

文章编号: 1000-4750(2014)10-0205-07

冗余并联结构六维力传感器及其超静定静力映射解析分析

姚建涛^{1,2}, 李立建¹, 许允斗^{1,2}, 赵永生^{1,2}

(1. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室, 秦皇岛 066004; 2. 燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 秦皇岛 066004)

摘 要: 提出采用冗余并联结构作为大量程大测力板六维力传感器的弹性体结构。基于整体刚度和变形协调条件, 提出一种求解冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构六维力传感器超静定受力分析的解析方法, 导出了 n 个分支杆轴向力与六维外力之间的全映射关系。通过解析分析分块矩阵的广义逆, 得到了当各分支杆刚度一致或不一致时形式统一的各分支杆轴向受力分析的求解方法。最后, 利用数值算例验证了上述两种方法的正确性, 并表明采用广义逆矩阵求解冗余并联结构各分支杆轴向力不仅形式简洁, 而且易于计算机编程实现, 具有重要的应用前景。

关键词: 冗余并联结构; 六维力传感器; 整体刚度; 超静定; 广义逆矩阵

中图分类号: TP242; TM930.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0336

REDUNDANT-PARALLEL STRUCTURE SIX-AXIS FORCE SENSOR AND HYPERSTATIC STATIC MAPPING ANALYTICAL ANALYSIS

YAO Jian-tao^{1,2}, LI Li-jian¹, XU Yun-dou^{1,2}, ZHAO Yong-sheng^{1,2}

(1. Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

2. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science, Ministry of Education of China,

Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: A redundant-parallel structure is proposed as an elastic-body structure of a six-axis force sensor with a wide range and a large force plate. Based on the global stiffness and deformation compatibility condition, an analytical method of hyperstatic force analysis for a six-axis force sensor with a redundant n -SS($n>6$) parallel Stewart structure is presented. Further, the full mapping relationship between the axial forces of n branches and six-axis external forces is deduced. By analytically solving the generalized inverse of a block matrix, one uniform solution is acquired to compute the axial force at each branch whether the rigidities of all branches are uniform or not. Finally, numerical examples are employed to verify the correctness of the two methods mentioned above, which shows that the latter is succinct in form and easier to realize computer programming and also possesses significant application prospects.

Key words: redundant parallel structure; six-axis force sensor; global stiffness; hyperstatic; generalized inverse matrix

六维力传感器以其能够感知三维空间的力/力矩的全部信息而成为最重要且应用较广泛的一类

传感器。并联机构以其刚度大、结构稳定、承载能力高、无误差积累、精度高、求逆解容易^[1]等诸多

收稿日期: 2013-04-16; 修改日期: 2013-12-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(51305383); 国家重点基础研究发展计划课题项目(2013CB733000); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20131333120007); 河北省自然科学基金项目(2011203184)

通讯作者: 姚建涛(1980—), 男, 河北人, 副教授, 博士, 主要从事并联机构理论、机器人技术和多维力传感器技术应用研究(E-mail: jtyao@ysu.edu.cn).

作者简介: 李立建(1986—), 男, 河南人, 硕士生, 主要从事多维力传感器技术研究(E-mail: lljianzhu@126.com);

许允斗(1985—), 男, 浙江人, 讲师, 博士, 主要从事并联机构理论、锻造操作机技术和机器人技术研究(E-mail: ydxu@ysu.edu.cn);

赵永生(1962—), 男, 吉林人, 教授, 博士, 博导, 副校长, 主要从事机器人技术和先进制造技术研究(E-mail: yszhao@ysu.edu.cn).

特点, 很多研究学者把并联机构的思想引用到六维力传感器力敏感元件的结构设计上, 而 Stewart 平台因其分支个数与六维外力独特的对应关系, 一直是研究的热点, 如 Gaillet^[2]、Kang^[3]和 Dwarakanath^[4]等分别研究并研制了基于传统 Stewart 平台结构的力传感器; Ranganath 等^[5]基于 Stewart 平台近奇异位形设计了一种定向敏感的力/力矩传感器; 国内高峰等^[6]采用柔性铰链替代传统球副为 Stewart 结构六维力传感器的小型化奠定了基础; 石中盘等^[7]利用基本柔性单元设计了一种大量程的柔性铰式六维力传感器; 赵磊等^[8]提出了一种具有分载测量功能的预紧式 Stewart 结构六维力传感器。

近年来, 大测力板大量程六维力传感器在大型航天器空间对接、推力测试、起落架校准实验等领域应用越来越广泛。针对大量程、大测力板应用场合, 本文提出采用冗余 n -SS 并联结构作为大量程大测力板六维力传感器的弹性体机构方案。目前对基于 6-SS 结构的 Stewart 平台式六维力传感器研究文献较多, 但冗余分支的引入使得分支杆个数大于 6, 使得传感器的弹性体结构变为超静定结构, 各分支的受力不能仅靠静力平衡方程求出。樊友景等^[9]讨论了超静定结构弯矩图已知时计算静不定轴力的几种简便方法及其使用情况; 曹天捷等^[10]对在集中载荷作用下超静定梁的全受力变形过程进行了详细分析; 李学军等^[11]从超静定梁求解的通用力学模型出发, 通过程序化语言实现了复杂载荷作用下变刚度超静定梁的计算机求解; 喻晓今^[12]利用悬臂梁置换法对超静定等直梁的内力及位移等量做了精确解析求解。上述文献虽对超静定梁结构的受力分析提供了新的求解思路, 但并未对冗余并联结构的超静定受力做出解析分析。文献[13]虽从一定程度上考虑了超静定带来的影响, 但也并未建立各个分支杆受力和外力之间的解析映射关系。

本文将从整体刚度和位移协调条件出发, 采用数学解析方法求解冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构六维力传感器的超静定静力映射问题, 从理论上解决冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构分支超静定受力分析问题, 并建立分支杆受力与广义六维外力之间的解析映射关系。在此基础上, 同时兼顾考虑分支刚度一致或不一致时采用理论分析与基于广义逆矩阵进行求解计算之间的区别与联系, 为进一步解决超静定结构受力问题提供新的研究依据和途径, 为面向超静定结构六维力传感器结构设计和标定

研究奠定理论基础。

1 冗余 n -SS 并联 Stewart 六维力传感器结构特点

经典并联 Stewart 平台型六维力传感器为 6-SS 结构, 该结构具有保持几何不变性所需的最少约束, 减少任一约束都将使结构失去几何不变性^[14], 为静定结构。所提出的冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构六维力传感器其分支个数大于 6 时, 其结构为超静定结构。从静力学的观点来看, 此结构体系共有 n 个反力, 而用于计算的平衡方程仅有 6 个, 这意味着 n -SS($n>6$) Stewart 结构存在 $n-6$ 个约束, 超静定次数为 $n-6$ 。

针对大测力板、大量程等应用场合提出的冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 六维力传感器结构如图 1 所示。该结构由上平台、测量分支杆和下平台三部分组成。其中, 上平台为测力平台, 分布其上的球铰点 $p_i(i=1,2,\dots,n)$ 经由 n 个测量分支杆与下平台的球铰点 $P_i(i=1,2,\dots,n)$ 相连, 每分支杆两端均为球铰, 下平台为固定平台。由于球铰能实现空间的三维转动, 在不考虑各球面副摩擦转矩、球铰为理想球铰的情况下, 原理上 n 个测量分支杆只承受沿杆件轴线方向的拉力/压力, 故可将 n 个测量分支杆在受到外力时当作二力杆处理。同时, 冗余分支的引入显著提高传感器的整体刚度和承载能力。

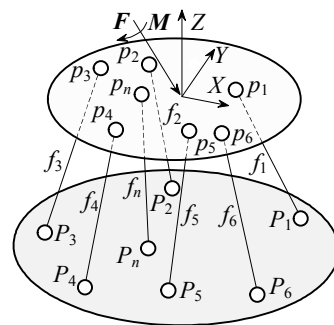


图 1 冗余 n -SS 并联 Stewart 六维力传感器结构简图
Fig.1 Structural diagram of redundant n -SS parallel six-axis force sensor based on the Stewart platform

2 冗余 n -SS 并联 Stewart 结构超静定静力映射解析

冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构如图 1 所示, 其一阶静力映射矩阵^[15]可表达为:

$$G_n = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_6 & S_7 & \cdots & S_n \\ S_{01} & S_{02} & \cdots & S_{06} & S_{07} & \cdots & S_{0n} \end{bmatrix} =$$

$$[\mathbf{G}_s \quad \mathbf{G}_{n-s}] \quad (1)$$

式中: \mathbf{G}_s 为矩阵 \mathbf{G}_n 的前 6 列元素所组成的矩阵; \mathbf{G}_{n-s} 表示其余列元素所组成的矩阵; $[\mathbf{S}_i^T \quad \mathbf{S}_{0i}^T]^T$ 且 $(i=1,2,\dots,n)$ 为第 i 个分支杆所在的单位线矢量。

由式(1)可得广义六维外力矢量 \mathbf{F}_w 和 n 个分支杆反作用力矢量 \mathbf{f}_n 之间的关系为:

$$\mathbf{F}_w = \mathbf{G}_n \mathbf{f}_n = [\mathbf{G}_n \quad \mathbf{G}_{n-s}] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_{n-s} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:

$$\mathbf{F}_w = [\mathbf{F}^T \quad \mathbf{M}^T]^T, \quad \mathbf{f}_s = [f_1, f_2, \dots, f_6]^T, \quad \mathbf{f}_{n-s} = [f_7, f_8, \dots, f_n]^T.$$

在六维外力 \mathbf{F}_w 作用下, 传感器的 6 个测量分支和其余 $n-6$ 个分支将产生轴向变形, 测量分支和其余分支的轴向反作用力与其轴向变形有如下关系:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{K}_n \Delta \mathbf{l}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{n-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_s \\ \Delta \mathbf{l}_{n-s} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $\Delta \mathbf{l}_s = [\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_6]^T$, $\Delta \mathbf{l}_{n-s} = [\Delta l_7, \Delta l_8, \dots, \Delta l_n]^T$; \mathbf{K}_s 表示 6 个测量分支杆刚度系数组成的对角阵; \mathbf{K}_{n-s} 表示其余 $n-6$ 个分支杆刚度系数组成的对角阵。

将第 i 个分支杆产生的轴向变形 Δl_i 与上平台的微分位移矢量 $\Delta \mathbf{d}$ 和微分转动矢量 $\Delta \boldsymbol{\theta}$ 相联系可得:

$$\Delta l_i = \mathbf{S}_i \cdot (\Delta \mathbf{d} + \Delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_i), \quad i=1,2,\dots,n \quad (4)$$

式(4)可写成如下形式:

$$\Delta l_i = \mathbf{S}_i^T \Delta \mathbf{d} + (\mathbf{p}_i \times \mathbf{S}_i)^T \Delta \boldsymbol{\theta} = [\mathbf{S}_i^T \quad \mathbf{S}_{0i}^T] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(5)给出了第 i 个分支产生的轴向变形 Δl_i 与上平台的微小位姿变化之间的位移协调关系。联立各分支的位移协调关系并将其表达成矩阵形式如下:

$$\Delta \mathbf{l}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_{01} & \mathbf{S}_{02} & \dots & \mathbf{S}_{0n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_n^T \Delta \mathbf{D} \quad (6)$$

式中, $\Delta \mathbf{D} = [\Delta \mathbf{d}^T \quad \Delta \boldsymbol{\theta}^T]^T$ 为上平台的微小位姿矢量。

联立式(2)、式(3)和式(6), 可得六维外力 \mathbf{F}_w 与上平台微小位姿矢量 $\Delta \mathbf{D}$ 之间的关系为:

$$\mathbf{F}_w = \mathbf{G}_n \mathbf{f}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{K}_n \Delta \mathbf{l}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{K}_n \mathbf{G}_n^T \Delta \mathbf{D} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{D} = (\mathbf{G}_s \mathbf{K}_s \mathbf{G}_s^T + \mathbf{G}_{n-s} \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T) \Delta \mathbf{D} \quad (7)$$

式中, \mathbf{K} 表示传感器的整体刚度矩阵。

此外, 上平台微小位姿矢量与 6 个测量分支杆轴向变形之间满足如下关系式:

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{C}_s^T \Delta \mathbf{l}_s \quad (8)$$

式中, $\mathbf{C}_s = \mathbf{G}_s^{-1}$ 。同时由式(3)可得:

$$\Delta \mathbf{l}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(7)即可得到六维外力 \mathbf{F}_w 与 6 个测量分支杆轴向反作用力之间的关系为:

$$\mathbf{F}_w = (\mathbf{G}_s + \mathbf{G}_{n-s} \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1}) \mathbf{f}_s = \mathbf{G}_w \mathbf{f}_s \quad (10)$$

若矩阵 $\mathbf{G}_w \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ 不奇异, 由式(10)可得 6 个测量分支杆反作用力 \mathbf{f}_s 与六维外力 \mathbf{F}_w 之间的关系为:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{C}_w \mathbf{F}_w \quad (11)$$

式中, $\mathbf{C}_w = \mathbf{G}_w^{-1} = (\mathbf{G}_s + \mathbf{G}_{n-s} \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1})^{-1}$ 。

当有广义六维外力作用于上平台时, 其余 $n-6$ 个分支杆的轴向变形与上平台的微小位姿矢量之间满足如下关系:

$$\Delta \mathbf{l}_{n-s} = \mathbf{G}_{n-s}^T \Delta \mathbf{D} \quad (12)$$

联立式(7)和式(12)并考虑分支作用力与轴向变形之间的关系, 可得其余 $n-6$ 个分支杆的轴向力为:

$$\mathbf{f}_{n-s} = \mathbf{K}_{n-s} \Delta \mathbf{l}_{n-s} = \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \Delta \mathbf{D} = \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_w \quad (13)$$

另外, 求取其余 $n-6$ 个分支杆的轴向力时, 也可通过建立其余 $n-6$ 个分支杆的轴向变形与前 6 个分支杆轴向变形之间的关系来求取。将式(8)和式(9)代入式(12)可得其余 $n-6$ 个分支杆的轴向变形与前 6 个分支杆轴向力之间的关系为:

$$\Delta \mathbf{l}_{n-s} = \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s \quad (14)$$

联立式(11)、式(13)和式(14)可得其余 $n-6$ 个分支杆的轴向力与广义六维外力之间的关系为:

$$\mathbf{f}_{n-s} = \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{C}_w \mathbf{F}_w \quad (15)$$

由式(11)和式(15)即可得到 n 个分支杆的反作用力与广义六维外力之间的全映射解析关系式为:

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} (\mathbf{G}_s + \mathbf{G}_{n-s} \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1})^{-1} \\ \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1} (\mathbf{G}_s + \mathbf{G}_{n-s} \mathbf{K}_{n-s} \mathbf{G}_{n-s}^T \mathbf{C}_s^T \mathbf{K}_s^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{F}_w \quad (16)$$

式(16)建立了冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构超静定受力的解析解, 从理论上彻底解决了冗余超静定 Stewart 结构六维力传感器的受力问题。

3 基于广义逆矩阵的冗余 n -SS 并联 Stewart 结构静力映射解析

3.1 分支杆刚度一致时冗余 n -SS 并联 Stewart 结构超静定受力的广义逆矩阵解

由式(2)可知静力映射矩阵 \mathbf{G}_n 为 $6 \times n$ 矩阵, 那么能否直接利用 \mathbf{G}_n 的 Moore-Penrose 广义逆求解 n 个分支杆的轴向力? 要想回答这一问题, 需要对分块矩阵进行解析分析, 这里引入 L.Mihalyffy 公式^[16]

求解分块矩阵 $[G_n \ G_{n-s}]$ 的 Moore-Penrose 广义逆:

$$[G_s \ G_{n-s}]^+ = \begin{bmatrix} (I + E_2 E_2^*)^{-1} (G_s^+ - G_s^+ G_{n-s} E_1^+) \\ E_2^* (I + E_2 E_2^*)^{-1} (G_s^+ - G_s^+ G_{n-s} E_1^+) + E_1^+ \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中, $E_1 = (I - G_s G_s^+) G_{n-s}$, $E_2 = G_s^+ G_{n-s} (I - E_1^+ E_1)$, E_2^* 表示矩阵的共轭转置。

特别地, 这里 G_s 为 6×6 形式的实数矩阵, 故式(17)可简化为:

$$[G_s \ G_{n-s}]^+ = \begin{bmatrix} (I + G_s^- G_{n-s} G_{n-s}^T G_s^{-T})^{-1} G_s^{-1} \\ G_{n-s}^T G_s^{-T} (I + G_s^- G_{n-s} G_{n-s}^T G_s^{-T})^{-1} G_s^{-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(18)可进一步简化成:

$$[G_s \ G_{n-s}]^+ = \begin{bmatrix} (G_s + G_{n-s} G_{n-s}^T G_s^{-T})^{-1} \\ G_{n-s}^T G_s^{-T} (G_s + G_{n-s} G_{n-s}^T G_s^{-T})^{-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

联立式(2)和式(19)可直接得到 n 个测量分支杆的反作用力为:

$$f_n = G_n^+ F_w = \begin{bmatrix} (G_s + G_{n-s} G_{n-s}^T G_s^{-T})^{-1} \\ G_{n-s}^T G_s^{-T} (G_s + G_{n-s} G_{n-s}^T G_s^{-T})^{-1} \end{bmatrix} F_w \quad (20)$$

对比式(16)和式(20)我们可发现, 采用静力映射矩阵 G_n 的 Moore-Penrose 广义逆得到的式(20)为采用理论分析得到的式(16)中分支刚度完全一致时的一组特殊解。故可得结论: 当冗余 n -SS($n > 6$) 并联 Stewart 结构六维力传感器各个分支杆刚度完全一致时, 可直接利用矩阵 G_n 的 Moore-Penrose 广义逆求解各分支杆的轴向反作用力, 其解与采用理论分析得到的超静定受力解相一致。

3.2 分支杆刚度不一致时冗余 n -SS 并联 Stewart 结构超静定受力的广义逆矩阵解

当各分支杆刚度不一致时, 不能直接采用矩阵 G_n 的 Moore-Penrose 广义逆进行求解, 原因在于直接利用 Moore-Penrose 广义逆 G_n 求解未考虑各个分支杆的刚度。因此, 当各分支杆刚度不一致时, 必须考虑各分支杆刚度的影响。对于冗余 n -SS($n > 6$) 并联 Stewart 结构, 将式(3)代入式(2)可得六维外力 F_w 与 n 个分支杆轴向变形 Δ_n 之间的关系为:

$$F_w = G_n K_n \Delta_n = [G_s K_s \quad G_{n-s} K_{n-s}] \begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_{n-s} \end{bmatrix} \quad (21)$$

直接利用矩阵 $[G_s K_s \ G_{n-s} K_{n-s}]$ 的 Moore-Penrose 广义逆可得 n 个分支杆的轴向变形 Δ_n 为:

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_{n-s} \end{bmatrix} = (G_n K_n)^+ F_w = [G_s K_s \quad G_{n-s} K_{n-s}]^+ F_w \quad (22)$$

其中, 分块矩阵 $[G_s K_s \ G_{n-s} K_{n-s}]$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵可表达为:

$$[G_s K_s \quad G_{n-s} K_{n-s}]^+ = \begin{bmatrix} C'_w \\ K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T} C'_w \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中, $C'_w = (G_s K_s + G_{n-s} K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T})^{-1}$ 。

联立式(3)、式(22)和式(23)可得各分支杆的反作用力为:

$$f_n = K_n (G_n K_n)^+ F_w = \begin{bmatrix} K_s C'_w \\ K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T} C'_w \end{bmatrix} F_w \quad (24)$$

考虑到 K_s 为对角阵, 故式(24)可简化为:

$$f_n = \begin{bmatrix} f_s \\ f_{n-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C''_w \\ K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T} C''_w \end{bmatrix} F_w \quad (25)$$

式中:

$$C''_w = (G_s + G_{n-s} K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T})^{-1}。$$

但对比式(25)和式(16)可知, 式(25)给出的基于 Moore-Penrose 广义逆矩阵的结果与理论分析的求解结果不相一致。下面考虑其得到的结果是否满足位移协调条件, 由式(22)和式(23)可得 6 个测量分支杆的轴向变形 Δ_s 为:

$$\Delta_s = (G_s K_s + G_{n-s} K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T})^{-1} F_w \quad (26)$$

将式(26)代入式(8)可得利用 Moore-Penrose 广义逆求解得到的 6 个测量分支杆的轴向变形所引起上平台的微小位姿矢量 ΔD 为:

$$\Delta D = C_s^T (G_s K_s + G_{n-s} K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T})^{-1} F_w \quad (27)$$

式(27)可简化为:

$$\Delta D = (G_s K_s G_s^T + G_{n-s} K_{n-s} K_{n-s}^T G_{n-s}^T G_s^{-T} K_s^{-T} G_s^T)^{-1} F_w \quad (28)$$

由式(7)可得到考虑传感器整体刚度而产生的上平台微小位姿矢量 ΔD 为:

$$\Delta D = (G_s K_s G_s^T + G_{n-s} K_{n-s} G_{n-s}^T)^{-1} F_w \quad (29)$$

式(28)和式(29)两者不一致, 说明式(25)给出的基于 Moore-Penrose 广义逆矩阵的求解公式不满足位移协调方程, 即不能利用式(25)求各分支杆的反作用力。对比式(25)和式(16)可发现两式中仅包含刚度的项有所不同, 且两者包含刚度的项相差平方的

关系。由此可推出,当分支刚度不一致时,可基于下式进行求解:

$$f_n = \sqrt{K_n} (G_n \sqrt{K_n})^+ F_w \quad (30)$$

式中, $\sqrt{K_n} (G_n \sqrt{K_n})^+$ 为考虑分支杆刚度后矩阵 G_n 的刚度加权 Moore-Penrose 广义逆^[17-18], 其物理意义即为考虑分支杆刚度后传感器总的变形势能最小。将式(30)展开可得:

$$f_n = \begin{bmatrix} \sqrt{K_s} & 0 \\ 0 & \sqrt{K_{n-s}} \end{bmatrix} [G_s \sqrt{K_s} \quad G_{n-s} \sqrt{K_{n-s}}]^+ F_w = \begin{bmatrix} (G_s + G_{n-s} K_{n-s} G_{n-s}^T C_s^T K_s^{-1})^{-1} \\ K_{n-s} G_{n-s}^T C_s^T K_s^{-1} (G_s + G_{n-s} K_{n-s} G_{n-s}^T C_s^T K_s^{-1})^{-1} \end{bmatrix} F_w \quad (31)$$

对比式(31)和式(16)可知两者最终的展开形式完全一致,也就是说可以直接利用式(30)解决冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构的超静定受力问题。式(30)不仅包含了位移协调条件的作用,而且给出了当分支杆刚度不一致时分支杆受力的一种简便数值求解方法,其展开式等于理论分析的结果。

4 数值算例

以上对冗余 n -SS($n>6$) 并联 Stewart 结构六维力传感器超静力受力问题进行了细致分析,下面以冗余 7-ss 并联 6-1/3-3-1 型和冗余 8-SS 并联 8/4-4 型超静定 Stewart 结构力传感器为分析实例,对上述理论推导进行数值验证。

算例 1. 冗余 7-SS 并联 6-1/3-3-1 型六维力传感器结构如图 2 所示。

其中,基准坐标系 O -XYZ 建立在传感器上平台的几何中心,决定传感器布局的尺寸参数有 R_u 、 R_{d1} 、

$$G_7 = \begin{bmatrix} -0.524 8 & 0.851 9 & -0.327 2 & -0.344 2 & -0.511 1 & 0.855 3 & 0 \\ -0.680 8 & -0.114 1 & 0.794 8 & 0.788 9 & -0.692 6 & -0.096 4 & 0 \\ 0.511 1 & 0.511 1 & 0.511 1 & 0.509 0 & 0.509 0 & 0.509 0 & 1.000 0 \\ 0.076 7 & 0.076 7 & -0.153 3 & 0.152 7 & -0.076 4 & -0.076 4 & 0 \\ -0.132 8 & 0.132 8 & 0.000 0 & -0.000 0 & 0.132 2 & -0.132 2 & 0 \\ -0.098 2 & -0.098 2 & -0.098 2 & 0.103 3 & 0.103 3 & 0.103 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

假定作用于传感器上平台中心点的六维外力为 $F_w=[150 \ 200 \ 240 \ 120 \ 100 \ 160]^T$,当 7 个分支杆的刚度完全一致时,由式(16)可得 7 个分支杆的反作用力为:

$$f_7 = [-371 \ 156 \ -424 \ 627 \ 271 \ 45 \ 86]^T \quad (33)$$

此外,由前面的分析可知,当分支杆刚度完全一致时,可直接利用 Moore-Penrose 广义逆矩阵求

R_{d2} 、 H 、 α_1 、 α_2 、 β_1 和 β_2 。其中, R_u 为上平台球铰点分布半径, R_{d1} 、 R_{d2} 分别为下平台外圈和内圈球铰点分布半径, H 为上下平台间距离, α_1 、 β_1 分别表示下平台第一个球铰点和坐标原点连线在 XY 平面内投影与基准坐标系 X 轴夹角, α_2 、 β_2 分别表示上、下平台第二个球铰点和坐标原点连线在 XY 平面内投影与基准坐标系 X 轴夹角。传感器的 6 个测量支路 $p_i P_i (i=1,2,\dots,6)$ 的杆长相等,且假定第 7 分支为冗余分支。

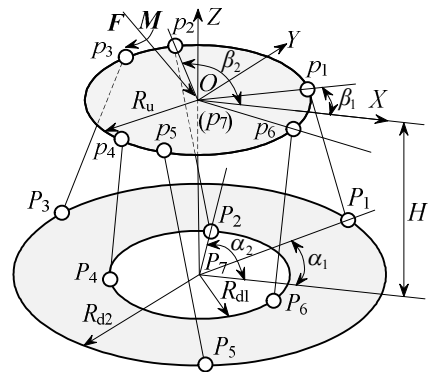


图 2 冗余 7-SS 并联 6-1/3-3-1 型六维力传感器结构简图
Fig.2 Structural diagram of redundant 7-SS parallel 6-1/3-3-1 type six-axis force sensor

冗余 7-SS 并联 6-1/3-3-1 型六维力传感器基本结构参数如表 1 所示。

表 1 冗余 7-SS 并联六维力传感器的基本结构参数
Table 1 Basic structural parameters of redundant 7-SS parallel 6-1/3-3-1 type six-axis force sensor

R_u/m	R_{d1}/m	R_{d2}/m	α_1	α_2	β_1	β_2	H/m
1.0	0.5	1.5	40°	65°	30°	90°	0.9

由式(1)可得到传感器的六维外力与 7 个分支杆反作用力间的一阶静力映射矩阵为:

解,由 Matlab 中求解矩阵广义逆的命令 pinv(·)可直接求出矩阵 G_7 的广义逆,进而可得到:

$$f_7 = [-371 \ 156 \ -424 \ 627 \ 271 \ 45 \ 86]^T \quad (34)$$

对比式(33)和式(34)可知,采用超静定理论分析和利用 Moore-Penrose 广义逆求解结果完全一致。

当各个分支杆的刚度不完全一致时,假设中间分支刚度系数与其余 6 个测量分支的刚度系数之比

为 1.5, 由式(16)可得 7 个分支杆的反作用力为:

$$f_7 = [-378 \ 149 \ -431 \ 620 \ 264 \ 38 \ 108]^T \quad (35)$$

若采用式(24)进行求解, 令 $K_7 = k_e \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1.5)$, 其中, k_e 为常数. 将式(32)代入式(24)可得到:

$$f_7 = [-386 \ 142 \ -438 \ 612 \ 257 \ 31 \ 131]^T \quad (36)$$

对比式(35)和式(36)可看出两者结果有明显差异, 从理论上不能采用式(24)进行计算求解. 利用矩阵 G_7 的刚度加权广义逆即式(30)进行求解可得:

$$f_7 = [-378 \ 149 \ -431 \ 620 \ 264 \ 38 \ 108]^T \quad (37)$$

与式(35)对比可发现, 其值与理论值完全一致.

算例 2. 冗余 8-SS 并联 8/4-4 型六维力传感器结构如图 3 所示.

其中, 决定传感器各布局参数的意义同图 2 中对应布局参数的定义一样, 传感器的 8 个测量支路 $p_i P_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 的杆长相等, 且假定第 7~8 分支为冗余分支. 冗余 8-SS 并联 8/4-4 型六维力传感器基本结构参数如表 2 所示.

$$G_8 = \begin{bmatrix} -0.1078 & 0.1083 & -0.0292 & -0.0244 & 0.1078 & -0.1083 & 0.0292 & 0.0244 \\ 0.0292 & 0.0244 & -0.1078 & 0.1083 & -0.0292 & -0.0244 & 0.1078 & -0.1083 \\ 0.9937 & 0.9938 & 0.9937 & 0.9938 & 0.9937 & 0.9938 & 0.9937 & 0.9938 \\ 0.0427 & 0.0527 & 0.0611 & 0.0527 & -0.0427 & -0.0527 & -0.0611 & -0.0527 \\ -0.0611 & -0.0527 & 0.0427 & 0.0527 & 0.0611 & 0.0527 & -0.0427 & -0.0527 \\ 0.0064 & -0.0045 & 0.0064 & -0.0045 & 0.0064 & -0.0045 & 0.0064 & -0.0045 \end{bmatrix} \quad (38)$$

假定作用于传感器上平台中心点的六维外力为 $F_w = [15 \ 20 \ 24 \ 12 \ 10 \ 16]^T$, 当 8 个分支杆的刚度完全一致时, 由式(16)可得 8 个分支杆的反作用力为:

$$f_8 = [329 \ -314 \ 373 \ -269 \ 412 \ -413 \ 368 \ -458]^T \quad (39)$$

当分支杆刚度完全一致时, 利用 Moore-Penrose 广义逆矩阵求解矩阵 G_8 的广义逆, 进而可得 8 个分支杆的反作用力为:

$$f_8 = [329 \ -314 \ 373 \ -269 \ 412 \ -413 \ 368 \ -458]^T \quad (40)$$

对比式(39)和式(40)可知, 采用超静定理论分析和利用 Moore-Penrose 广义逆求解结果完全一致.

当各个分支杆的刚度不完全一致时, 不失一般性, 选定 $K_8 = k_e \text{diag}(1 \ 1.3 \ 1.1 \ 1.2 \ 0.8 \ 0.9 \ 0.9 \ 1.2)$, 其中, k_e 为常数. 由式(16)可得 8 个分支杆的反作用力为:

$$f_8 = [307 \ -287 \ 395 \ -296 \ 390 \ -387 \ 391 \ -485]^T \quad (41)$$

若采用式(24)进行求解, 由式(24)可得到:

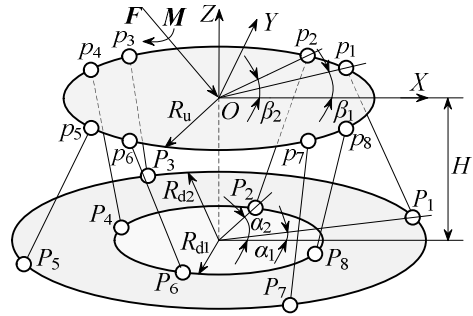


图 3 冗余 8-SS 并联 8/4-4 型六维力传感器结构简图
Fig.3 Structural diagram of redundant 8-SS parallel 8/4-4 type six-axis force sensor

表 2 冗余 8-SS 并联六维力传感器的基本结构参数
Table 2 Basic structural parameters of redundant 8-SS parallel 8/4-4 type six-axis force sensor

R_0/m	R_{d1}/m	R_{d2}/m	α_1	α_2	β_1	β_2	H/m
0.075	0.05	0.10	20°	66°	35°	45°	0.30

由式(1)可得到传感器的六维外力与 8 个分支杆反作用力间的一阶静力映射矩阵为:

$$f_8 = [284 \ -254 \ 418 \ -328 \ 367 \ -354 \ 414 \ -518]^T \quad (42)$$

利用矩阵 G_8 的刚度加权广义逆即式(30)进行求解可得:

$$f_8 = [307 \ -287 \ 395 \ -296 \ 390 \ -387 \ 391 \ -485]^T \quad (43)$$

对比式(41)和式(42)可看出两者结果有明显差异, 而与式(43)对比可发现, 两者结果完全一致, 从而验证了前面理论推导的正确性.

5 结论

(1) 本文通过对冗余 n -SS($n > 6$) 并联 Stewart 结构传感器的整体刚度和位移变形协调条件综合考虑, 推导得到了 n 个分支杆轴向反作用力与广义六维外力之间解析全映射关系, 从理论上彻底解决了冗余 n -SS 并联 Stewart 结构的超静定受力问题.

(2) 通过基于静力映射矩阵的 Moore-Penrose 广义逆求解得到了与采用理论分析求解一致的结果, 而且得到: 当各分支杆刚度一致时, 可直接利

用 Moore-Penrose 广义逆来求解分支轴向力; 当各分支刚度不相一致时, 需利用静力映射矩阵的刚度加权广义逆来求解各分支轴向力。

参考文献:

- [1] Merlet J P. Parallel robots [M]. Berlin: Springer, 2006: 265—266.
- [2] Gaillet A, Reboulet C. An isostatic six component force and torque sensor [C]. Chicago: Robotics International of SME, 1983: 102—111.
- [3] Kang C G. Closed-form force sensing of a 6-axis force transducer based on the Stewart platform [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2001, 90(1): 31—37.
- [4] Dwarakanath T A, Dasgupta B, Mruthyunjaya T S. Design and development of a Stewart platform based force-torque sensor [J]. Mechatronics, 2001, 11(7): 793—809.
- [5] Ranganath R, Nair P S, Mruthyunjaya T S, et al. A force-torque sensor based on a Stewart platform in a near-singular configuration [J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(9): 971—998.
- [6] 高峰, 王洪瑞, 金振林. 一种具有弹性铰链六维力与力矩传感器[P]. 中国: 99102421, 1999-09-29.
Gao Feng, Wang Hongrui, Jin Zhenlin. A six-axis force/torque sensor with elastic joints [P]. China: 99102421, 1999-09-29. (in Chinese)
- [7] 石中盘, 赵铁石, 厉敏, 等. 大量程柔性铰六维力传感器静态解耦的研究[J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(5): 1062—1069.
Shi Zhongpan, Zhao Tieshi, Li Min, et al. Research on static decoupling of large range flexible joint six-axis force sensor [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2012, 33(5): 1062—1069. (in Chinese)
- [8] 赵磊, 刘巍, 巩岩. 预紧式 Stewart 结构六维力/力矩传感器[J]. 光学精密工程, 2011, 19(12): 2954—2962.
Zhao Lei, Liu Wei, Gong Yan. Pre-stressed six-axis force/torque sensor based on Stewart platform [J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(12): 2954—2962. (in Chinese)
- [9] 樊友景, 杨守波, 李大望. 关于静不定轴力的讨论[J]. 力学与实践, 2010, 32(2): 132—134.
Fan Youjing, Yang Shoubo, Li Dawang. Discussion about statically indeterminate shaft force [J]. Mechanics in Engineering, 2010, 32(2): 132—134. (in Chinese)
- [10] 曹天捷, 杜蓬娟. 一次超静定理想弹性梁的全过程分析[J]. 工程力学, 1999, 16(3): 105—112.
Cao Tianjie, Du Pengjuan. Analysis of the entire process of an elastic-plastic beam with one degree of indeterminacy [J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(3): 105—112. (in Chinese)
- [11] 李学军, 朱萍玉, 刘义伦. 复杂载荷下变刚度静不定梁程序化求解[J]. 工程力学, 2003, 20(4): 116—121.
Li Xuejun, Zhu Pingyu, Liu Yilun. Computerized solution of statically indeterminate beams with varying flexural rigidity under complex load [J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(4): 116—121. (in Chinese)
- [12] 喻晓今. 求超静定等直梁的置换法[J]. 工程力学, 2007, 24(增 I): 66—69.
Yu Xiaojin. Conversion method for calculation of statically indeterminate straight beams with uniform cross-section [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(Suppl I): 66—69. (in Chinese)
- [13] 姚建涛, 侯雨雷, 牛建业, 等. 大量程预紧式六维力传感器及静态标定研究[J]. 仪器仪表学报, 2009, 30(6): 1233—1239.
Yao Jiantao, Hou Yulei, Niu Jianye, et al. Large range prestressed six-axis force sensor and study on static calibration [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2009, 30(6): 1233—1239. (in Chinese)
- [14] 龙驭球, 包世华, 匡文起, 等. 结构力学教程(I)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 18—22.
Long Yuqiu, Bao Shihua, Kuang Wenqi, et al. Structural mechanics (I) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2000: 18—22. (in Chinese)
- [15] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 251—262.
Huang Zhen, Zhao Yongsheng, Zhao Tieshi. Advanced spatial mechanism [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 251—262. (in Chinese)
- [16] Mihalyffy L. An alternative representation of the generalized inverse of partitioned matrices [J]. Journal of Linear Algebra and Its Applications, 1971, 4(1): 95—100.
- [17] Wang G R, Wei Y M, Qiao S Z. Generalized inverses: Theory and computations [M]. Beijing/New York: Science Press, 2004: 26—32.
- [18] Wang Z J, Yao J T, Xu Y D, et al. Hyperstatic analysis of a fully pre-stressed six-axis force/torque sensor [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 57: 84—94.