第 29 卷 第 11 期
Vol. 29 No. 11

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 11 月
Nov. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 11-2101-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.0793

基于谈判集的模糊合作博弈的收益分配方案

李 翠[1,2], 薛 昱[3]

(1. 西安理工大学 经济与管理学院，西安 710048；2. 西安财经学院 信息学院，西安 710100；3. 北京信息控制研究所 研究生管理部，北京 100037)

摘 要: 为了弥补核心作为博弈解可能为空集的缺陷, 将经典合作博弈中的谈判集解拓展到模糊合作博弈中, 提出了模糊合作博弈的模糊谈判集的概念. 探讨模糊网络博弈的模糊谈判集和核心的等价性质, 并对相关结论加以证明. 研究表明, 模糊合作博弈的模糊谈判集是经典合作博弈谈判集的自然拓展, 该结果丰富了对模糊合作博弈的解的研究, 也表明了模糊网络博弈核心的非空性, 进而保证其最优分配方案的存在性.

关键词: 模糊联盟；模糊合作博弈；核心；谈判集

中图分类号: O225 **文献标志码:** A

Scheme of profit allocation based on fuzzy cooperative game in bargaining set

LI Cui[1,2], *XUE Yu*[3]

(1. School of Economics and Management，Xi'an University of Technology，Xi'an 710048，China；2. School of Information，Xi'an University of Finance and Economics，Xi'an 710100，China；3. Graduate Management Department, Beijing Institute of Information Control，Beijing 100037，China．Correspondent：LI Cui，E-mail：bxdlicui@163.com)

Abstract: The core is usually an empty set in classical cooperative game, in order to overcome this defect, the bargaining set of classical cooperative game is extended into the fuzzy cooperative game, and concepts of fuzzy bargaining sets in the fuzzy cooperative game are provided. The equivalence property of the fuzzy bargaining set in fuzzy network game is discussed, and some conclusions are drawn. The study demonstrates that the fuzzy bargaining set of the fuzzy cooperative game is a natural continuation of classical bargaining set, this result not only enriches the solution of fuzzy cooperative game, but also provides the nonempty property of the core in the fuzzy network game, and indicates the optimal allocation is existent.

Key words: fuzzy coalition；fuzzy cooperative game；core；bargaining set

0 引 言

模糊合作博弈的解集和应用一直受到学术界的广泛关注, 在经典合作博弈中, 最大联盟为合作博弈解集的研究奠定了基础[1-3]. Aubin[4]将经典联盟推广到模糊联盟上, 首次对模糊合作博弈进行了系统研究, 将模糊特性渗透到合作博弈中, 提出了模糊合作博弈的概念, 体现了在合作中, 某些参与者并非以全部资源完全加入联盟, 只是在一定程度上以一定参与度的部分资源参与联盟活动的思想. 例如在某信息化平台下, 多个提供商向系统集成商提供信息化产品和信息化服务, 各提供商形成联盟, 获得信息化产品收益和信息化服务收益. 在具有不确定性的情况下, 每个提供商最为关注的是, 根据自己的参与度, 在合作中将会获得多少收益, 因此, 可将模糊合作博弈的核心和谈判集解用于解决该信息化平台下各提供商的收益分配问题.

模糊合作博弈可表述为各参与者进行相互谈判的过程, 参与者之间通过谈判达成一致意见, 进而组建成模糊联盟. 在经典合作博弈中, 谈判集是参与者之间针对谈判议题提出的一种解集, 关于谈判集有很多定义[5-7]. 鉴于此, 本文提出了以模糊谈判集作为经典合作博弈谈判集概念的拓展, 弥补核心作为博弈解可能存在空集的缺陷, 并证明了针对模糊网络博弈, 其模糊谈判集与核心具有等价性. 表明了模糊网络博

收稿日期: 2013-06-15；**修回日期:** 2014-01-25.

基金项目: 国防基础科研计划基金项目(A0420131501)；陕西省自然科学基金项目(2012JM8034)；全国统计科学研究计划项目(2013LY069)；陕西省教育厅科学研究计划项目(14JK1274).

作者简介: 李翠(1979−), 女, 讲师, 博士, 从事博弈论、信息化管理等研究；薛昱(1990−), 男, 博士生, 从事系统工程、信息化管理的研究.

弈的核心是非空解集, 进而保证其最优分配方案的存在性.

1 具有模糊联盟博弈的核心

令 $N=(1,2,\cdots,n)$ 为所有参与者的集合, 任意 N 的非空子集称为清晰联盟; 记 $|N|$ 维单位超立体 $[0,1]^N$ 空间为 $\mathcal{F}^N$, 即 $\mathcal{F}^N \triangleq [0,1]^N$; 向量元素 $s\in\mathcal{F}^N$ 为 N 的一个模糊联盟, 显然向量 s 的第 i 个维度上的元素 s_i 满足 [0,1], 其经济意义是参与者 i 在模糊联盟 s 中的参与程度, 也称在联盟 s 中的隶属度, 如在某信息化平台下 s_i 表示提供商 i 根据实际的信息化服务质量确定的参与程度.

经典合作博弈中 $\forall\, S\in 2^N$, 可以按照模糊联盟的形式表示为 e^S, 满足

$$(e^S)_i=\begin{cases}1,\ i\in S;\\0,\ i\in N\setminus S.\end{cases}$$

相应地, $(e^{\varnothing})_i=0,\forall\, i\in N$, $e^{\{i\}}$ 简记为 e^i. 将模糊联盟 e^S 对应于清晰联盟 $S\in 2^N$, 则通过 e^i 将模糊联盟 $e^N=(1,1,\cdots,1)$ 称为最大模糊联盟, $e^{\varnothing}=(0,0,\cdots,0)$对应于空模糊联盟, 所有非空模糊联盟的集合记为 $\mathcal{F}_0^N=\mathcal{F}^N\setminus\{e^{\varnothing}\}$.

对于 $s\in\mathcal{F}^N$, $\operatorname{car}(s)=\{i\in N|s_i>0\}$ 为模糊联盟 s 的载体, 如果 $\operatorname{car}(s)\neq N$, 则称模糊联盟 s 为特定的模糊联盟[2]. 给定参与者集合 N, 其特定模糊联盟的集合记为 $\mathcal{PF}^N$, 在参与者集合 N 上的非空特定模糊联盟的集合记为 $\mathcal{PF}_0^N$.

定义 1 关于参与者集合 N 的模糊合作博弈是映射 $v:\mathcal{F}^N\to R$, 且满足性质

$$(\text{空性})\ v(e^{\varnothing})=0, \tag{1a}$$

$$(\text{超可加性})\ v(s\vee t)\geqslant v(s)+v(t). \tag{1b}$$

其中

$$\operatorname{car}(s)\bigcap\operatorname{car}(t)=\varPhi,$$
$$(s\vee t)\in\{R^{\operatorname{car}(s)\cup\operatorname{car}(t)}|(s\vee t)_i=\max(s_i,t_i),$$
$$i\in\operatorname{car}(s)\bigcup\operatorname{car}(t)\}.$$

通过映射 v 的分配, 每一模糊联盟将得到一实数, 表示在合作中获得的收益. 超可加性中: $v(s\vee t)$ 为不同的模糊联盟通过合作获得的收益, $v(s)$ 和 $v(t)$ 分别为模糊联盟 s 和 t 各自单独行动时获得的收益. 超可加性体现了合作将会获得更多收益的思想[2].

从空间的角度而言, 按照模糊合作博弈和经典合作博弈的形式, 相当于经典合作博弈只考察 $|N|$ 维单位超立体 $[0,1]^N$ 离散的 $2^{|N|}$ 个端点, 模糊合作博弈考察的是整个连续的空间体. 记 $\mathcal{G}^N$ 为经典合作博弈特征函数的集合, 则 $\mathcal{FG}^N$ 为关于参与者集合 N 的模糊合作博弈特征函数的集合.

定义 2 模糊合作博弈中的转归即为一个收益分配向量 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$[2], 满足

$$\sum_{i\in N}x_i=v(e^N), \tag{2a}$$

$$x_i\geqslant v(e^i),\ \forall\, i\in N. \tag{2b}$$

其中: 式 (2a) 表明将总收益值进行一次性全部分配; 式 (2b) 表明每个参与者通过合作获得的收益不少于他们单独行动时所应获得的收益.

给定模糊合作博弈 $v\in\mathcal{FG}^N$, 其预转归集 $I^*(v)$ 即为如下集合:

$$I^*(v)=\Big\{x\in R^N\Big|\sum_{i\in N}x_i=v(e^N)\Big\}.$$

针对模糊合作博弈 $v\in\mathcal{FG}^N$, 其转归集 $I(v)$ 即为满足如下条件的集合:

$$I(v)=$$
$$\Big\{x\in R^N\Big|\sum_{i\in N}x_i=v(e^N),\ x_i\geqslant v(e^i),\ \forall\, i\in N\Big\}.$$

定义 3 关于模糊合作博弈 $v\in\mathcal{FG}^N$, 其 Aubin 核心 $C(v)$ 即为如下集合[2]:

$$C(v)=\Big\{x\in I(v)\Big|\sum_{i\in N}s_ix_i\geqslant v(s),\ \forall\, s\in\mathcal{F}^N\Big\}. \tag{3}$$

$x\in C(v)$ 体现了对合作总收益值 $v(e^N)$ 进行全部分配的方案规则, 其中模糊联盟 s 中的每一参与者 $i\in N$ 将依据其参与度获得一定比例的收益. 比如, 参与者 i 全部参与到联盟中将会获得值为 x_i 的收益, 如果以参与度 s_i 参与到联盟 s 中所获得的收益为 s_ix_i, 则每一模糊联盟 s 的总收益不会少于 $v(s)$.

Aubin 核心是模糊合作博弈的重要解集概念之一, 但核心非空才能保证最大模糊联盟的稳定性.

2 具有模糊联盟博弈的谈判集

2.1 经典合作博弈的谈判集

令 N 表示参与者 (也称局中人) 集合, $G(N)$ 表示定义在 N 上的博弈集合, 则通常用 (N,v) 表示定义在 N 上的合作博弈, 谈判集作为经典合作博弈的重要解集概念之一, 有如下定义.

定义 4 令 (N,v) 为经典合作博弈, x 为转归, 且 k 和 l 为不同的参与者, 参与者 k 针对 l 关于 x 的异议为一个二元偶 (C,y), 其中 C 为包含 k 而不包含 l 的联盟, 且在 R^C 中各参与者的收益分配向量 y 满足

$$y(C)=v(C),\ y_i>x_i,\ \forall\, i\in C. \tag{4}$$

令 (C,y) 为 k 针对 l 关于 x 的异议, 其反异议为一个二元偶 (D,z), 其中 D 为包含 l 不包含 k 的联盟, 且在 R^D 中各参与者的收益分配向量 z 满足

$$z(D)=v(D);$$
$$z_i>y_i,\ \forall\, i\in D\bigcap C;$$

$$z_i > x_i,\ \forall\, i \in D \setminus C. \tag{5}$$

一个异议如果没有反异议, 则称此异议是合理的, 合作博弈 (N, v) 的经典谈判集为如下集合:

$$M_l{}^{(i)} = M_l{}^{(i)}(N, v) = \\ \{x \in I | \text{任何参与者针对其他} \\ \text{参与者均没有合理的异议}\}.$$

定义 5　令 (N, v) 为经典合作博弈, x 为预转归, 则关于 x 的异议为二元偶 (C, y), 其中 C 为非空联盟, 且在 R^C 中各参与者的收益分配向量 y 满足

$$y(C) = v(C), \tag{6a}$$

$$y_i \geqslant x_i,\ \forall\, i \in C. \tag{6b}$$

在式 (6b) 中, 至少有一个不等式是严格大于的.

令 (C, y) 为关于 x 的异议, 其反异议为一个二元偶 (D, z), 其中 D 为一个非空联盟, 且在 R^D 中各参与者的收益分配向量 z 满足

$$z(D) = v(D); \tag{7a}$$

$$z_i \geqslant y_i,\ \forall\, i \in D \bigcap C; \tag{7b}$$

$$z_i \geqslant x_i,\ \forall\, i \in D \setminus C. \tag{7c}$$

在式 (7b) 中, 至少有一个不等式是严格大于的.

一个异议如果没有针对它的反异议存在, 则此异议称为合理的, 博弈 (N, v) 的 Mas-Colell 谈判集为如下集合:

$$\mathcal{MB} = \mathcal{MB}(N, v) = \\ \{x \in I | \text{没有非空联盟关于 } x \text{ 有合理异议}\}. \tag{8}$$

综上可知, 自从经典合作博弈的谈判集概念提出以来, 许多博弈论研究者致力于研究这一博弈解, 并探索了多种谈判集的定义[8-10], 为开展模糊合作博弈中的模糊谈判集解的研究提供了理论基础.

2.2　模糊谈判集

定义 6　针对一个收益分配向量 (即转归 x), 模糊联盟 s 关于 x 的超量为

$$e(s, x) = v(s) - \sum_{j \in \mathrm{car}(s)} s_j x_j,\ \forall\, s \leqslant e^N. \tag{9}$$

令 $t \leqslant e^N$ 为最大超量的最大模糊联盟, 则满足

$$e(t, x) = v(t) - \sum_{j \in \mathrm{car}(t)} t_j x_j \geqslant v(s) - \sum_{j \in \mathrm{car}(s)} s_j x_j = \\ e(s, x),\ \forall\, s \leqslant e^N,\ e(t, x) > e(s, x),\ \forall\, t < s.$$

定义 7　令 x 为模糊合作博弈 v 的一个收益分配向量, 现有两个参与者 k 和 l 可能对此分配向量有异议. 参与者 k 可能觉得自己所得收益太少, 而质疑 l 获利太多, 且 k 可以找到一个模糊联盟 s, 使得 $s \in \mathcal{F}^N$, $s_k > 0$, $s_l = 0$. 在 s 中, 各参与者的收益分配向量 y 的分量是 $\mathrm{car}(s)$ 中的成员, 同时满足

$$s_i y_i \geqslant s_i x_i,\ \forall\, i \in \mathrm{car}(s), \tag{10a}$$

$$\sum_{i \in \mathrm{car}(s)} s_i y_i = v(s). \tag{10b}$$

式 (10a) 中, 至少有一个严格大于不等式 (即 $s_i y_i > s_i x_i$) 成立, 且该二元偶 (y, s) 为参与者 k 针对 l 关于收益分配 x 的弱异议. 同样, 参与者 l 针对 k 的弱异议 (y, s) 可能会采取相应的抵制策略, 即 l 可以组织一个没有 k 参与的模糊联盟 t 和收益分配向量 z, $t \in \mathcal{F}^N$, $t_l > 0$, $t_k = 0$. 在 t 中, 各参与者收益分配向量 z 的分量是 $\mathrm{car}(t)$ 中的成员, 同时满足

$$t_i z_i \geqslant t_i x_i,\ \forall\, i \in \mathrm{car}(t) \backslash \mathrm{car}(s); \\ t_i(z_i - x_i) \geqslant s_i(y_i - x_i),\ \forall\, i \in \mathrm{car}(t) \bigcap \mathrm{car}(s); \\ \sum_{i \in \mathrm{car}(t)} t_i z_i = v(t). \tag{11}$$

可见, 在模糊联盟 t 中, 各参与者的收益至少等于他们参与在 s 中所获得的收益, 且对于那些同时又在 s 中的参与者, 其收益至少与参与在 s 中所得收益相等. 这样的二元偶 (z, t) 称为参与者 l 针对 k 的弱异议 (y, s) 的强反异议.

基于以上分析, 对 Mas-Colell 模糊谈判集 $MC_{\mathcal{F}}(v)$ 进行如下定义. 令模糊合作博弈 v 的一个收益分配向量 x 为谈判点, 如果对于每一对参与者 k 和 l, k 针对 l 关于收益分配向量 x 的任何弱异议 (y, s) 都要遭到 l 针对 k 的强反异议 (z, t), 则模糊合作博弈 v 的谈判点的全体称为 Mas-Colell 模糊谈判集, 即

$$MC_{\mathcal{F}}(v) = \\ \{x \in I^*(v) | x \text{的每个弱异议都存在强反异议}\}. \tag{12}$$

对于常规模糊合作博弈, 即使核心为空集, 模糊谈判集也含有核心之外的收益分配向量 $x(v)$, 谈判集的非空性表明了其收益分配方案的存在性[11-12]. 可见, Mas-Colell 模糊谈判集弥补了核心有时是空集的缺陷.

定义 8　令 (N, v) 为模糊合作博弈, $x \in R^N$ 为 (N, v) 的收益分配方案, 且 $k, l \in N$ 为参与者集合中不同的参与者. 集合 $\varGamma_{kl}(N)$ 定义为

$$\varGamma_{kl} = \varGamma_{kl}(N) = \\ \{\mathrm{car}(s) \subseteq \mathrm{car}(e^{N \backslash \{l\}}) | k \in \mathrm{car}(s)\},$$

$\varGamma_{kl}$ 即为包含参与者 k 而不包含 l 的模糊联盟的集合.

k 关于 l 在谈判点 x 的异议为二元偶 (y, p), 且 $\mathrm{car}(p) \in \varGamma_{kl}$, $y \in R^{\mathrm{car}(p)}$, 同时满足

$$\sum_{i \in \mathrm{car}(p)} p_i y_i = v(p), \\ p_i y_i > p_i x_i,\ \forall\, i \in \mathrm{car}(p). \tag{13}$$

如果二元偶 (y, p) 具有以上性质, 则称参与者

k 能够通过模糊联盟 p 反驳 l, 当且仅当超量 $e(s,x) = v(s) - \sum\limits_{i\in \mathrm{car}(s)} s_i x_i$ 严格为正时, 参与者 k 能够通过 $\mathrm{car}(s)\in \mathit{\Gamma}_{kl}$ 反驳 l.

参与者 k 针对 l 关于收益分配 x 的异议 (y,p) 的反异议为一个二元偶 (z,q), $\mathrm{car}(q)\in \mathit{\Gamma}_{kl}$, $z\in R^{\mathrm{car}(q)}$, 同时满足

$$\sum_{i\in \mathrm{car}(q)} q_i z_i = v(q),\ z_{\mathrm{car}(q)} \geqslant x_{\mathrm{car}(q)},$$
$$z_{\mathrm{car}(p)\cap \mathrm{car}(q)} \geqslant y_{\mathrm{car}(p)\cap \mathrm{car}(q)}. \tag{14}$$

如果 (z,q) 具有这些性质, 则称 l 能够通过模糊联盟 q 反驳 (y,p), 当且仅当

$$e(q,x) \geqslant \sum_{i\in \mathrm{car}(p)\cap \mathrm{car}(q)} (p\bigwedge q)_i y_i - \sum_{i\in \mathrm{car}(p)\cap \mathrm{car}(q)} (p\bigwedge q)_i x_i$$

时, 参与者 l 能够通过 $\mathrm{car}(q)\in \mathit{\Gamma}_{kl}$ 反驳 (y,p).

模糊合作博弈 (N,v) 的 semireactive 预谈判集 $M_{\mathcal{F}}^{sr^*}(v)$ 为所有预转归 $x\in I^*(v)$ 的集合, 且对于任意 $\mathrm{car}(q)\in \mathit{\Gamma}_{kl}$ 的任何不同参与者 $(k,l)\in N\times N$ 满足以下条件: 存在 $\mathrm{car}(p)\in \mathit{\Gamma}_{kl}$ 满足任意 k 针对 l 通过模糊联盟 p 的异议, l 通过模糊联盟 q 都能够进行反驳.

模糊合作博弈 (N,v) 的 semireactive 模糊谈判集 $M_{\mathcal{F}}^{sr}(v)$ 定义为 semireactive 预谈判集个体理性元素集, 即

$$M_{\mathcal{F}}^{sr}(v) = M_{\mathcal{F}}^{sr^*}(v)\bigcap I(v). \tag{15}$$

定义 9 令 x 为模糊合作博弈的分配方案, 则参与者 k 针对 l 关于 x 的异议为一个二元偶 (y,q), 其中 $q\in \mathcal{F}^N$, $q_k>0$, $q_l=0$, 且分配向量 y 的分量是 $\mathrm{car}(q)$ 中的成员, 同时满足

$$q_i y_i > q_i x_i,\ \forall\, i\in \mathrm{car}(q);$$
$$\sum_{i\in \mathrm{car}(q)} q_i y_i = v(q). \tag{16}$$

对于所有的 $\mathrm{car}(s)\subseteq N$ 和 $u\in R^N$, 有

$$u(s) = \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j u_j.$$

进一步称参与者 k 关于分配方案 x 针对 l 有一个合理的异议, 如果 $\mathrm{car}(s)$ 的每 1 个子集包含 l 而不包含 k, 则 k 针对 l 有一个异议 (y,q), 且 x 使得不存在分配向量 z 在 $\mathrm{car}(s)$ 中索引, 满足

$$s_i z_i \geqslant s_i y_i,\ \forall\, i\in \mathrm{car}(s)\bigcap \mathrm{car}(q);$$
$$s_i z_i \geqslant s_i x_i,\ \forall\, i\in \mathrm{car}(s)\backslash \mathrm{car}(q);$$
$$\sum_{i\in \mathrm{car}(s)} s_i z_i = v(s). \tag{17}$$

模糊联盟的 reactive 模糊谈判集由以下集合给定:

$$M_{\mathcal{F}}^{r}(v) = \{x\in I(v)|\text{对于有序二元偶}\ (k,l),$$
$$k\ \text{针对}\ l\ \text{不存在合理异议}\}. \tag{18}$$

在 reactive 模糊谈判集的定义中, 反对方允许保持他/她异议的特性直到被反对方宣布他/她的抵制联盟, 这样反对方便能够对倾向于他/她的对手做出反应, 容易提出合理的异议. 如果参与者 i 能证实参与者 j 不支持任何联盟包含参与者 j 而不包含 i, 直到保持他当前的收益 $q_j x_j$, 则参与者 i 针对参与者 j 关于分配方案 x 有一个合理的异议; 相反, 如果参与者 j 能支持至少一个模糊联盟, 包含 j 但不包含 i, 保持其当前的收益, 即无论如何参与者 i 形成其模糊联盟 $q\in \mathcal{F}^N$, 且分配由此产生的收益, 则参与者 i 针对参与者 j 关于分配方案 x 没有合理异议. 在后者情况下, 参与者 j 用来保持其当前收益的模糊联盟称为参与者 j 的模糊保护联盟.

推论 1 在模糊合作博弈 v 中, 有

$$C(v)\subseteq M_{\mathcal{F}}^{r}(v)\subseteq M_{\mathcal{F}}^{sr}\subseteq MC_{\mathcal{F}}(v).$$

如果某集合 $\mathcal{M}$ 与模糊合作博弈 v 中的任一模糊谈判集相等, 则对于任意 $\alpha>0$ 和 $\beta\in R^N$, 集合 $\alpha\mathcal{M}+\beta$ 与博弈 $\alpha v+\beta$ 的模糊谈判集解相等.

3 模糊谈判集的等价性

对模糊谈判集的等价性质进行探讨, 其性质的前提为: 1) 若对于所有的 i 存在 $s_i {x'}_i > t_i x_i$, 则收益分配 $\{x', s\}$ 优超于 $\{x,t\}$; 2) 即使收益分配 $\{x,s\}$ 无法优超于其他任何分配模式, 该收益分配 $\{x,s\}$ 仍是有效的.

如果一个模糊合作博弈既是单调递增的, 又是一个模糊网络博弈, 则其模糊谈判集和核心具有等价性质. 基于网络博弈[10], 可以给出模糊网络博弈和模糊谈判集的等价性质.

定义 10 令 V 为结点的集合, A 为弧的集合, 则有向模糊网络记为 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u(V,A;su)$, 其中 $s_a u_a$ 表示以相应参与度 s_a 通过弧 a 从单位流中所获得的实际收益, $a\in A$, $s\in \mathcal{F}^A$, $0\leqslant s_a\leqslant 1$. 令 $s', t'\in V$ 分别为 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 的单源点和汇点, 同时假设每条弧有一个单位流容量, 如果 $f_j=1$, 对于每一个 $j\in A$ 同时每条弧被所有模糊联盟的参与者以相应参与度所拥有, 则称模糊网络 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 为简单的, 其中 $s_a u_a$ 可能是负的 (代表流的成本), 也可能是正的 (代表相应的收益). 这样的网络 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 称为简单模糊网络.

假设模糊网络 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 的每条弧被所有参与者以相应参与度所拥有, 则热点问题便是如何分配所有参与者通过最优流所获得的收益.

定义 11 令 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u = (V,A;su)$ 为简单模糊网络, 对于 $\mathrm{car}(s)\subseteq \mathrm{car}(e^A)$, $s, e^A\in \mathcal{F}^A$ (即 $[0,1]^A$), 用 $\mathcal{G}_s^u$

表示由 $\mathrm{car}(s)$ 中的弧所组成的子网络, $v(s)$ 表示从 s' 到 t' 最优流的最优收益 (即关于目标值向量 $(s_a u_a;\ a \in \mathrm{car}(s))$ 的最大值)). 显然, 集函数 v 和向量 e^A 便定义了一个关于 $\mathrm{car}(e^A)$ 的模糊合作博弈, 记为 $\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u) = (e^A; v)$, 即关于简单模糊网络 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 的博弈模型简单模糊网络博弈.

针对 $x \in R^A$, 令 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}$ 为在 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 中用 $u-x$ 代替 u 所得到的简单模糊网络, 则在模糊网络博弈 $\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u) = (e^A; v)$ 中, 关于核心 $C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$ 中的分配向量 x 有以下命题成立.

命题 1　令 f 为 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 中任意最优流, $x \in R_+^A$ 满足 $\sum\limits_{j\in \mathrm{car}(e^A)} x_j = v(e^A)$, 则 $x \in C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$ 当且仅当 f 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}$ 中最优的, 最优值为 0.

证明　首先对目标函数 f 进行变换. 新目标函数的值为

$$f(u-x) = \sum_{j\in \mathrm{car}(e^A)} f_j(u_j - x_j) = \sum_{j\in \mathrm{car}(e^A)} f_j(u_j) - \sum_{j\in \mathrm{car}(e^A)} f_j(x_j) = v(e^A) - \sum_{j\in \mathrm{car}(e^A)} f_j(x_j).$$

假设 $x \in C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$, 由条件 $x_j \geqslant 0$, $f_j = 1$, 可得

$$\sum_{j\in \mathrm{car}(e^A)} f_j(x_j) = \sum_{j\in \mathrm{car}(e^A)} x_j = v(e^A).$$

如果关于模糊网络 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}$ 的流 f 值为零, 则 f 在该网络中为最优的, 当且仅当每一个模糊联盟 s ($s \in \mathcal{F}^A$) 满足 $\sum\limits_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j(u_j - x_j) \leqslant 0$, 即

$$\sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j x_j \geqslant \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j u_j = v(s),\ \forall\, s \in \mathcal{F}^A.$$

因为 f 对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}$ 而言是最优的, $f_j = 1$, 所以有

$$\sum_{j\in \mathrm{car}(s)} f_j s_j u_j = \sum_{i\in \mathrm{car}(s)} s_j u_j = v(s).$$

最后一个条件满足当且仅当 $x \in C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$. □

令 v^* 为简单模糊网络博弈 $\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x})$ 的特征函数, 给出如下引理.

引理 1　对于 $x \in R_+^A$, 令 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}$ 为 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u$ 中用 $u-x$ 代替 u 得到的简单模糊网络博弈, 则针对 $\forall\, t \leqslant e^A$, $t \in \mathcal{F}^A$, 有

$$\max_{s\leqslant t}\Big\{v(s) - \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j x_j\Big\} = v^*(t). \tag{19}$$

证明　假设等式 (19) 左边成立, 令 $s = r$, 因为 $x \geqslant 0$, 每条弧有单位容量, 假设 $\mathrm{car}(r)$ 中所有弧为 r 所形成子图的最优流均有单位流, 所以有

$$\max_{s\leqslant t}\Big\{v(s) - \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j x_j\Big\} = v(r) - \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j x_j = \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j u_j - \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j x_j = \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j(u_j - x_j) \leqslant v^*(t).$$

下面证明不等式的右边. 令 f 为 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}$ 中的最优流, r 为拥有 f 单位流的弧所组成的模糊联盟, 则有

$$v^*(t) = \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j u_j - \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j x_j \leqslant v(r) - \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j x_j \leqslant \max_{s\leqslant t}\Big\{v(s) - \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j x_j\Big\}. \ \square$$

对于简单模糊网络博弈, 有如下定理成立.

定理 1　对于任意简单模糊网络博弈 $\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u)$, 其模糊谈判集 $MC_{\mathcal{F}}(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$ 与核心 $C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$ 相等.

证明　因为 $C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u)) \subseteq MC_{\mathcal{F}}(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$, 只需证明 $MC_{\mathcal{F}}(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u)) \subseteq C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$ 即可. 利用反证法进行证明, 假设存在 $x \in MC_{\mathcal{F}}(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$, 满足 $x \notin C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$, 由命题 1 可知 $v^*(e^A) > 0$, 由引理 1 可知

$$v^*(e^A) = \max_{s\leqslant e^A}\Big\{v(s) - \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j x_j\Big\} > 0.$$

令 $w \in C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x}))$, 因为 $v^*(e^A) > 0$, 存在弧 $i \in \mathrm{car}(e^A)$ 满足 $w_i > 0$, 结合 $w \in C(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{u-x})$ 和 $0 \leqslant s_j \leqslant 1$, 有

$$v^*(e^A) = w(e^A) = \sum_{i\in A} w_i = \sum_{j\in A\backslash\{i\}} w_j + w_i \geqslant \sum_{j\in \mathrm{car}(s),\ s\leqslant e^{A\backslash\{i\}}} s_j w_j + w_i \geqslant v^*(e^{A\backslash\{i\}}) + w_i > v^*(e^{A\backslash\{i\}}),$$

即

$$v^*(e^A) > v^*(e^{A\backslash\{i\}}). \tag{20}$$

在模糊网络博弈 $\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u)$ 中, i 被包含在每一个 $\mathrm{car}(s)$ 中, 有

$$e(s,x) = v(s) - \sum_{j\in \mathrm{car}(s)} s_j x_j = v^*(e^A).$$

实际上, 如果 $i \notin \mathrm{car}(s)$, 则由引理 1 和式 (20) 可知

$$e(s,x) \leqslant \max_{r\leqslant e^{A\backslash\{i\}}} e(r,x) = \max_{r\leqslant e^{A\backslash\{i\}}}\Big\{v(r) - \sum_{j\in \mathrm{car}(r)} r_j x_j\Big\} = v^*(e^{A\backslash\{i\}}) < v^*(e^A).$$

令 s^* 为最大模糊联盟, 有

$$e(s^*,x) = v(s^*) - \sum_{i\in \mathrm{car}(s^*)} s_i^* x_i = v^*(e^A).$$

显然, $i \in \mathrm{car}(s^*)$. 同时由于 $v(e^A) - \sum\limits_{i\in A} x_i = 0$, $s^* \neq e^A$, 令 $j \in \mathrm{car}(e^A\backslash s^*)$, 则在 $\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u)$ 中关于 x 通过模糊联盟 s^*, i 反对 j 有一个异议, 因为 $x \in MC_{\mathcal{F}}(\Gamma(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^u))$, j 应该有一个模糊联盟, 记为 q, 满足 $j \in \mathrm{car}(q)$, $i \notin$

$\mathrm{car}(q)$. 这样, 对于任意参与者 i 反对 j 的异议 (y,s), 在 q 上均存在一分配向量 z, 满足式 (11).

可以确定, $\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)\neq\varnothing$. 如果 $\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)=\varnothing$, 因为

$$x\notin C(\Gamma(\mathcal{G}^u_{\mathcal{F}})),\ e(q,x)=v(q)-\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j\geqslant 0,$$

则有

$$\begin{aligned}&e(s^*\bigvee q,x)=\\&v(s^*\bigvee q)-\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\cup\mathrm{car}(q)}(s^*\bigvee q)_jx_j\geqslant\\&v(s^*)+v(q)-\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)}s^*_jx_j-\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j=\\&e(s^*,x)+e(q,x)\geqslant e(s^*,x).\end{aligned}$$

这与 s^* 为最大模糊联盟矛盾, 因此有

$$\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)\neq\varnothing,\ e(s^*,x)>e(q,x)\geqslant 0,\quad(21)$$

其中严格大于不等式可由 $i\notin\mathrm{car}(q)$ 得出.

令 $m^1=|\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)|$, 构造分配向量 y, 其中

$$s^*_ky_k=\begin{cases}s^*_kx_k+\dfrac{1}{m^1}e(s^*,x),\ k\in\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q);\\ s^*_kx_k,\ k\in\mathrm{car}(s^*)\backslash\mathrm{car}(q).\end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)}s^*_jy_j=\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)}s^*_jx_j+\\&\frac{|\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)|}{m^1}e(s^*,x)+\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\backslash\mathrm{car}(q)}s^*_jx_j=\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)}s^*_jx_j+e(s^*,x)=\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)}s^*_jx_j+v(s^*)-\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)}s^*_jx_j=v(s^*).\end{aligned}$$

显然, (y,s^*) 为 i 反对 j 的异议. 因为 q 为 j 反对 i 的模糊联盟, 在 q 上存在一个分配向量 z, 结合式 (10), (21) 和 $e(q,x)$ 的定义, 有式 (11) 成立, 进而有

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jz_j=\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)}q_jz_j+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)\backslash\mathrm{car}(s^*)}q_jz_j\geqslant\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)}q_jz_j+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)\backslash\mathrm{car}(s^*)}q_jx_j=\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)}q_j(z_j-x_j)+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j\geqslant\\&\sum_{j\in\mathrm{car}(s^*)\bigcap\mathrm{car}(q)}s^*_j(y_j-x_j)+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j=\\&e(s^*,x)+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j>e(q,x)+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j=\\&v(q)-\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j+\sum_{j\in\mathrm{car}(q)}q_jx_j=v(q).\end{aligned}$$

这与分配向量 z 是模糊联盟 q 可行的分配方案这一必要条件相矛盾, 即与定义 7 中式 (11) 第 3 式相矛盾, 所以反证成立. □

定理 1 证明了模糊网络博弈的 Aubin 核心与 Mas-Colell 模糊谈判集相等, 即针对模糊网络博弈, 模糊谈判集解与核心解对应的收益分配方案是等价的. 模糊谈判集是一个非空集合, 表明了模糊网络博弈的核心非空, 即模糊网络博弈一定存在最优的收益分配方案.

4 算例分析

某信息化平台产品各提供商, 为了追求整体经济利益最大化, 充分利用自身核心能力组建联盟进行优化整合, 联盟参与者优化组合过程可以视为 n 人模糊合作博弈形成过程, 各参与者收益分配问题可视为其博弈求解问题. 各提供商通常会围绕收益分配问题组建联盟, 这种组建联盟的过程其实也是一个谈判过程. 为了给提供商联盟的谈判提供合理化的方案, 可以利用本文的模糊谈判集解提高谈判的效率, 以使谈判的各参与者集中注意力解决核心问题.

考虑 $b_1\sim b_6$ 六家企业进行合作, 开展新型信息化综合集成项目研发工作. 为了成功完成该项目, 需要研发 24 项关键技术, 包括统一模型产品数字化、云服务产品全生命周期协同研制、飞航武器系统数字样机成熟度、三维装配工艺集成、安全管理系统、信息化决策分析等. 结合时间、成本、核心设备和技术互补等因素, 6 家企业通过合作才能保证在合同期内使 24 项关键技术攻关完成. 此外, 某两家企业组建联盟可满足 12 项关键技术的攻关能力, 而某 3 家企业组建联盟也只能满足 12 项关键技术的攻关能力, 其余企业组建联盟因技术协作问题导致零贡献. 构建以下模糊合作博弈模型: 参与者集合 $N=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$, 相应参与度为 1, 特征函数基于关键技术项的攻关能力, 在此博弈中定义特征函数为

$$\begin{aligned}&v(e^{\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}})=24,\\&v(e^{\{b_1,b_3\}})=v(e^{\{b_4,b_6\}})=12,\\&v(e^{\{b_1,b_2,b_3\}})=v(e^{\{b_1,b_3,b_5\}})=12,\\&v(e^{\{b_2,b_4,b_6\}})=v(e^{\{b_4,b_5,b_6\}})=12,\end{aligned}$$

其余联盟特征函数值均为 0. 根据核心的定义可得

$$C(v)=\{(x_1',x_2',x_3',x_4',x_5',x_6')|x_i'\geqslant 0,$$

$x_1^{'}+x_3^{'}+x_4^{'}+x_6^{'}=24, x_2^{'}=x_5^{'}=0\}$.

针对以上核心中的分配, 任何参与者均无弱异议, 因此核心 $C(v)$ 是模糊谈判集 $MC_{\mathcal{F}}(v)$ 的子集, 即 $C(v)\subseteq MC_{\mathcal{F}}(v)$, 此外, 分配向量 $x=(4,4,4,4,4,4)\in MC_{\mathcal{F}}(v)$, 原因是此分配可以组成弱异议的模糊联盟只有 $e^{\{b_1,b_3\}}$ 和 $e^{\{b_4,b_6\}}$, 但是模糊联盟 $e^{\{b_1,b_3\}}$ 的弱异议遭到了 $e^{\{b_2,b_4,b_6\}}$ 和 $e^{\{b_4,b_5,b_6\}}$ 的强反异议, 模糊联盟 $e^{\{b_4,b_6\}}$ 异议遭到了 $e^{\{b_1,b_2,b_3\}}$ 和 $e^{\{b_1,b_3,b_5\}}$ 的强反异议.

基于以上分析, 模糊联盟参与者的谈判规则和建议可以分为两部分: 1) 参与者结合 x 的分配模式, 组建成模糊全联盟结构 $e^{\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}}$ 进行谈判; 2) 参与者结合核心的分配模式, 分别组建 $e^{\{b_1,b_3\}}$ 和 $e^{\{b_4,b_6\}}$ 两个模糊联盟进行谈判. 若根据组建的模糊全联盟结构 $e^{\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}}$ 进行谈判, 则许多其他收益分配规则可能包含于模糊谈判集 $MC_{\mathcal{F}}(v)$ 中. 如果参与者 b_3 针对参与者 b_5 通过模糊联盟 $e^{\{b_1,b_2,b_3\}}$ 存在一个弱异议, 则虽然参与者 b_5 自己无强反异议, 但他能够借助参与者 b_4 或 b_6 提出相应的强反异议. 针对各种模糊联盟结构参与者 b_5 看似贡献最小, 但由于 $v(e^{\{b_1,b_3\}})=v(e^{\{b_4,b_6\}})=12$, $v(e^{\{b_1,b_2,b_3\}})=12$, $v(e^{\{b_2,b_4,b_6\}})=12$, 其余模糊合作联盟的贡献为 0, 参与谈判的各参与者要想完成既定的研发目标, 最好组建模糊全联盟结构, 而通过这一特殊性质, 参与者 b_5 通常能够获得相对较高的收益.

如果直接将各联盟的收益按照非模糊谈判集方法 (如传统 Mas-Colell 谈判集法) 分配给联盟参与者, 则参与者 b_5 得到的收益将小于组建模糊全联盟结构 $e^{\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}}$ 所能得到的收益, 因此他可能会采取相应的抵制策略. 本文提出的 Mas-Colell 模糊谈判集方法优化过的分配规则, 允许参与者以一定参与度参与联盟活动, 保证了每个参与者个体理性, 即 $x_i^{'}\geqslant v(e^{b_i})$, 因此能够得到参与者的拥护, 且能够实现整体最优.

5 结　论

本文基于 Aubin 和 Mas-Colell 思想, 将经典合作博弈谈判集解拓展到模糊合作博弈中, 对模糊谈判集解进行了刻画. 将网络合作博弈推广为具有模糊联盟的网络合作博弈, 并探讨其相关性质, 证明了在模糊网络合作博弈中, Aubin 核心与 Mas-Colell 模糊谈判集解等价, 表明了模糊网络博弈的核心非空, 即最优收益分配方案的存在性. 最后给出模糊谈判集的应用算例. 下一步的研究方向是建立经典合作博弈谈判集解的其他扩展模型, 并且应用于资源和收益分配领域.

参考文献(References)

[1] 李书金, 郦晓宁. 模糊联盟的 Shapley 值与稳定性[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(8): 1524-1531.
(Li S J, Li X N. The Shapley value and stability for fuzzy coalition[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(8): 1524-1531.)

[2] 李翠, 刘小冬. 模糊合作博弈及其广义核心解的应用研究[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(6): 1372-1376.
(Li C, Liu X D. Cooperative fuzzy games and application research of generalized cores[J]. Computer Engineering and Design, 2010, 31(6): 1372-1376.)

[3] 刘天虎, 许维生, 吴启迪. 基于 TU 动态模糊联盟合作博弈的核心及谈判集[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(3): 16-19.
(Liu T H, Xu W S, Wu Q D. Cores and bargaining sets of cooperative games based on TU dynamic fuzzy alliance[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(3): 16-19.)

[4] Aubin J P. Cooperative fuzzy games[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 1(6): 1-13.

[5] Tamás Solymosi. Bargaining sets and the core in partitioning games[J]. Central European J of Operations Research, 2008, 10(16): 425-440.

[6] Maschler M. The bargaining sets, kernel and nucleolus[J]. Handbook of Game Theory, Elsevier Science Publishers, 1992, 8(1): 591-667.

[7] Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, Stef Tijs. Models in cooperative game theory[M]. Nijmegen: Springer, 2008: 83-89.

[8] Ron Holzman. The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets[J]. Int J Game Theory, 2001, 12(29): 543-553.

[9] Peter Sudhölter, Jos A M Potters. The semireactive bargaining set of a cooperative game[J]. Int J of Games Theory, 2001, 30(1): 117-139.

[10] Daniel Granot, Frieda Granot, Weiping R Zhu. The reactive bargaining set of some flow games and of superadditive simple games[J]. Int J of Game Theory, 1997, 26(2): 207-214.

[11] Bezalel Peleg, Peter Sudhölter. On the non-emptiness of the Mas-Colell bargaining set[J]. J of Mathematical Economics, 2005, 41(8): 1060-1068.

[12] Bohra R. An existence theorem for a bargaining set[J]. J of Mathematical Economics, 1991, 20(1): 19-34.

(责任编辑: 郑晓蕾)