岩石骨架受到缝内水压力、水平主应力和体积力等外力作用，裂缝准静态扩展意味着裂缝连续扩展且时刻受力平衡，张量形式的平衡方程为：

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \tag{1}$$

考虑线弹性本构关系，则：

$$\sigma = C : E(U) \tag{2}$$

式中： C 为弹性系数矩阵； b 为体积力向量； $E(U)$ 为应变矩阵。本文将缝内水压力处理为边界外力，则边界力条件可表示为：

$$\begin{cases} \sigma \cdot n_{\Gamma_\sigma} = \bar{t} & \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \\ \sigma \cdot n^+ = -\sigma \cdot n^- = p^+ = -p^- = p & \text{在 } \Sigma \text{ 上} \end{cases} \tag{3}$$

扩展有限元中裂缝不依赖于网格而独立存在，网格划分时不需要考虑裂缝形态和位置。因此，可采用简单的四边形结构化网格划分求解域。针对位移场选用试函数 U_u^h ，位移变量取自测试空间 V_u^h ，表达式如下：

$$\begin{aligned} U_u^h &= \{u^h \mid u^h \in \Lambda, u^h = g \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}\}, \\ V_u^h &= \{v^h \mid v^h \in \Lambda, v^h = 0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}\} \end{aligned} \tag{4}$$

假设试函数和测试函数在裂缝法线方向不连续，根据虚功原理，可得受力平衡方程的弱积分形式为：

$$0 = \int_{V \setminus \Sigma} \varepsilon(v^h) : \sigma(u^h) dV - \int_{V \setminus \Sigma} v^h \cdot b dV + \int_{\Sigma} [[v^h]] \cdot (-p) \cdot n d\Sigma + \int_{\Gamma_u} \bar{t} \cdot n d\Gamma \tag{5}$$

其中， $[[v^h]] = (v^+ - v^-)$ 表示测试函数 v 在裂缝面处间断。式中， $V \setminus \Sigma$ 表示不包含裂缝的空间，右端第一项表示岩石骨架变形所产生的应变能；第二项为体积力作功；第三项为缝内水压力在缝面做功，它是区别于干裂缝扩展的重要体现；第四项为外界力做功。式(5)即为水力压裂问题的虚功方程。

2 不连续位移场求解数值模型

裂缝的存在使得位移场不连续和近缝尖区域位移场奇异。扩展有限元法是在不改变计算网格结构的前提下，通过引入两个局部加强函数^[9]，即 Heaviside 函数 $H(x)$ 来表征间断位移场，缝尖近似位移函数 $\Phi_\alpha(x)$ 来表征奇异位移场。局部加强函数只针对与裂缝相关的单元和节点进行处理。如图 2 所示，扩展有限元的单元类型包括裂缝贯穿单元、缝尖单元、过渡单元和普通单元，其中前三种单元均与裂缝相关。对应的节点类型分别为贯穿加强节

点、缝尖加强节点和普通节点。

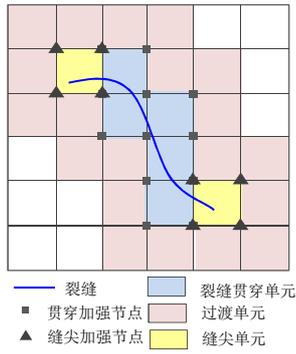


图 2 扩展有限元单元与节点类型示意图

Fig.2 Element and node representation in XFEM

引入局部加强函数的位移近似函数可写成^[9]:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^m N_j(\mathbf{x})H(\mathbf{x})\mathbf{a}_j + \sum_{k=1}^q N_k(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^4 \Phi_{\alpha}(\mathbf{x})\mathbf{b}_k^{\alpha} \quad (6)$$

式中: n 为求解域节点总个数; m 为贯穿加强节点个数; q 为缝尖加强节点个数; \mathbf{a}_j 、 \mathbf{b}_k^{α} 为附加自由度。可见, 贯穿加强节点自由度在常规每个自由度方向上增加 1 个自由度, 缝尖加强节点自由度在常规每个自由度方向上增加 4 个自由度。Heaviside 函数实际上是一个阶跃函数, 它与水平集函数相配合^[14], 来判断某点处于何侧裂缝面, 从而表达裂缝两侧间断的位移场, 表达式如下:

$$H(\mathbf{x}) = \text{sign}(\varphi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \varphi(\mathbf{x}) > 0 \\ -1 & \varphi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (7)$$

函数 $\Phi_{\alpha}(\mathbf{x})$ 是依据线弹性断裂力学中缝尖渐进位移场提取得到的缝尖加强函数。建立缝尖为原点的局部极坐标系, $\Phi_{\alpha}(\mathbf{x})$ 可表示为:

$$\Phi_{\alpha}(r, \theta) = \sqrt{r} \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (8)$$

裂缝贯穿单元的裂缝宽度等于裂缝面上点在裂缝面法线方向的相对位移, 表达式可写为:

$$w(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = 2\mathbf{n} \cdot \sum_j N_j \mathbf{a}_j \quad (9)$$

将式(6)代入受力平衡方程弱形式(5)中, 以节点位移为未知数, 可得岩石骨架变形的总体刚度方程:

$$\mathbf{KX} = \mathbf{f} \quad (10)$$

式中: \mathbf{K} 为总体刚度矩阵; \mathbf{X} 为未知自由度向量; \mathbf{f} 为力向量。扩展有限元中单元未知自由度向量 \mathbf{x}^e 、单元力向量 \mathbf{f}^e 和单元刚度矩阵 \mathbf{k}_{ij}^e 的组成均与单元类型有关, 一般形成可表示为:

$$\mathbf{x}^e = [\mathbf{u}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_k^1, \mathbf{b}_k^2, \mathbf{b}_k^3, \mathbf{b}_k^4]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{f}^e = [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i^a, \mathbf{f}_i^{b^1}, \mathbf{f}_i^{b^2}, \mathbf{f}_i^{b^3}, \mathbf{f}_i^{b^4}]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{ua} & \mathbf{k}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{k}_{ij}^{au} & \mathbf{k}_{ij}^{aa} & \mathbf{k}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{k}_{ij}^{bu} & \mathbf{k}_{ij}^{ba} & \mathbf{k}_{ij}^{bb} \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中:

$$\mathbf{k}_{ij}^{\alpha\beta} = \int_V (\mathbf{B}_i^{\alpha})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_j^{\beta}) dV, \quad \alpha, \beta = u, a, b \quad (14)$$

对于过渡单元, 单元刚度方程各项如式(11)~式(13); 对于裂缝贯穿单元, 方程各项退化为不含关于 b 的矩阵; 对于缝尖单元, 方程各项退化为不含关于 a 、 b 的矩阵。求解总体刚度方程可得连续位移场。

3 裂缝扩展数值处理方法

当已知节点位移和附加未知自由度后, 就可以采用数值方法求取 I 型应力强度因子和 II 型应力强度因子, 其后选取适当的裂缝扩展准则判断裂缝是否继续扩展以及扩展方位和步长。

3.1 水压力沿裂缝积分方法

由于裂缝不与网格节点重合, 所以无法像求解域外边界那样将均布载荷转化为边界线单元等效节点力, 而是需要将水压力转化为单元节点的(裂缝贯穿单元)等效节点力。这是水力压裂数值处理中遇到的新问题, 在处理干裂缝时不存在该问题。如图 3 所示, 具体积分方法: 1) 将裂缝与裂缝贯穿单元的交点视为离散点, 裂缝被离散为多个一维单元; 2) 在一维母单元上布置四个高斯积分点 g_i ; 3) 根据线段相似比将局部坐标系下一维单元积分点变换为全局坐标系下二维四节点单元中积分点 G_i ; 4) 通过坐标逆变换将全局坐标系下积分点变换为四节点母单元局部坐标系下积分点 g'_i ; 5) 根据积分点 g'_i 坐标计算四节点单元的形函数和雅克比行列式, 积分加权因子是一维高斯积分点所对应的值, 然后数值积分可得到等效节点力, 其受力方向由夹角 θ 确定。通过对各裂缝段高斯积分后就得到裂缝贯穿单元的等效节点力。

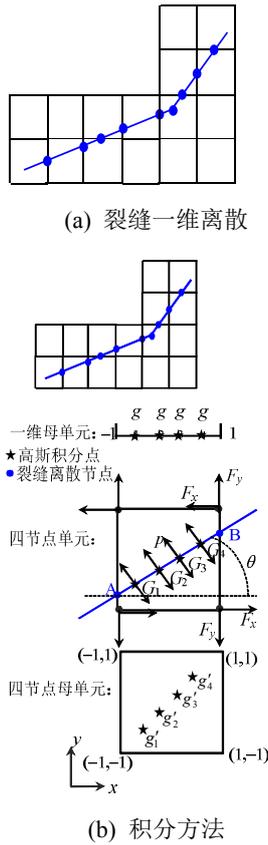


图3 水压力沿裂缝积分方法示意图

Fig.3 Numerical integral of hydraulic pressure along crack

3.2 地应力初始化与外边界条件施加

为模拟水力压裂前原始地应力，在施加外边界水平主应力和缝内水压力前，求解域各节点均受到原始地应力作用，我们默认原始状态各节点位移为零，因此原始时刻各节点实际受力与原始地应力大小相等，方向相反。数值处理为初始时刻力向量 f 对应的各节点力等于原始水平主应力的负数。

3.3 裂缝贯穿单元和缝尖单元积分方案

裂缝贯穿单元和缝尖单元内均被裂缝分割，并且位移场在裂缝两侧不连续。如果此类单元仍沿用四节点单元中高斯积分点布置形式，那么单元积分精度会严重不足，因此需要特殊处理此类单元积分^[15]。一般处理方法是将这两种单元分割为多个三角形单元，然后在每个三角形单元中布置高阶高斯积分点。单元积分值等于每个三角形单元积分值之和。与有限元法不同的是，扩展有限元法中单元分割的目的仅是为了提高积分精度，而不会引入新的自由度，并且不需要考虑因网格形状畸变导致的单元刚度矩阵奇异问题。本文采用的单元分割形式如图4所示，对于缝尖单元，以缝尖为起点，分别连接四节点，并且延长裂缝与四边形单元边相交，即

得到6个三角形单元；对于裂缝贯穿单元，裂缝与单元交点与单元两节点相连接，即得到4个三角形单元。

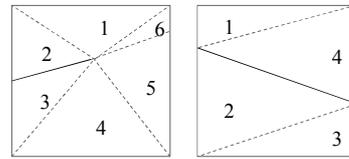


图4 裂缝贯穿单元和缝尖单元剖分示意图

Fig.4 Mesh dividing schemes for split and tip elements

3.4 裂缝扩展准则和应力强度因子计算方法

裂缝扩展准则是确定裂缝是否会扩展以及扩展方向的判据。目前公认的复合模式拉剪裂缝扩展准则有最大拉应力准则、最大能量释放率准则和最小应变能密度准则。尽管这三类准则基于不同假设条件，但是多数断裂问题采用三类准则得出的结果很接近^[16]。本文选用最大能量释放率准则，裂缝扩展形成新表面可释放能量，该准则认为裂缝会朝着能量释放最大的方向扩展，其中，能量释放率是缝尖应力强度因子的函数^[16]。

应力强度因子的计算精度决定着裂缝扩展路径是否合理。有限元法解决裂缝问题时，“相互积分法”常被用于求解应力强度因子^[17]，该方法同样适用于扩展有限元法。对于水力压裂问题，相互积分式中需要添加一项反映缝内水压力做功。文献[18]首先提出了二维裂缝带有缝面力条件下相互积分表达式，本文据此编制了求解程序。计算发现，只有环路积分的圆形半径足够大，才能得到相对准确的应力强度因子。其原因是缝尖周围应力场奇异，计算结果精度较差，只有远离缝尖端，才能获得正确的应力场。但是并不是圆形环路半径越大越好，半径太大使得环路积分包含了长段裂缝，从而不能准确捕捉缝尖应力场。本文计算条件下发现离开缝尖端2个~3个单元再取圆形积分环路计算的应力强度因子精度足够高。

3.5 裂缝更新方法

扩展有限元中裂缝扩展不需要重新划分及加密网格，只需更新裂缝尖端坐标和网格类型判断。针对网格类型变化的单元增加自由度，局部改变总体刚度矩阵。

4 模型验证

笔者编制了水力压裂模拟计算机程序，该程序可模拟单条裂缝在均匀水压力作用下扩展行为。为

了验证数值方法和计算程序的准确性, 分别根据室内试验条件和解析模型假设条件设计了两个算例, 加以对比。

4.1 与室内试验结果对比

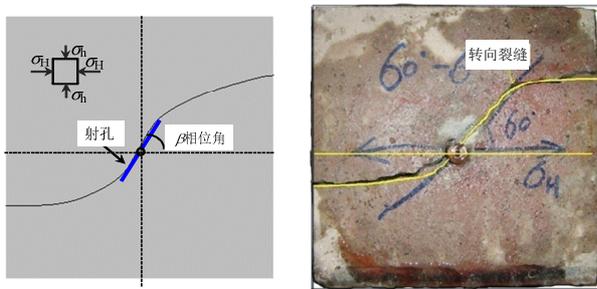
目前水力压裂试验的试件尺寸不超过 1m, 因此, 压裂液在较短的缝内流动压耗可忽略不计, 此时缝内压力可视为均匀分布。本文选用文献[19]中射孔相位角 60°水力压裂试验结果作参考, 模拟试件截面为 300×300mm, 模拟射孔孔眼长度为 30mm, 模型参数取值与实验参数一致(如表 1), 加载方式与边界条件如图 1 所示。

表 1 模型参数取值

Table 1 Values of model parameters

模型参数	符号	算例取值	单位
水平最大主应力	σ_H	6.0	MPa
水平最小主应力	σ_h	1.0	MPa
岩样弹性模量	E	8.402	GPa
岩样泊松比	ν	0.23	无量纲
破裂压力	P_f	15.5	MPa

算例结果如图 5 所示, 可见与试验结果十分接近。裂缝轨迹表现为, 裂缝逐渐偏转到垂直于最小水平主应力方向, 且双翼转向裂缝不是严格对称, 而是右侧裂缝转向半径大于左侧裂缝。这些规律均与试验结果相吻合。



(a) 本文数值结果 (b) 文献试验结果

图 5 射孔相位角 60°水力裂缝扩展轨迹线

Fig.5 Tracking line of fracture with 60 degree perforation

4.2 与解析模型对比

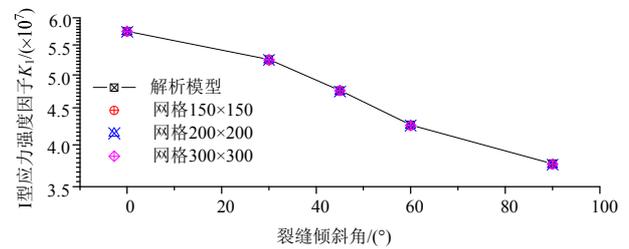
无限大地层内单条水力裂缝在静水压力和水平主应力作用下, 缝尖端 I 型和 II 型应力强度因子的解析表达式如下^[20]:

$$\begin{cases} K_I = \sqrt{\pi L_f} [p - (\sigma_H \sin^2 \beta + \sigma_h \cos^2 \beta)] \\ K_{II} = \frac{\sqrt{\pi L_f}}{2} [\sigma_H - \sigma_h] \sin 2\beta \end{cases} \quad (15)$$

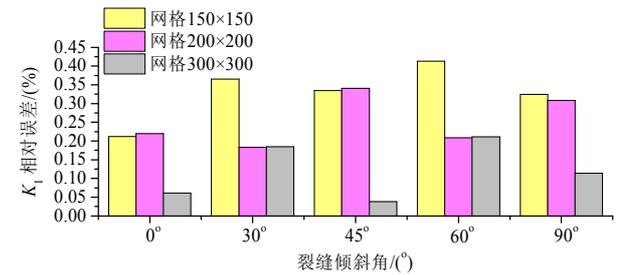
式中: K_I 为 I 型应力强度因子; K_{II} 为 II 型应力强度因子; p 为缝内静水压力; β 为裂缝倾角, 定义为

裂缝与最大水平主应力方向夹角; L_f 为裂缝半长。

数值计算中, 为了近似无限大地层, 裂缝长度需远小于求解域边长, 以消除求解域边界对裂缝周围应力的影响。该算例选取裂缝半长($L_f=5m$)为求解域边长的 1/60, 其他模型参数参见表 1。计算得到了三种网格密度(150×150, 200×200, 300×300)条件下裂缝尖端应力强度因子, 并与解析模型对比。如图 6 所示, 计算值与解析解吻合很好, 最大相对误差不超过 0.45%, 这也说明考虑缝内水压力作用的相互积分法求取缝尖应力强度因子具有较高精度。同时发现, 相对误差并不严格随着网格密度的增大而减小, 其原因是相互积分法中圆形积分路径的半径会随网格密度变化而变化。



(a) 绝对值对比



(b) 相对误差对比

图 6 缝尖 I 型应力强度因子数值结果与解析模型对比

Fig.6 Comparison of Mode I of numerical and analytical model

5 结论

本文研究了基于扩展有限元法的水力压裂数值算法, 得到的主要结论有:

- (1) 扩展有限元用于解决水力压裂模拟是可行的, 并且具有网格形状不依赖于裂缝位置和形状, 裂缝扩展不需要重新划分网格等优势。
- (2) 考虑缝内水压力作用的相互积分法求取缝尖应力强度因子具有较高精度, 为准确模拟水力压裂过程奠定了基础。
- (3) 算例结果与试验和解析结果十分接近, 表明本文方法准确可靠。

参考文献:

- [1] 王鸿勋. 水力压裂原理 [M]. 北京: 石油工业出版社, 1987: 1—5.
Wang Hongxun. Mechanisms of hydraulic fracture [M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1987: 1—5. (in Chinese)
- [2] 张广明, 刘合, 张劲, 等. 油井水力压裂流-固耦合非线性有限元数值模拟[J]. 石油学报, 2009, 30(1): 113—116.
Zhang Guangming, Liu He, Zhang Jin, et al. Simulation of hydraulic fracturing of oil well based on fluid-solid coupling equation and non-linear finite element [J]. Acta Petrolei Sinica, 2009, 30(1): 113—116. (in Chinese)
- [3] 张广明, 刘合, 张劲, 等. 水平井水力压裂的三维有限元数值模拟研究[J]. 工程力学, 2011, 28(2): 101—106.
Zhang Guangming, Liu He, Zhang Jin, et al. Three-dimensional finite element numerical simulation of horizontal well hydraulic fracturing [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(2): 101—106. (in Chinese)
- [4] 张广清, 陈勉. 水平井水压致裂裂缝非平面扩展模型研究[J]. 工程力学, 2006, 23(4): 160—165.
Zhang Guangqing, Chen Mian. Non-planar propagation of hydraulic fracture around horizontal wellbore [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(4): 160—165. (in Chinese)
- [5] Advani S, Lee J. Finite element model simulations associated with hydraulic fracturing [J]. Old SPE Journal, 1982, 22(2): 209—218.
- [6] Hunsweck M J, Shen Y, Lew A J. A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, 37: 993—1015.
- [7] 赵益忠, 程远方, 曲连忠, 等. 水力压裂动态造缝的有限元模拟[J]. 石油学报, 2007, 28(6): 103—106.
Zhao Yizhong, Cheng Yuanfang, Qu Lianzhong, et al. Finite element simulation of dynamic fracture in hydraulic fracturing [J]. Acta Petrolei Sinica, 2007, 28(6): 103—106. (in Chinese)
- [8] 彪仿俊, 刘合, 张士诚, 等. 水力压裂水平裂缝影响参数的数值模拟研究[J]. 工程力学, 2011, 28(10): 228—235.
Biao Fangjun, Liu He, Zhang Shicheng, et al. A numerical study of parameter influences on horizontal hydraulic fracture [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(10): 228—235. (in Chinese)
- [9] Es N M, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal of Numerical Method Engineering, 1999, 46: 131—150.
- [10] Fries T P, Belytschko T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 84(3): 253—304.
- [11] 董玉文, 任青文. 重力坝水力劈裂分析的扩展有限元法[J]. 水利学报, 2011, 42(11): 1361—1367.
Dong Yuwen, Ren Qingwen. An extended finite element method for modeling hydraulic fracturing in gravity dam [J]. Shuli Xuebao, 2011, 42(11): 1361—1367. (in Chinese)
- [12] Gordeliy E, Peirce A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 253: 305—322.
- [13] Dahi-taleghani A, Olson J. Numerical modeling of multistranded-hydraulic-fracture propagation: Accounting for the interaction between induced and natural fractures [J]. SPE Journal, 2011, 16(3): 575—581.
- [14] Stolarska M, Chopp D, Mo S N, et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51(8): 943—960.
- [15] Lamb A, Gorman G, Gosselin O, et al. Coupled deformation and fluid flow in fractured porous media using dual permeability and explicitly defined fracture geometry [C]. United States, Society of Petroleum Engineers, 2010: 1—15.
- [16] Rossmannith H P. Rock fracture mechanics [M]. Springer, 1983: 3—17.
- [17] Wang S, Yau J, Corten H. A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity [J]. International Journal of Fracture, 1980, 16(3): 247—259.
- [18] Cho Y, Beom H, Earmme Y. Application of a conservation integral to an interface crack interacting with singularities [J]. International Journal of Fracture, 1994, 65(1): 63—73.
- [19] 姜沛, 陈勉, 张广清, 等. 定向射孔对水力裂缝起裂与延伸的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(7): 1321—1326.
Jiang Hu, Chen Mian, Zhang Guangqing, et al. Impact of oriented perforation on hydraulic fracture initiation and propagation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(7): 1321—1326. (in Chinese)
- [20] Rice J R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture [J]. Fracture: an Advanced Treatise, 1968, 2: 191—311.