文章编号: 1001-0920 (2012) 05-0736-05

不确定性下多主从博弈中均衡的存在性

杨 哲, 蒲勇健

(重庆大学 经济与工商管理学院，重庆 400044)

摘 要: 在已知不确定参数变化范围的假设下, 研究多主从博弈中均衡点的存在性问题. 基于非合作博弈中 NS 均衡的定义, 提出不确定性下多主从博弈中均衡的概念. 基于 Fan-Glicksberg 不动点定理, 证明均衡点的存在性. 最后通过算例验证了所提出方法的可行性.

关键词: 多主从博弈；均衡点；不确定性；存在性

中图分类号: C934；F224.32 **文献标识码:** A

Existence of equilibrium points for multi-leader-follower games under uncertainty

YANG Zhe, *PU Yong-jian*

(College of Economics and Business Administration，Chongqing University，Chongqing 400044，China. Correspondent：YANG Zhe，E-mail：zheyang211@163.com)

Abstract: Under the assumption that the domain of the undetermined parameters is known, the existence of equilibrium points for multi-leader-follower games under uncertainty is studied. On the basis of NS equilibrium for noncooperative games, equilibrium points for multi-leader-follower games under uncertainty are defined. Further, the existence theorem of equilibrium points for multi-leader-follower games under uncertainty is proved by using Fan-Glicksberg fixed point theorem. Finally, a numeric example illustrates the feasibility of the proposed method.

Key words: multi-leader-follower games；equilibrium points；uncertainty；existence

1 引 言

主从博弈来源于 Stackelberg[1]在 1952 年的专著《市场经济理论》, 由当初的单主单从单目标发展到现在的多主多从多目标[2]和主从微分对策[3]. 在主从博弈中, 领导者拥有领导优势, 在博弈中占据有利的位置, 跟随者尾随领导者的脚步. 在现实中有许多这样的例子, 例如: 大公司和小公司之间的价格战, 中央政府与地方政府之间的博弈, 中央银行和商业银行的关系等. 学者们对主从博弈进行了深入的研究. 文献 [4] 分别对二人主从和多主多从博弈给出定义, 并且证明了其均衡的存在性; [5] 引入了多主从博弈的概念; [6] 又给出了多主从博弈中均衡点存在性的一个一般性证明.

以上均是针对确定环境下主从博弈均衡解存在性问题的研究. 但在实际问题中, 由于信息的不完全、非完全理性或环境的不确定性, 在博弈模型中往往带有不确定参数, 而且博弈的参与人只能预知这些参数的变化范围. 在局中人已知不确定参数变化范围的前提下, 文献 [7] 结合经典 Nash 均衡及帕雷托有效解的概念, 引入了不确定性下非合作博弈的 NS 均衡概念; 在此基础上, [8] 定义了不确定环境下非合作博弈的 ZS 均衡概念, 并基于不动点定理证明了其存在性; 在国内, [9-10] 研究了不确定性下非合作博弈强 Nash 均衡的存在性和简单 Berge 均衡的存在性问题.

以往主从博弈的研究均具有确定环境条件, 而不确定性下博弈的研究也集中在正规型博弈问题. 因此, 本文在现有研究的基础上, 将不确定性植入多主从博弈之中, 结合非合作博弈中 NS 均衡的概念, 定义不确定性下多主从博弈中的均衡点. 并且基于 Fan-Glicksberg 不动点定理, 证明均衡点的存在性.

2 预备知识

在文献 [5] 中, 多主从博弈有如下描述: 设有 2 个

收稿日期: 2010-11-11；**修回日期:** 2011-05-05.

基金项目: 重庆大学研究生创新基金项目(200911B0A0050321, CDJXS11020019).

作者简介: 杨哲(1983−), 男, 博士生, 从事博弈论、数理经济学的研究；蒲勇健(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事博弈论的研究.

领导者和 N 个跟随者; X_1, X_2 为两个领导者的策略集; $f_1(x_1,x_2,y)$, $f_2(x_1,x_2,y)$ 为两个领导者的目标函数. 其中: $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 为 N 个跟随者的策略. 对任意 $i=1,2,\cdots,N$, $g_i(x_1,x_2,y)$ 与 $K_i(x_1,x_2,y_{-i})$ 分别为第 i 个跟随者的目标函数和可行策略映射, 而 y_i 为以下优化问题的解:

$$\min_{y_i\in K_i(x_1,x_2,y_{-i})} g_i(x_1,x_2,y_i,y_{-i}),$$

其中 $y_{-i}=(y_1,\cdots,y_{i-1},y_{i+1},\cdots,y_N)$. 所有 y 的集合记为 $G(x_1,x_2)$, 这是一个关于 (x_1,x_2) 的集值映射. 策略 $(x_1^*,x_2^*)\in X_1\times X_2$, 如果存在 (y_1^*,y_2^*), 使 (x_1^*,y_1^*) 为以下问题的最优解:

$$\min_{x_1\in X_1,y_1\in G(x_1,x_2^*)} f_i(x_1,x_2^*,y_1),$$

而且 (x_2^*,y_2^*) 为以下问题的最优解:

$$\min_{x_2\in X_2,y_2\in G(x_1^*,x_2)} f_i(x_1^*,x_2,y_2),$$

则称 (x_1^*,x_2^*) 为此多主从博弈的均衡点.

考虑一个不确定性下的 n 人博弈 $\Gamma\{I,X_i,f_i,Y\}$. 其中: $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 为局中人集合; Y 为不确定参数集合; 对任意 $i\in I$, X_i 为局中人 i 的策略集合; $f_i:\prod\limits_{i\in I}X_i\times Y\to R$ 为局中人 i 的支付函数. 设

$$X=\prod_{i\in I}X_i,\ X_{-i}=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j,$$

$$x_{-i}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\in X_{-i},$$

$$x=(x_i,x_{-i}).$$

此博弈中每一个局中人选择自己的策略, 最大化自己的支付函数, 而且这里的支付函数也是关于不确定参数的函数. 此博弈可作如下描述: 当所有局中人都已选定了各自的策略后, 即可得到策略 x. 如果不确定参数为 y, 则第 i 个局中人可以得到收益 $f_i(x,y)$. 下面给出NS均衡的定义[7].

定义 1　策略 $(x^*,y^*)\in X\times Y$, 如果

1) 对每一个 $i\in I$, $\forall x_i\in X_i$, 有

$$f_i((x_i,x_{-i}^*),y^*)\leqslant f_i((x_i^*,x_{-i}^*),y^*);$$

2) $f(x^*,y^*)-f(x^*,y)\notin \mathrm{int}R_+^n,\forall y\in Y$.

则称 (x^*,y^*) 为博弈的NS均衡, 记

$$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n),$$

$$R_+^n=\{(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in R^n|u_i\geqslant 0,\ \forall i=1,2,\cdots,n\},$$

$$\mathrm{int}R_+^n=\{(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in R^n|u_i>0,\ \forall i=1,2,\cdots,n\}.$$

定义 2　X, Y 为两个非空Hausdorff拓扑向量空间. $C\subset Y$ 为一个非空锥, 且 K 为 X 中的一个非空凸子集. 如果满足对任意 $x,y\in K$ 和任意 $t\in[0,1]$, 有

$$f(tx+(1-t)y)\in f(x)+C,$$

或者

$$f(tx+(1-t)y)\in f(y)+C,$$

则称 $f:K\longrightarrow Y$ 为properly $C-$ 拟凹的.

特别地, 如果 $Y=R$, 并且 $C=R_+=[0,+\infty)$, 则properly $C-$ 拟凹等价于拟凹.

引理 1[11]　设 X,Y 为两个Hausdorff拓扑空间, 且 Y 为紧空间, 如果集值映射 $F:X\longrightarrow P_0(Y)$ 为闭的, 则 F 在 X 上是上半连续的.

引理 2[11](Fan-Glicksberg不动点定理)　设 X 为Hausdorff局部凸线性拓扑空间 E 里的非空凸紧集, 集值映射 $F:X\to P_0(X)$ 满足: 对于 $\forall x\in X$, $F(x)$ 为非空凸紧集, 且在 X 上是上半连续的. 则存在 $x^*\in X$, 使 $x^*\in F(x^*)$.

引理 3[11]　设 X 和 Y 为两个Hausdorff拓扑空间, $\{A_\alpha\}$ 为 X 中的一簇非空紧集网, $A_\alpha\to A$. 其中: A 为 X 中的一个非空紧集; $\{y^\alpha\}$ 为 Y 中的一个网, $y^\alpha\to y\in Y$; $f(x,y)$ 为 $X\times Y$ 上的一个连续函数. 则 $\max\limits_{x\in A_\alpha}f(x,y^\alpha)\to\max\limits_{x\in A}f(x,y)$.

引理 4[11](KyFan截口定理)　设 X 为Hausdorff线性拓扑空间 E 中的非空凸紧集, $B\subset X\times X$, 满足

1) $\forall x\in X$, 截口 $\{y\in X|(x,y)\in B\}$ 在 X 中是开的;

2) $\forall y\in X$, 截口 $\{x\in X|(x,y)\in B\}$ 是凸的;

3) $\forall x\in X$, $(x,x)\notin B$.

则存在 $y^*\in X$, 使 $(x,y^*)\notin B,\forall x\in X$.

3　存在性

下面考虑具有不确定性的多主从博弈 $\Gamma\{I,X,Y,Z,f,G\}$. 其中: 有 n 个领导者, 记 $I=\{1,2,\cdots,n\}$; Y 为所有跟随者策略空间的笛卡尔积; Z 为不确定参数集; 对任意 $i\in I$, X_i 为第 i 个领导者的策略空间; $f_i(x_i,x_{-i},y_i,z)$ 为第 i 个领导者的目标函数, 这里: $x_i\in X_i$, $X=\prod\limits_{i\in I}X_i$, $X_{-i}=\prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$, $x_{-i}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\in X_{-i}$; $y_i\in G(x_i,x_{-i},z)$, $G(x_i,x_{-i},z)$ 为跟随者的反应函数, 为一个集值映射.

定义 3　策略 $(x_i^*,x_{-i}^*,z^*)\in X\times Z$, 如果对任意 $i\in I$ 存在 $y_i^*\in G(x_i^*,x_{-i}^*,z^*)$, 使得

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*,y_i^*,z^*)=\min_{x_i\in X_i,y_i\in G(x_i,x_{-i}^*,z^*)} f_i(x_i,x_{-i}^*,y_i,z^*),$$

$$f(x^*,y^*,z)-f(x^*,y^*,z^*)\notin \mathrm{int}R_+^n,\ \forall z\in Z.$$

则称 (x_i^*,x_{-i}^*,z^*) 为不确定性下多主从博弈的均衡点,

记 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\prod\limits_{i\in I}Y$.

注 1 如果 $Z=\varnothing$ 或 $Z=\{z\}$, 则 Γ 称为一个一般的多主从博弈.

下面证明不确定下多主从博弈中均衡存在性定理.

定理 1 对任意 $i\in I$, 设 X_i, Y 和 Z 分别为 3 个局部凸 Hausdorff 线性拓扑空间中的非空凸紧子集; $f_i:\prod\limits_{i\in I}X_i\times Y\times Z\to R$ 为连续函数, 而且满足:

1) $\forall x_{-i}\in X_{-i}$, $\forall z\in Z$, $(x_i,y_i)\to f_i(x_i,x_{-i},y_i,z)$ 是拟凸的;

2) $G:\prod\limits_{i\in I}X_i\times Z\to P_0(Y)$ 是连续的集值映射, 且拥有非空凸紧值;

3) $\forall x_{-i}\in X_{-i}$, $\forall z\in Z$, 对 $u_i\in X_i$ 中的任意凸组合 $\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i u_i$, 有

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i G(u_i,x_{-i},z)\subset G\Big(\sum_{i=1}^m\lambda_i u_i,x_{-i},z\Big);$$

4) $\forall x\in X$, $y\in\prod\limits_{i\in I}Y$, $z\to f(x,y,z)$ 是 properly R_+^n- 拟凹的, 记 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

则存在 $(x_1^*,\cdots,x_n^*,y_1^*,\cdots,y_n^*,z^*)\in\prod\limits_{i\in I}X_i\times\prod\limits_{i\in I}Y\times Z$, 使得对于 $\forall i\in I$, 有

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*,y_i^*,z^*)=\min_{x_i\in X_i,y_i\in G(x_i,x_{-i}^*,z^*)}f_i(x_i,x_{-i}^*,y_i,z^*),$$

$$f(x^*,y^*,z)-f(x^*,y^*,z^*)\notin \mathrm{int}R_+^n,\ \forall z\in Z.$$

证明 对于任意 $i\in I$, 定义集值映射

$$H_i:X_{-i}\times\prod_{j\in I\backslash\{i\}}Y\times Z\to P_0(X_i\times Y),$$

即

$$H_i(x_{-i},y_{-i},z)=\{x_i\in X_i,y_i\in G(x_i,x_{-i},z)|f_i(x_i,x_{-i},y_i,z)=\min_{u_i\in X_i,v_i\in G(u_i,x_{-i},z)}f_i(u_i,x_{-i},v_i,z)\}.$$

又定义集值映射 $H_0:X\times\prod\limits_{i\in I}Y\to P_0(Z)$, 即

$$H_0(x,y)=\{z\in Z|f(x,y,v)-f(x,y,z)\notin\mathrm{int}R_+^n,\ \forall v\in Z\}.$$

1) 首先证明对于任意 $i\in I$, 集值映射 H_i 拥有非空凸值.

因为 X_i 为非空紧集, G 连续且拥有非空紧值, 以及 f_i 为连续的, 所以 $H_i(x_{-i},y_{-i},z)\neq\varnothing$.

对于任意 $(x_i^1,y_i^1),(x_i^2,y_i^2)\in H_i(x_{-i},y_{-i},z)$ 和任意 $t\in(0,1)$, 根据 X_i 的凸性, 有 $tx_i^1+(1-t)x_i^2\in X_i$, 再根据条件 (3), 有

$$ty_i^1+(1-t)y_i^2\in tG(x_i^1,x_{-i},z)+(1-t)G(x_i^2,x_{-i},z)\subset G(tx_i^1+(1-t)x_i^2,x_{-i},z).$$

再由条件 (1), 可得

$$f_i(tx_i^1+(1-t)x_i^2,x_{-i},ty_i^1+(1-t)y_i^2,z)\leqslant \max\{f_i(x_i^1,x_{-i},y_i^1,z),f_i(x_i^2,x_{-i},y_i^2,z)\}=\min_{u_i\in X_i,v_i\in G(u_i,x_{-i},z)}f_i(u_i,x_{-i},v_i,z).$$

因此有

$$f_i(tx_i^1+(1-t)x_i^2,x_{-i},ty_i^1+(1-t)y_i^2,z)=\min_{u_i\in X_i,v_i\in G(u_i,x_{-i},z)}f_i(u_i,x_{-i},v_i,z),$$

即

$$t(x_i^1,y_i^1)+(1-t)(x_i^2,y_i^2)\in H_i(x_{-i},y_{-i},z).$$

因此可证对于任意 $i\in I$, 集值映射 H_i 拥有非空凸值.

2) 下面证明对于任意 $i\in I$, 集值映射 H_i 为上半连续的, 且拥有非空紧值.

根据引理 1, 只需证明 H_i 的图是闭的, 即对 $X_{-i}\times\prod\limits_{j\in I\backslash\{i\}}Y\times Z$ 中的任意网 $\{(x_{-i}^\alpha,y_{-i}^\alpha,z^\alpha)\}$ 收敛于

$$(x_{-i},y_{-i},z)\in X_{-i}\times\prod_{j\in I\backslash\{i\}}Y\times Z,$$

而且任意 $(x_i^\alpha,y_i^\alpha)\in H_i(x_{-i}^\alpha,y_{-i}^\alpha,z^\alpha)$ 收敛于 (x_i,y_i), 下面证明 $(x_i,y_i)\in H_i(x_{-i},y_{-i},z)$.

因为 $(x_i^\alpha,y_i^\alpha)\in H_i(x_{-i}^\alpha,y_{-i}^\alpha,z^\alpha)$, 所以有

$$f_i(x_i^\alpha,x_{-i}^\alpha,y_i^\alpha,z^\alpha)=\min_{u_i\in X_i,v_i\in G(u_i,x_{-i}^\alpha,z^\alpha)}f_i(u_i,x_{-i}^\alpha,v_i,z^\alpha).$$

由 $(x_{-i}^\alpha,y_{-i}^\alpha,z^\alpha)\to(x_{-i},y_{-i},z)$, $(x_i^\alpha,y_i^\alpha)\to(x_i,y_i)$, G_i 为连续映射, 且拥有非空凸紧值, 以及 f_i 的连续性, 根据引理 3, 可得

$$f_i(x_i,x_{-i},y_i,z)=\min_{u_i\in X_i,v_i\in G(u_i,x_{-i},z)}f_i(u_i,x_{-i},v_i,z).$$

因此 H_i 的图为闭的, 由此可证, H_i 为上半连续的, 且拥有非空紧值.

3) 下面证明对于任意 $(x,y)\in X\times\prod\limits_{i\in I}Y$, $H_0(x,y)\neq\varnothing$.

对于任意 $(x,y)\in X\times\prod\limits_{i\in I}Y$, 定义集合

$$B=\{(v,z)\in Z\times Z|f(x,y,v)-f(x,y,z)\in\mathrm{int}R_+^n\}.$$

如果对于任意 $v\in Z$, $z\in\{z\in Z|(v,z)\in B\}$, 则存在 R^n 中零点的开邻域 V, 使

$$f(x,y,v)-f(x,y,z)+V\subset\mathrm{int}R_+^n.$$

因为 f_i 是连续的, 所以存在 Z 中 z 的开邻域 $U(z)$, 使

得对于任意 $z' \in U(z)$, 有

$$f(x,y,v) - f(x,y,z') \in$$
$$f(x,y,v) - f(x,y,z) + V \subset \mathrm{int}R_+^n.$$

由此可证 $\{z \in Z|(v,z) \in B\}$ 在 X 中是开的.

对于任意 $z \in Z$, 任意 $v_1, v_2 \in \{v \in Z|(v,z) \in B\}$ 和任意 $t \in (0,1)$, 根据条件 4) 中的 $z \to f(x,y,z)$ 是 properly R_+^n- 拟凹的, 不失一般性可得

$$f(x,y,tv_1+(1-t)v_2) \in f(x,y,v_1) + R_+^n,$$

则可以推出

$$f(x,y,tv_1+(1-tv_2)) - f(x,y,z) \in$$
$$f(x,y,v_1) - f(x,y,z) + R_+^n \subset$$
$$\mathrm{int}R_+^n + R_+^n \subset \mathrm{int}R_+^n.$$

因此可证, 对于任意 $z \in Z$, $\{v \in Z|(v,z) \in B\}$ 是凸的. 又因为对于任意 $z \in Z$, $(z,z) \notin B$. 所以根据引理 4, 存在 $z \in Z$, 使 $(v,z) \notin B, \forall v \in Z$, 即

$$f(x,y,v) - f(x,y,z) \notin \mathrm{int}R_+^n,\ \forall v \in Z.$$

因此对于任意 $(x,y) \in X \times \prod_{i\in I} Y$, 有 $H_0(x,y) \neq \varnothing$.

4) 下面证明对任意 $(x,y) \in X \times \prod_{i\in I} Y$, $H_0(x,y)$ 是凸的.

对于任意 $(x,y) \in X \times \prod_{i\in I} Y$, 任意 $z_1, z_2 \in H_0(x,y)$, 以及任意 $t \in (0,1)$, 如果假设 $tz_1 + (1-t)z_2 \notin H_0(x,y)$, 则存在 $v \in Z$, 使

$$f(x,y,v) - f(x,y,tz_1+(1-t)z_2) \in \mathrm{int}R_+^n.$$

又因为 $z \to f(x,y,z)$ 是 properly R_+^n- 拟凹的, 不失一般性可得

$$f(x,y,tz_1+(1-t)z_2) \in f(x,y,z_1) + R_+^n.$$

所以可以推出

$$f(x,y,v) - f(x,y,z_1) =$$
$$f(x,y,v) - f(x,y,tz_1+(1-t)z_2) +$$
$$f(x,y,tz_1+(1-t)z_2) - f(x,y,z_1) \in$$
$$\mathrm{int}R_+^n + R_+^n \subset \mathrm{int}R_+^n.$$

这与 $z_1 \in H_0(x,y)$ 矛盾, 因此有

$$f(x,y,v) - f(x,y,tz_1+(1-t)z_2) \notin \mathrm{int}R_+^n,\ \forall v \in Z,$$

即 $tz_1 + (1-t)z_2 \in H_0(x,y)$. 由此可证, 对于任意 $(x,y) \in X \times \prod_{i\in I} Y$, $H_0(x,y)$ 是凸的.

5) 下面证明 H_0 为上半连续, 且拥有紧值.

根据引理 1, 只需证明 H_0 的图是闭的, 即对于 $X \times \prod_{i\in I} Y$ 中的任意网 $\{(x^\alpha, y^\alpha)\}$ 收敛于 $(x,y) \in X \times \prod_{i\in I} Y$, 而且任意 $z^\alpha \in H_0(x^\alpha, y^\alpha)$ 收敛于 z, 下面证明 $z \in H_0(x,y)$.

如果假设 $z \notin H_0(x,y)$, 则存在 $v \in Z$, 使

$$f(x,y,v) - f(x,y,z) \in \mathrm{int}R_+^n;$$

存在 R^n 中零点的开邻域 V, 使

$$f(x,y,v) - f(x,y,z) + V \subset \mathrm{int}R_+^n.$$

因为 f 是连续的, 所以存在 $X \times \prod_{i\in I} Y \times Z$ 中 (x,y,z) 的开邻域 U, 使得对于任意 $(x',y',z') \in U$, 有

$$f(x',y',v) - f(x',y',z') \in$$
$$f(x,y,v) - f(x,y,z) + V \subset \mathrm{int}R_+^n.$$

又因为 $(x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha) \to (x,y,z)$, 所以存在 α_0, 使得对于任意 $\alpha \succ \alpha_0$, 有 $(x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha) \in U$, 因此可得

$$f(x^\alpha, y^\alpha, v) - f(x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha) \in \mathrm{int}R_+^n.$$

这与 $z^\alpha \in H_0(x^\alpha, y^\alpha)$ 矛盾, 故 $z \in H_0(x,y)$. 因此 H_0 的图是闭的, 由此可得, H_0 为上半连续而且拥有紧值.

6) 构造不动点映射 $F: \prod_{i\in I}(X_i \times Y) \times Z \to P_0\Big(\prod_{i\in I}(X_i \times Y) \times Z\Big)$, 即

$$F(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n,z) =$$
$$\prod_{i\in I} H_i(x_{-i}, y_{-i}, z) \times H_0(x,y).$$

根据前面 1)~5) 的证明可得, F 为上半连续集值映射, 且拥有非空凸紧值. 又因为 X_i, Y, Z 都为局部凸 Hausdorff 线性拓扑空间里的非空凸紧子集, 所以 $\prod_{i\in I}(X_i \times Y) \times Z$ 为局部凸 Hausdorff 线性拓扑空间里的非空凸紧子集. 因此由引理 2 可得, 存在

$$(x_1^*, y_1^*, \cdots, x_n^*, y_n^*, z^*) \in \prod_{i\in I}(X_i \times Y) \times Z,$$

使得

$$(x_1^*, y_1^*, \cdots, x_n^*, y_n^*, z^*) \in F(x_1^*, y_1^*, \cdots, x_n^*, y_n^*, z^*),$$

即

$$(x_i^*, y_i^*) \in H_i(x_{-i}^*, y_{-i}^*),\ \forall i \in I;\ z^* \in H_0(x^*, y^*).$$

因此由 $(x_i^*, y_i^*) \in H_i(x_{-i}^*, y_{-i}^*)$, $\forall i \in I$, 可得

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*, y_i^*, z^*) =$$
$$\min_{x_i \in X_i, y_i \in G(x_i, x_{-i}^*, z^*)} f_i(x_i, x_{-i}^*, y_i, z^*).$$

又由 $z^* \in H_0(x^*, y^*)$ 可得

$$f(x^*, y^*, z) - f(x^*, y^*, z^*) \notin \mathrm{int}R_+^n,\ \forall z \in Z. \quad \square$$

4　算例分析

下面应用第 3 节中的结论, 求解不确定性下多主从博弈中的均衡.

例 1　考虑一个简单的多主从博弈, 只有两个领导者 $I = \{1,2\}$; X_1, X_2 分别为两个领导者的策略空间; Y 为跟随者的策略空间; Z 为不确定参数空

间. 这里设 $X_1 = X_2 = Y = Z = [0,1]$; $f_1(x_1, x_2, y, z) = 2x_1+y+z$ 为第 1 个领导者的目标函数, $f_2(x_1, x_2, y, z) = 2x_2 + y + z$ 为第 2 个领导者的目标函数; 跟随者反应映射为 $y = G(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2 - \dfrac{z}{2}$.

将反应函数带入领导者的目标函数, 可得

$$f_1(x_1, x_2, y, z) = 1 + x_1 - x_2 + \frac{z}{2},$$
$$f_2(x_1, x_2, y, z) = 1 + x_2 - x_1 + \frac{z}{2}.$$

设 (x_1^*, x_2^*, z^*) 为该多主从博弈的均衡点, 有

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1^*, x_2^*, y^*, z^*) - f_1(x_1, x_2^*, y^*, z^*) = \\
&x_1^* - x_1 \leqslant 0,\ \forall x_1 \in X_1; \\
&f_2(x_1^*, x_2^*, y^*, z^*) - f_2(x_1^*, x_2, y^*, z^*) = \\
&x_2^* - x_2 \leqslant 0,\ \forall x_2 \in X_2; \\
&(f_1(x^*, y^*, v), f_2(x^*, y^*, v)) - \\
&(f_1(x^*, y^*, z^*), f_2(x^*, y^*, z^*)) = \\
&\Big(\frac{v - z^*}{2}, \frac{v - z^*}{2}\Big) \notin \mathrm{int}R_+^2,\ \forall v \in Z.
\end{aligned}$$

因此可得 $(x_1^*, x_2^*, z^*) = (0, 0, 1)$, 进而可得 $y^* = \dfrac{1}{2}$. 即满足

$$f_1(x_1^*, x_2^*, y^*, z^*) = \min_{u_1 \in X_1, v_1 \in G(u_1, x_2^*)} f_1(u_1, x_2^*, v_1, z^*),$$
$$f_2(x_1^*, x_2^*, y^*, z^*) = \min_{u_2 \in X_2, v_2 \in G(x_1^*, u_2)} f_2(x_1^*, u_2, v_2, z^*),$$
$$f(x_1^*, x_2^*, y^*, v) - f(x_1^*, x_2^*, y^*, z^*) \notin \mathrm{int}R_+^2.$$

5 结 论

在多主从博弈和不确定性下非合作博弈研究的基础上, 本文研究了不确定性下多主从博弈中均衡的存在性问题. 首先给出了不确定性下多主从博弈中均衡点的定义, 并运用Fan-Glicksberg不动点定理证明了均衡点的存在性. 这是主从博弈在不确定性下的推广, 也是不确定性下非合作博弈应用范围的扩展. 进一步, 可将得到的结论应用于实际的博弈决策问题, 例如: 不确定性下多个领导者寡头和多个跟随者寡头的竞争模型; 不确定性下关税谈判问题, 领导者为各个国家的政府, 策略为关税率, 而跟随者为各个国家的企业; 不确定性下地方政府竞争模型, 领导者为各个地方政府, 策略为不同的政府政策, 而跟随者为各种企业. 在理论研究方面, 希望能将不确定性植入更加一般的动态博弈中, 建立不确定性下的扩展型博弈模型. 进一步定义其中的均衡点, 证明其存在性, 并且应用于实际博弈决策问题, 这些都需要作更加深入的研究.

参考文献(References)

[1] Stackelberg H V. The theory of the market economy[M]. Oxford : Oxford University Press, 1952: 97-105.

[2] 盛昭瀚. 主从递阶决策论[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 3-17.
(Sheng Z H. Stackelberg decision theory[M]. Beijin: Science Press, 1998: 3-17.)

[3] 李登峰. 微分对策及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 5-15.
(Li D F. Differential games and applications[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000: 5-15.)

[4] Basar T, Olsder G J. Dynamic noncooperative games[M]. New York: Academic Press, 1995: 25-37.

[5] Pang J S, Fukushima M. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibri and multi-leader-follower games[J]. Computational Management Science, 2005, 2(1): 21-56.

[6] Yu J, Wang H L. An existence theorem for equilibrium points for multi-leaders-follower games[J]. Nonlinear Analysis TMA, 2008, 69(5-6): 1-15.

[7] Zhukovskii V I. Linear quadratic differential games[M]. Naoukova Doumka: Kiev, 1994: 96-105.

[8] Larbani M, Lebbah H. A concept of equilibrium for a game under uncertainty[J]. European J of Operational Research, 1999, 117(1): 145-156.

[9] 张会娟, 张强. 不确定性下非合作博弈强Nash均衡的存在性[J]. 控制与决策, 2010, 25 (8): 1251-1254.
(Zhang H J, Zhang Q. Existence of strong Nash equilibrium for non-cooperative games under uncertainty[J]. Control and Decision, 2010, 25 (8): 1251-1254.)

[10] 张会娟, 张强. 不确定性下非合作博弈简单Berge均衡的存在性[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1630-1635.
(Zhang H J, Zhang Q. Existence of simple Berge equilibrium for non-cooperative games under uncertainty[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1630-1635.)

[11] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 35-47.
(Yu J. Game theory and nonlinear analysis[M]. Beijing: Science Press, 2008: 35-47.)