第 27 卷 第 5 期
Vol. 27 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 5 月
May 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 05-0773-04

区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用研究

孟 伟[1,2], 刘思峰[1], 曾 波[1,2]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 重庆工商大学 商务策划学院，重庆 400067)

摘 要: 由于区间灰数运算体系不完善, 灰数间的代数运算将导致结果灰度增加, 难以有效构建基于"区间灰数"的灰色预测模型. 对此, 通过将区间灰数进行标准化处理, 分解成基于实数形式的"白部"和"灰部"两个部分; 然后分别对"白部"和"灰部"建立模型, 再推导并还原得到区间灰数预测模型; 最后, 将该模型应用于城市外来工数量的预测, 预测效果验证了所提出模型的有效性及实用性.

关键词: 灰色系统理论；区间灰数预测模型；区间灰数标准化；城市外来工数量预测

中图分类号: N941.5 **文献标识码:** A

Standardization of interval grey number and research on its prediction modeling and application

MENG Wei[1,2], *LIU Si-feng*[1], *ZENG Bo*[1,2]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；2. College of Business Planning，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China．Correspondent：MENG Wei，E-mail：mongvi@126.com)

Abstract: With the limitations of algorithm rule of interval grey numbers, the algebraic operations between interval grey numbers will lead the results to be more and more greyer, so it is difficult to effectively build a grey prediction model based on interval grey numbers. Therefore, the interval grey number is divided into "white part" and "grey part" based on real number form by standardizing interval grey numbers, and grey prediction models are established. Then the prediction model of the primary interval grey number is deduced and reverted. Finally, this model is used to forecast the number of urban migrant workers and obtain an excellent effect, and the results show the effectiveness and practicability of the proposed model.

Key words: grey system theory；prediction model of interval grey number；standardization of interval grey number；prediction of the number of urban migrant workers

1 引 言

灰色预测模型是灰色系统理论的重要组成部分, 主要针对现实世界中大量存在的灰色不确定性预测问题, 利用少量有效数据和灰色不确定性数据, 通过序列的累加生成, 揭示系统的未来发展趋势. 灰色系统理论自建立以来, 无论在理论研究还是在应用领域, 都取得了长足的发展, 逐渐形成了以灰色预测模型为核心的理论体系, 成功地解决了生产和生活中的大量实际问题[1-2].

然而, 由于目前灰代数运算体系尚不完善, 灰数间的代数运算将导致结果灰度增加, 这加大了构建灰数预测模型的难度, 使得目前灰色预测模型的现有研究成果大部分以"实数"为建模前提, 研究的重心主要集中在如何提高灰色预测模型的模拟及预测精度方面[3-6], 而对于以"灰数"为建模对象的灰色预测模型的构建机理、模型性质等问题研究较少. 关于区间灰数预测模型的研究, 文献 [7] 提出了基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型, 通过计算灰数层的面积以及灰数层中位线中点的坐标, 在不损失已有灰数信息的前提下, 将区间灰数序列转换成实数序列; 然后, 建立了一种基于 GM(1,1) 的区间灰数预测模型. 文献 [8-9] 对区间灰数预测模型的构造进行了深入的研究, 文献 [10] 讨论了白化权函数已知条件下的区间灰数预测模型.

收稿日期: 2010-11-01; **修回日期:** 2011-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70901041, 90924022, 70840012)；教育部人文社会科学青年基金项目(12YJC630140)；重庆市教委人文社科项目项目(11SKU11).

作者简介: 孟伟 (1979−), 男, 讲师, 博士生, 从事系统工程、灰色系统理论等研究；刘思峰 (1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

文献 [11] 通过将区间灰数进行标准化处理, 将区间灰数分解成基于实数形式的"白部" 和"灰部"两个部分, 并将其应用于灰矩阵形式的零和矩阵博弈,取得了较好的效果. 受此启发, 本文通过分别构建区间灰数序列"白部"序列和"灰部"序列的 DGM(1,1) 模型, 进而推导、还原得到区间灰数预测模型, 并将其应用于构建具有"小样本、贫信息"特征的城市外来工数量的预测模型.

2 区间灰数的标准化及区间灰数序列的白化处理

命题 1 设区间灰数 $\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]$, $b_k\geqslant a_k$, $k=1,2,\cdots$, 可将 $\otimes(t_k)$"等价"表示为如下形式:

$$\otimes(t_k)=a_k+c_k\mu. \tag{1}$$

其中: $c_k=b_k-a_k$, $\mu\in[0,1]$.

证明

$$\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=[a_k,b_k]+[a_k,a_k]-[a_k,a_k]\Rightarrow$$
$$[a_k,b_k]=[a_k,a_k]+([a_k,b_k]-[a_k,a_k])\Rightarrow$$
$$[a_k,b_k]=a_k+(b_k-a_k)\times[0,1],$$

即有

$$\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=$$
$$a_k+(b_k-a_k)\times[0,1]=a_k+c_k\mu.$$

其中: $c_k=b_k-a_k$, $\mu\in[0,1]$. □

定义 1 式 (1) 被称为区间灰数 $\otimes(t_k)$ 的标准形式, 通过标准形式表达的区间灰数, 称为标准区间灰数. 其中: a_k 称为标准化区间灰数 $\otimes(t_k)$ 的"白部", c_k 称为"灰部".

定义 2 设区间灰数序列

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n)).$$

其中: $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}=1$, $\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]$, $k=1,2,\cdots,n$. 将 $X(\otimes)$ 中的所有区间灰数表示成形如式 (1) 的标准形式, 则标准形式中所有"白部"所构成的序列称为 $X(\otimes)$ 的白部序列, 所有"灰部"构成的序列称为 $X(\otimes)$ 的灰部序列, 即

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n))\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}A_\otimes=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\\C_\otimes=(c_1,c_2,\cdots,c_n).\end{cases}$$

这里

$$\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=a_k+c_k\mu,\ k=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

3 基于区间灰数标准化形式的区间灰数预测模型

基于区间灰数标准化形式的区间灰数预测模型, 其基本思路是: 首先, 将区间灰数序列中的所有灰元标准化, 分别得到与区间灰数序列等价的"白部序列"和"灰部序列"; 然后, 分别构建"白部序列"和"灰部序列"的 DGM(1,1) 模型[12], 实现对未知区间灰数"白部"和"灰部"的预测; 最后, 以区间灰数的"白部"和"灰部"为基础, 还原得到区间灰数的上界和下界的预测模型, 从而实现区间灰数的预测.

3.1 "白部序列" DGM(1,1) 模型的构建

根据定义 2 及式 (2) 可知

$$X(\otimes)=(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\cdots,\otimes(t_n)),$$

白部序列为 $A_\otimes=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 其 1 次累加生成序列为 $A_\otimes^{(1)}=(a_1^{(1)},a_2^{(1)},\cdots,a_n^{(1)})$. 其中 $a_k^{(1)}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$, $k=1,2,\cdots,n$. 构建的 DGM(1,1) 模型为

$$\hat a_{k+1}^{(1)}=\beta_{1\_a}\hat a_k^{(1)}+\beta_{2\_a}. \tag{3}$$

其中: 若 $\hat\beta_{\_a}=(\beta_{1\_a},\beta_{2\_a})^{\mathrm T}$ 为参数列, 且

$$Y_{\_a}=\begin{bmatrix}a_2^{(1)}\\a_3^{(1)}\\\vdots\\a_n^{(1)}\end{bmatrix},B_{\_a}=\begin{bmatrix}a_1^{(1)}&1\\a_2^{(1)}&1\\\vdots&\vdots\\a_{n-1}^{(1)}&1\end{bmatrix},$$

则灰色微分方程 $\hat a_{k+1}^1=\beta_{1\_a}\hat a_k^1+\beta_{2\_a}$ 中参数的最小二乘估计为 $\hat\beta_{-a}=(B_{\_a}{}^{\mathrm T}B_{\_a})^{-1}B_{\_a}{}^{\mathrm T}Y_{\_a}$.

定理 1 设 $B,Y,\hat\beta$ 如上所述, 取 $\hat a_1^{(1)}=a_1$, 有

$$\hat a_{k+1}^{(1)}=\beta_{1\_a}^k a_1+\frac{1-\beta_{1\_a}^k}{1-\beta_{1\_a}}\beta_{2\_a},$$
$$k=1,2,\cdots,n-1, \tag{4}$$

还原值为

$$\hat a_{k+1}=\hat a_{k+1}^{(1)}-\hat a_k^{(1)}=(a_1(\beta_{1\_a}-1)+\beta_{2\_a})\,\beta_{1\_a}^{k-1}. \tag{5}$$

3.2 "灰部序列" DGM(1,1) 模型的构建

与"白部序列" DGM(1,1) 模型的构建类似, 可构建"灰部序列"的 DGM(1,1) 模型, 其最终还原值为

$$\hat c_{k+1}=\hat c_{k+1}^{(1)}-\hat c_k^{(1)}=(c_1(\beta_{1\_c}-1)+\beta_{2\_c})\,\beta_{1\_c}^{k-1}. \tag{6}$$

其中

$$\hat\beta_{\_c}=(\beta_{1\_c},\beta_{2\_c})^{\mathrm T},$$

$$Y_{\_c}=\begin{bmatrix}c_2^{(1)}\\c_3^{(1)}\\\vdots\\c_n^{(1)}\end{bmatrix},\ B_{\_c}=\begin{bmatrix}c_1^{(1)}&1\\c_2^{(1)}&1\\\vdots&\vdots\\c_{n-1}^{(1)}&1\end{bmatrix}.$$

灰色微分方程 $\hat c_{k+1}^1=\beta_{1\_c}\hat c_k^1+\beta_{2\_c}$ 中参数的最小二乘估计为 $\hat\beta_{-c}=(B_{\_c}{}^{\mathrm T}B_{\_c})^{-1}B_{\_c}{}^{\mathrm T}Y_{\_c}$. 详细的推导过程从略.

3.3 基于标准区间灰数的灰数预测模型的推导

由命题 1 可知

$$\otimes(t_k)\in[a_k,b_k]=a_k+c_k\mu.$$

根据区间灰数"白部"预测模型 (5) 及"灰部"的灰

色预测模型 (6), 可作如下推导:

$$\begin{cases}\hat{a}_{k+1}=(a_1(\beta_{1\_a}-1)+\beta_{2\_a})\,\beta_{1\_a}^{k-1},\\ \hat{c}_{k+1}=(c_1(\beta_{1\_c}-1)+\beta_{2\_c})\,\beta_{1\_c}^{k-1},\\ \hat{c}_{k+1}=\hat{b}_{k+1}-\hat{a}_{k+1}.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\hat{a}_{k+1}=(a_1(\beta_{1\_a}-1)+\beta_{2\_a})\,\beta_{1\_a}^{k-1},\\ \hat{b}_{k+1}=(c_1(\beta_{1\_c}-1)+\beta_{2\_c})\,\beta_{1\_c}^{k-1}+\hat{a}_{k+1}.\end{cases}$$

即

$$\hat{\otimes}(t_k)\in[\hat{a}_k,\hat{b}_k]=$$
$$[(a_1(\beta_{1\_a}-1)+\beta_{2\_a})\,\beta_{1\_a}^{k-1},$$
$$(c_1(\beta_{1\_c}-1)+\beta_{2\_c})\,\beta_{1\_c}^{k-1}+\hat{a}_{k+1}].$$

4 构建城市外来工数量的区间灰数预测模型

工业和服务业是城市吸纳外来工容量的原始动力, 是驱动外来人员城市就业的最根本因素. 但各产业仅为外来工城市就业提供了可能的劳动机会, 而城市合理吸收外来工的数量, 还受到诸如城市住房、城市教育、城市医疗及城市治安等多种因素的影响和制约. 这些影响因素中的任何一个环节出现问题, 均可能造成城市的社会经济紊乱, 以及外来工自身境况的恶化. 因此, 构建合理的城市外来工数量预测模型, 对各级政府部门制订政策提供参考依据和借鉴, 具有十分重要的意义.

由于影响城市外来工的就业因素构成复杂 (“灰因”), 难以获得准确的大样本统计数据 (“灰果”), 对这类兼具“贫信息”、“不确定”特征的系统, 传统预测方法均难以构建合理的预测模型. 而具有小样本建模特点的传统灰色预测模型及其衍生模型, 其建模对象局限于“实数”, 适用于“灰因白果”系统, 对“灰因灰果”系统无能为力. 本文通过对城市外来工数量的区间灰数进行标准化处理, 然后分别构建白部序列和灰部序列的灰色预测模型, 最终实现城市外来工数量的模拟及预测. 设某市 2003 ∼ 2009 年的外来工数量如表 1 所示.

表 1 某市 2003 ∼ 2009 年外来工数量 万人

参数	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
灰数	$\otimes(t_1)$	$\otimes(t_2)$	$\otimes(t_3)$	$\otimes(t_4)$	$\otimes(t_5)$	$\otimes(t_6)$	$\otimes(t_7)$
人数	[49,58]	[58,70]	[75,88]	[89,103]	[114,132]	[135,155]	[161,183]

由表 1 可知, 某市 2003∼2009 年外来工数量的区间灰数序列为

$$X(\otimes)=$$
$$(\otimes(t_1),\otimes(t_2),\otimes(t_3),\otimes(t_4),\otimes(t_5),\otimes(t_6),\otimes(t_7))=$$
$$([49,58],[58,70],[75,88],[89,103],$$
$$[114,132],[135,155],[161,183]).$$

现构建 $X(\otimes)$ 的模拟及预测模型, 具体步骤如下:

Step 1: 区间灰数的标准化. 根据命题 1 和式 (2), 可得白部序列 $A_\otimes=(49,58,75,89,114,135,161)$, 灰部序列 $C_\otimes=(9,12,13,14,18,20,22)$.

Step 2: 分别构建 $A_\otimes$ 及 $C_\otimes$ 的 DGM(1,1) 模型, 并计算模型参数及模拟误差.

通过DGM(1,1) 建模软件[13], 可建立白部序列 $A_\otimes$ 的 DGM(1,1) 模型, 有: $\hat{a}_{k+1}=61.0692\times1.2177^{k-1}$, $\beta_{1\_a}=1.2177$, $\beta_{2\_a}=50.4022$, 平均相对误差 $\bar{\Delta}=2.1760\,\%$.

同理, 建立灰部序列 $C_\otimes$ 的 DGM(1,1) 模型有: $\hat{c}_{k+1}=11.5958\times1.1401^{k-1}$, $\beta_{1\_c}=1.1401$, $\beta_{2\_c}=10.3349$, 平均相对误差 $\bar{\Delta}=3.4345\,\%$.

Step 3: 建立城市外来工数量的区间灰数预测模型. 由 Step 1 和 Step 2 可知, 白部序列和灰部序列 DGM(1,1) 模型的模拟误差均介于 1% 和 5% 之间. 根据精度等级检验参照表[16] , 可知模拟精度为 II 级, 可用于预测. 整理后的城市外来工数量的区间灰数预测模型如下:

$$\hat{\otimes}(t_k)\in[\hat{a}_k,\hat{b}_k]\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\hat{a}_{k+1}=61.07\times1.22^{k-1},\\ \hat{b}_{k+1}=11.60\times1.14^{k-1}+61.07\times1.22^{k-1}.\end{cases}$$

Step 4: 城市外来工数量预测. 根据 Step 3, 当 $k=7,8,\cdots,12$ 时, 可预测 2010 ∼ 2015 年的外来工数量, 如表 2 所示.

表 2 某市 2010 ∼ 2015 年外来工数量的预测值 万人

参数	2010	2011	2012	2013	2014	2015
灰数	$\otimes(t_8)$	$\otimes(t_9)$	$\otimes(t_{10})$	$\otimes(t_{11})$	$\otimes(t_{12})$	$\otimes(t_{13})$
人数	[199,224]	[242,271]	[295,328]	[359,397]	[438,481]	[533, 582]

5 结 论

在灰代数运算体系短期内无法实现有效突破的环境下, 灰色系统理论研究者们试图通过灰数及灰数序列与实数及实数序列的“无损”转化, 来规避区间灰数之间的代数运算, 从而解决灰数预测模型的构建问题, 如: 几何法、“核和灰度”法等. 本文通过将区间灰数进行标准化处理, 将区间灰数分解成基于实数形式的“白部”和“灰部”两个部分, 分别构建区间灰数序列“白部”和“灰部”序列的 DGM(1,1) 模型, 进而推导、还原得到区间灰数预测模型, 并将其应用于构建具有“小样本、贫信息”特征的城市外来数量的预测模型, 预测值比较符合定性分析结果.

本文仅讨论了区间灰数在均匀取值情况下的标准化及模型构建等问题, 如何有效地实现在白化权函数已知条件下区间灰数的标准化及预测模型的合理

构建问题, 有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey system: Foundations, methodology and applications[M]. Slippery Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998: 1-24.

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 3-4.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Gray system theories and its applications[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 3-4.)

[3] 曾祥燕, 肖新平. GM(1,1)模型的拓广方法与应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1092-1096.
(Zeng X Y, Xiao X P. Study on generalization for GM (1, 1) model and its application[J]. Control and Decision, 2009, 24(7): 1092-1096.)

[4] 张岐山. 提高灰色GM(1,1)模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学, 2007, 15(5): 126-129.
(Zhang Q S. Improving the precision of GM (1, 1) model by using particle swarm optimization[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(5): 126-129.)

[5] 曾波, 刘思峰, 方志耕, 等. 灰色组合预测模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 150-155.
(Zeng B, Liu S F, Fang Z G, et al. Grey combined forecast models and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 150-155.)

[6] 米传民, 刘思峰, 吴正鹏, 等. 基于反向累积法的强化缓冲算子序列的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 352-355.
(Mi C M, Liu S F, Wu Z P, et al. Study on sequence of strengthening buffer operator based on back cumulative-sum method[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 352-355.)

[7] 曾波, 刘思峰. 基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1585-1588.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model for interval grey number based on grey[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1585-1588.)

[8] Zeng B, Liu S F, Xie N M. Prediction model of interval grey number based on DGM(1, 1)[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(4): 598-603.

[9] 曾波, 刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 174-180.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model of interval grey number based on its geometrical characteristics[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(2): 174-180.)

[10] 曾波, 刘思峰, 崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1819.
(Zeng B, Liu S F, Cui J. Prediction model for interval grey number with known whitenization weight function[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1815-1819.)

[11] 方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其GM (1,1)模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Lu F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1,1) model[J]. Engineering Science, 2005, 7(2): 57-61.)

[12] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM (1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering – Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)

[13] 曾波, 刘思峰. 灰色系统建模软件5.0[EB/OL]. http://igss.nuaa.edu.cn/institute/. 2010-5.
(Zeng B, Liu S F. Grey system modeling software [EB/OL]. http://igss.nuaa.edu.cn/institute/. 2010-5.)

(上接第772页)

[14] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5(2): 287-326.

[15] Laporte G. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms[J]. European J of Operational Research, 1992, 59(2): 231-247.