

文章编号: 1001-0920(2012)05-0691-06

奇异摄动时滞系统次优控制的Chebyshev多项式级数方法

张宝琳¹, 郑菲菲¹, 唐功友²

(1. 中国计量学院理学院, 杭州 310018; 2. 中国海洋大学信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 研究奇异摄动时滞系统次优控制的近似设计问题. 基于奇异摄动的快慢分解理论, 将系统的最优控制问题转化为无时滞快子问题和线性时滞慢子问题; 利用Chebyshev多项式级数方法将时滞慢子问题的近似求解问题转化为线性代数方程组的求解问题, 进而得到原系统的次优控制律, 该控制律由Chebyshev多项式级数的基向量表示. 仿真算例表明了该方法的有效性.

关键词: 奇异摄动系统; 时滞; 次优控制; Chebyshev多项式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Chebyshev polynomial series method of suboptimal control for singularly perturbed time-delay systems

ZHANG Bao-lin¹, ZHENG Fei-fei¹, TANG Gong-you²

(1. College of Science, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China; 2. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China. Correspondent: ZHANG Bao-lin, E-mail: hiblzhang@gmail.com)

Abstract: This paper studies an approximation approach to optimal control for singularly perturbed time-delay systems. Based on the slow-fast decomposition theory of singular perturbation, the optimal control problem is firstly decomposed into a fast subproblem and a slow one with time-delay. By using Chebyshev polynomial series method, the optimal control law design of the slow one is transformed into a problem of solving linear equations. Then, a suboptimal control law of the slow subproblem is developed by solving the linear equations. Further, the suboptimal control law of the original problem is obtained and formulated as base vectors of the Chebyshev polynomial series. Numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: singularly perturbed system; time-delay; suboptimal control; Chebyshev polynomial

1 引言

时滞系统的最优控制一直是人们关注的热点问题之一^[1-2]. 时滞系统基于二次型性能指标的最优控制问题通常导致既含时滞项又含超前项的两点边值问题, 该问题的解析解非常困难. 因此, 人们通过研究其数值解法, 如: 逐次逼近法^[3-4]、摄动法^[5]等, 来研究系统的次优控制律. 文献[6]给出了利用Taylor级数逼近线性时滞系统最优控制律的近似方法. 另外, 模糊控制等智能控制方法^[7]也是研究时滞系统最优控制问题的有效工具之一.

近年来, 奇异摄动时滞系统的分析与设计问题越来越受到人们的重视. 例如: Glizer^[8-9]分别讨论了奇异摄动时滞系统的可控性问题和镇定问题,

Fridman^[10]讨论了时滞对系统稳定性的影响. 关于无时滞奇异摄动系统二次型最优控制的研究, 已有大量研究成果, 见文献[12-13]及其引用的文献. 针对奇异摄动时滞系统的优化控制问题, Glizer等人^[11]给出了含小时滞的线性奇异摄动系统的 H_∞ 算法; 针对奇异摄动时滞系统的二次型最优控制问题, 文献[14-15]基于奇异摄动的快慢分解理论^[17]研究了系统次优控制律设计方法. 奇异摄动时滞系统最优控制的近似方法研究具有重要意义.

正交级数理论特别是正交多项式理论不仅在微分方程数值解法等数值分析领域有重要应用, 而且被广泛地应用于控制系统的分析和设计. 特别地, 基于正交多项式理论, 可将最优控制问题转化为代数极

收稿日期: 2010-11-10; 修回日期: 2011-04-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874029, 40776051); 浙江省自然科学基金项目(Y107232, Y1110036).

作者简介: 张宝琳(1972—), 男, 副教授, 博士, 从事时滞系统与奇异摄动系统的分析与设计等研究; 唐功友(1953—), 男, 教授, 博士生导师, 从事时滞系统与非线性系统的分析与设计等研究.

值问题^[16],从而避免了非线性 Riccati 方程的求解.然而,该类方法通常将动态系统转化为静态问题进行处理,这种系统结构上的变化使系统分析和设计结果往往具有一定的保守性.受文献[6]的启发,本文采用较 Taylor 级数法更一般的正交多项式方法研究奇异摄动时滞系统的次优控制问题,通过采用正交多项式方法求解正则两点边值问题的数值解,进而得到了系统的次优控制律,从而避免了对动态系统直接静态化处理而引起系统动态特性的变化^[16].

2 问题描述

考虑如下标准的线性奇异摄动时滞系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + A_{13}x(t - \tau) + B_1u(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}z(t) + A_{23}x(t - \tau) + B_2u(t), \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \quad (1)$$

关于二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q_1 x + z^T Q_3 z + u^T R u) dt \quad (2)$$

的最优控制问题.其中: $x \in R^n$ 和 $z \in R^m$ 为状态向量; $u \in R^r$ 为控制输入; $\tau > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 分别为时滞和摄动参数; $A_{ij}, B_i (i = 1, 2, j = 1, 2, 3)$ 为适维数常阵; $\phi(t)$ 为初始函数; Q_1 和 Q_3 分别为 n 维和 m 维半正定矩阵; R 为 r 维正定矩阵.

根据奇异摄动的快慢分解理论^[17],由式(1)和(2)描述的最优控制问题可分解为快慢两个子问题.其中:慢子问题由子系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_3 x(t - \tau) + B_0 u_s(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

以及性能指标泛函

$$J_s = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q_0 x + 2u_s^T D_s x + u_s^T R_s u_s) dt \quad (4)$$

来确定.其中

$$\begin{aligned} A_0 &= A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \\ A_3 &= A_{13} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{23}, \\ B_0 &= B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2, \\ Q_0 &= Q_1 + A_{21}^T A_{22}^{-T} Q_3 A_{22}^{-1} A_{21}, \\ D_s &= B_2^T A_{22}^{-T} Q_3 A_{22}^{-1} A_{21}, \\ R_s &= R + B_2^T A_{22}^{-T} Q_3 A_{22}^{-1} B_2. \end{aligned} \quad (5)$$

对应地,快子问题由子系统

$$\varepsilon \dot{z}_f(t) = A_{22} z_f(t) + B_2 u_f(t), \quad z_f(0) = z_0 - z_s(0), \quad (6)$$

以及性能指标泛函

$$J_f = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z_f^T Q_3 z_f + u_f^T R u_f) dt \quad (7)$$

来确定,其中

$$z_s(t) = -A_{22}^{-1} [A_{21} x(t) + A_{23} x(t - \tau) + B_2 u_s(t)].$$

通过引入时间伸展变量,易得快子系统(6)的最

优控制律为

$$u_f^* = -R^{-1} B_2^T P_f z_f, \quad (8)$$

其中 P_f 为代数 Riccati 方程

$$A_{22}^T P_f + P_f A_{22} - P_f S_2 P_f + Q_3 = 0 \quad (9)$$

的唯一正定解,这里 $S_2 = B_2 R^{-1} B_2^T$.

另一方面,慢子系统(3)的最优控制律为^[14]

$$u_s^* = -R_s^{-1} [D_s x + B_0^T (P_s x + g)], \quad (10)$$

其中 P_s 为代数 Riccati 方程

$$A_s^T P_s + P_s A_s - P_s S_0 P_s + Q_s = 0 \quad (11)$$

的唯一正定解.这里

$$\begin{aligned} A_s &= A_0 - B_0 R_s^{-1} D_s, \quad S_0 = B_0 R_s^{-1} B_0^T, \\ Q_s &= Q_0 - D_s^T R_s^{-1} D_s. \end{aligned} \quad (12)$$

$g(t) \in R^n$ 满足以下两点边值问题:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \Lambda x(t) + A_3 x(t - \tau) - S_0 g(t), \\ \dot{g}(t) &= -\Lambda^T g(t) - P_s A_3 x(t - \tau) - d(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ g(t_f) &= 0, \quad t_f \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} \Lambda &= A_s - S_0 P_s; \\ d(t) &= \begin{cases} A_3^T [P_s x(t + \tau) + g(t + \tau)], \\ 0 < t \leq t_f - \tau; \\ 0, \quad t_f - \tau < t \leq t_f. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

为了求出慢子系统的最佳控制律,必须求解上述两点边值问题.通常,求解该问题的解析解几乎是不可能的.下面基于 Chebyshev 多项式级数方法研究其数值解,并讨论系统组合控制律的求解方法.

3 次优控制律设计

3.1 问题转化

令

$$h^T(t) = [x^T(t) \quad g^T(t_f - t)], \quad (15)$$

以及

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = t_f, \quad a_2 = t_f - \tau, \\ a_3 &= t_f + \tau, \quad a_4 = a_5 = -\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

则关于 $x(t)$ 和 $g(t)$ 的两点边值问题(13)可转化为关于 $h(t)$ 的微分方程初值问题^[14],有

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \bar{A}_i h(a_i - t) + \sum_{i=0,4,5} \bar{A}_i h(a_i + t), \\ 0 < t \leq t_f - \tau; \\ \sum_{i=1}^2 \bar{A}_i h(a_i - t) + \sum_{i=0,4} \bar{A}_i h(a_i + t), \\ t_f - \tau < t \leq t_f. \end{cases} \\ h^T(0) &= [\phi^T(0) \quad g^T(t_f)]. \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \begin{bmatrix} A_s - S_0 P_s & 0 \\ 0 & A_s^T - P_s S_0 \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -S_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_s A_3 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3^T P_s & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_4 &= \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_3^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

为了求出向量微分方程初值问题(17)的近似解, 下面讨论其基于正交多项式级数的数值方法.

3.2 Chebyshev 多项式级数方法

设 Chebyshev 多项式级数的基向量为

$$\varphi^T(t) = [\varphi_0(t) \quad \varphi_1(t) \quad \cdots \quad \varphi_{m-1}(t)]. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1, \varphi_1(t) = t, \\ \varphi_{i+1}(t) &= 2t\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t), \quad i = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \quad (20)$$

进一步设

$$\vartheta^T(t) = [\vartheta_0(t) \quad \vartheta_1(t) \quad \cdots \quad \vartheta_{m-1}(t)]. \quad (21)$$

其中

$$\vartheta_i(t) = t^i, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1. \quad (22)$$

于是, 必存在 $m \times m$ 非奇异矩阵 $N = (n_{ij})$, 使得

$$\varphi(t) = N\vartheta(t). \quad (23)$$

事实上, 由式(19)~(21), 易得变换矩阵 N 的元 n_{ij} 具有如下形式:

$$\begin{aligned} n_{ij} &= 0, \quad i < j, \quad i, j = 0, 1, \cdots, m-1; \\ n_{00} &= 1, \quad n_{10} = 0, \quad n_{11} = 1, \\ n_{i,0} &= -n_{i-2,0}, \quad i = 2, 3, \cdots, m-1; \\ n_{i,j} &= 2n_{i-1,j-1} - n_{i-2,j}, \\ i &= 2, 3, \cdots, m-1, \quad j = 1, 2, \cdots, m-1. \end{aligned} \quad (24)$$

注意到

$$\int_0^t \vartheta(s) ds \approx \bar{P}\vartheta(t). \quad (25)$$

其中

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/(m-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

于是, 由式(19)和(25)可得

$$\int_0^t \varphi(s) ds \approx \hat{P}\varphi(t), \quad (27)$$

其中 $\hat{P} = N\bar{P}N^{-1}$.

设

$$h(t) = H^T \varphi(t). \quad (28)$$

其中

$$H^T = [h_0, h_1, \cdots, h_{m-1}],$$

$$h_i^T = [h_{i,1}, h_{i,2}, \cdots, h_{i,n} \vdots h_{i,n+1}, \cdots, h_{i,2n}]. \quad (29)$$

注意到

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \\ n &= 0, 1, \cdots, m-1. \end{aligned} \quad (30)$$

并假设

$$\bar{K}_i = NK_i N^{-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, 5. \quad (31)$$

其中

$$K_l = (\bar{K}_{ij}^{(l)})_{m \times m}, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\bar{K}_{ij}^{(l)} = \begin{cases} (-1)^j \binom{i}{j} a_l^{i-j}, & j \leq i; \\ 0, & j > i; \end{cases}$$

$$K_p = (\bar{K}_{ij}^{(p)})_{m \times m}, \quad p = 4, 5;$$

$$\bar{K}_{ij}^{(p)} = \begin{cases} \binom{i}{j} a_p^{i-j}, & j \leq i; \\ 0, & j > i; \end{cases}$$

$$i, j = 0, 1, \cdots, m-1. \quad (32)$$

则由式(28)和(30)可得

$$h(a_l - t) = H^T \bar{K}_l \varphi(t), \quad l = 1, 2, 3;$$

$$h(a_p + t) = H^T \bar{K}_p \varphi(t), \quad p = 4, 5. \quad (33)$$

进而向量微分方程(17)可转化为

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \Theta(t, H)\varphi(t), \\ h^T(0) &= [\phi^T(0) \quad g^T(t_f)]. \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\Theta(t, H) = \begin{cases} \sum_{l=0}^5 \bar{A}_l H^T \bar{K}_l, & 0 < t \leq t_f - \tau; \\ \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq 3}}^5 \bar{A}_l H^T \bar{K}_l, & t_f - \tau < t \leq t_f. \end{cases} \quad (35)$$

这里 K_0 为 m 阶单位矩阵.

对式(34)中第1式两端从0到 t 积分, 并注意到式(28)和(33), 易得

$$(H^T - W)\varphi(t) = \Theta(t, H)\hat{P}\varphi(t), \quad (36)$$

其中 $W = [h(0) \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]$, 这里 $\mathbf{0}$ 为 $2n$ 阶零列向量.

比较式(36)等号两边 $\varphi(t)$ 的系数, 可得线性代数方程组

$$H^T - \Theta(t, H)\hat{P} = W. \quad (37)$$

进一步, 根据 Kronecker 直积的性质, 由式(37)可得关于 $\text{vec}(H^T)$ 的线性代数方程组

$$\Xi(t)\text{vec}(H^T) = \text{vec}(W), \quad (38)$$

其中

$$\Xi(t) = \begin{cases} I - \sum_{l=0}^5 [(\bar{K}_l \hat{P})^T \otimes \bar{A}_l], & 0 < t \leq t_f - \tau; \\ I - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq 3}}^4 [(\bar{K}_l \hat{P})^T \otimes \bar{A}_l], & t_f - \tau < t \leq t_f. \end{cases} \quad (39)$$

这里 I 为 $2nm$ 阶单位矩阵. 于是, 基于 Chebyshev 多项式近似展开, 两点边值问题(13)最终转化为线性代数方程组(38)的求解问题. 显然, 只要其系数矩阵 $\Xi(t)$ 非奇异, 则该方程组有唯一解, 从而可得两点边值问题(13)的近似解.

3.3 主要结果

为了刻画控制律的第 m 阶近似, 记式(19)中的 $\varphi(t)$ 为 $\varphi^{(m)}(t)$. 相应地, 记线性代数方程组(38)的解 H 为 $H^{(m)}$, 并分解 $H^{(m)}$ 为分别关联状态向量 $x(t)$ 和共态向量 $g(t)$ 的两部分 $H_x^{(m)}$ 和 $H_g^{(m)}$, 即

$$H_x^{(m)} = \begin{bmatrix} h_{01} & h_{11} & \cdots & h_{m-1,1} \\ h_{02} & h_{12} & \cdots & h_{m-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{0n} & h_{1n} & \cdots & h_{m-1,n} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$H_g^{(m)} = \begin{bmatrix} h_{0,n+1} & h_{1,n+1} & \cdots & h_{m-1,n+1} \\ h_{0,n+2} & h_{1,n+2} & \cdots & h_{m-1,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{0,2n} & h_{1,2n} & \cdots & h_{m-1,2n} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

由式(15)和(28)可得慢子系统的 m 阶次优状态向量为

$$x^{(m)}(t) = H_x^{(m)} \varphi^{(m)}(t), \quad m = 0, 1, \dots \quad (42)$$

相应地, 其 m 阶共态向量为

$$g^{(m)}(t) = H_g^{(m)} \varphi^{(m)}(t_f - t), \quad t_f \rightarrow \infty, \quad m = 0, 1, \dots \quad (43)$$

从而, 由式(10)可得慢子系统的 m 阶次优控制律为

$$u_s^{(m)} = -R_s^{-1} (D_s + B_0^T P_s) H_x^{(m)} \varphi^{(m)}(t) - R_s^{-1} B_0^T H_g^{(m)} \varphi^{(m)}(t_f - t), \quad t_f \rightarrow \infty, \quad m = 0, 1, \dots \quad (44)$$

于是, 慢子系统的最优控制律为

$$u_s^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_s^{(m)}(t) = -R_s^{-1} (D_s + B_0^T P_s) H_x^* \varphi^*(t) - R_s^{-1} B_0^T H_g^* \varphi^*(t_f - t), \quad t_f \rightarrow \infty. \quad (45)$$

其中

$$H^* = \lim_{m \rightarrow \infty} H^{(m)}, \quad \varphi^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(t). \quad (46)$$

进一步, 根据奇异摄动系统次优控制律的设计方

法^[17], 由式(8)和(45)可得原系统的次优控制律为

$$u_c(t) = K_x H_x^* \varphi^*(t) + K_\tau H_x^* \varphi^*(t - \tau) + K_g H_g^* \varphi^*(t_f - t) + K_z z(t), \quad t_f \rightarrow \infty. \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} K_z &= -R^{-1} B_2^T P_f, \\ K_x &= K_z A_{22}^{-1} A_{21} - (I + K_z A_{22}^{-1} B_2) R_s^{-1} (D_s + B_0^T P_s), \\ K_\tau &= K_z A_{22}^{-1} A_{23}, \\ K_g &= -(I + K_z A_{22}^{-1} B_2) R_s^{-1} B_0^T. \end{aligned} \quad (48)$$

假设 $(A_0, B_0, Q_s^{1/2})$ 和 $(A_{22}, B_2, Q_3^{1/2})$ 均完全可控可观, 则 Riccati 方程(9)和(11)分别有唯一正定解 P_s 和 P_f . 进而, 若 $\Xi(t)$ 非奇异, 则系统的次优控制律由式(47)唯一确定.

综上所述, 有如下结论:

定理 1 考虑标准线性奇异摄动时滞系统(1)关于二次型性能指标(2)的最优控制问题. 假设: 1) $(A_0, B_0, Q_s^{1/2})$ 和 $(A_{22}, B_2, Q_3^{1/2})$ 均完全可控可观; 2) 矩阵 $\Xi(t)$ 非奇异. 则系统的次优控制律由式(47)和(48)唯一确定.

注 1 在实际工程中, 往往只需求出控制律满足精度需求的近似解即可. 事实上, 由式(47)可直接得到系统的 m 阶次优控制律为

$$\begin{aligned} u_c^{(m)}(t) &= K_x H_x^{(m)} \varphi^{(m)}(t) + K_z z(t) + \\ &K_\tau H_x^{(m)} \varphi^{(m)}(t - \tau) + \\ &K_g H_g^{(m)} \varphi^{(m)}(t_f - t), \\ &t_f \rightarrow \infty, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (49)$$

注 2 上述推导是基于第 1 类 Chebyshev 多项式的, 对于第 2 类 Chebyshev 多项式, Jacobi 多项式, Legendre 多项式, Laguerre 多项式, 以及 Hermite 等其他类型的正交多项式, 亦可类似讨论. 事实上, 设正交多项式级数的一般递推式为

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1, \quad \varphi_1(t) = a_0 t + b_0, \\ \varphi_{i+1}(t) &= (a_i t + b_i) \varphi_i(t) - c_i \varphi_{i-1}(t), \\ &i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (50)$$

其中: a_i, b_i 和 c_i 为正交多项式的递推系数, 其值取决于对应的正交多项式的类型. 由式(19)和(20)容易求得相应于不同正交多项式的变换矩阵 N .

4 仿真算例

考虑由式(1)和(2)描述的奇异摄动时滞系统最优控制问题. 其中: 系统参数矩阵为^[18]

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -16.11 & -0.39 \\ 0.01 & -16.99 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1.8 \\ 1.4 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \begin{bmatrix} 27.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.47 \end{bmatrix}, \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} 1.511 & 0 \\ -5.336 & 0 \\ 0.227 & 6.91 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 3.21 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_{22} &= \begin{bmatrix} -5.36 & -1.657 & 7.178 \\ 0 & -10.72 & 23.211 \\ 0 & 0.2273 & -10.299 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 11.12 & -12.6 \\ -3.61 & 3.36 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2.191 & 0 \\ -5.36 & 0 \\ 6.91 & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)
 \end{aligned}$$

初始条件为

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= [0.02 \quad -0.2]^T, \quad -0.4 \leq t \leq 0; \\
 z(0) &= [0.05 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (52)
 \end{aligned}$$

设二次型性能指标的权矩阵分别为 $Q = I_5$ 和 $R = I_2$, 摄动参数为 $\varepsilon = 0.1$. 图1给出了采用本文方法, 当 m 取不同值时系统二次型性能指标值的收敛过程. 若给定容许误差为 $\varepsilon = 0.08$, 则经过简单计算易知 u_{12} 可作为系统满足精度要求的次优控制律. 图2~图4给出了当 $m = 6, 8, 10$ 和 12 时系统的状态分量 x_1, z_3 和控制分量 u_1 的仿真曲线. 由图1~图4可以看出, 采用 Chebyshev 多项式方法对于求解奇异摄动时滞系统的次优控制问题是有效的.

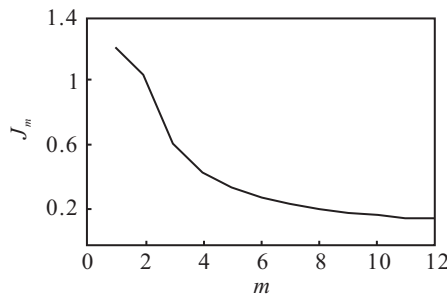


图1 不同迭代次数 m 对应的性能指标值 J_m

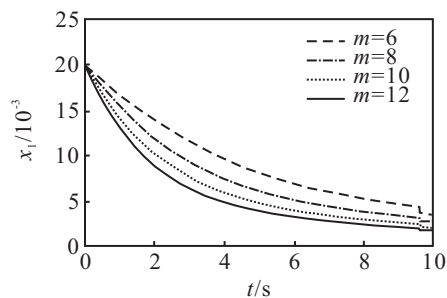


图2 状态分量 x_1

需要强调的是, 摄动法^[4]将原问题转化为求解微分方程初值问题序列, 并选择对应的无时滞情形下的微分方程的解作为初始值, 进而得到系统的次优控制律, 每次迭代都需要求解微分方程, 算法较复杂, 工作量较大. 与摄动法相比, 本文给出的正交级数法将

原问题转化为不同阶次的线性代数方程组的求解问题, 算法更加直观简单; 另一方面, 根据函数逼近理论, 要想提高逼近精度, 提高正交多项式的次数 m 是必要的, 但这将引起计算量的增加. 为此, 将在后续研究中利用正交基函数神经网络来解决该问题.

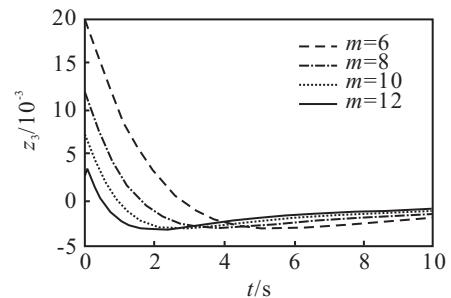


图3 状态分量 z_3

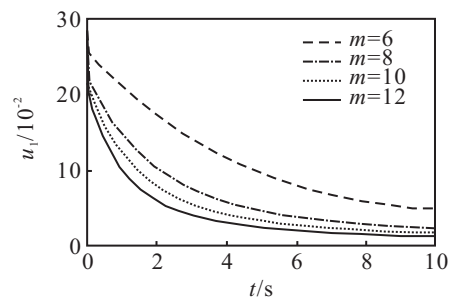


图4 控制分量 u_1

5 结 论

本文研究了线性奇异摄动时滞系统最优控制的近似设计问题. 根据奇异摄动系统的快慢分解理论, 给出了系统次优控制律设计的 Chebyshev 多项式级数方法. 该方法将奇异摄动时滞系统次优控制律的设计问题转化为线性代数方程组的求解问题. 仿真算例表明, 采用该方法求解系统的次优控制律是有效的.

参考文献(References)

- [1] Cai G P, Huang J Z, Yang S X. An optimal control method for linear systems with time delay[J]. Computers and Structures, 2003, 81(15): 1539-1546.
- [2] Kolmanovsky V, Maizenberg T L. Optimal control of continuous-time linear systems with time-varying random delay[J]. Systems and Control Letters, 2001, 44(2): 119-126.
- [3] Tang G Y, Wang H H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems[J]. Int J of Systems Science, 2005, 36(3): 153-161.
- [4] Tang G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: A successive approximation approach[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(5): 429-434.
- [5] Zhao X H, Tang G Y. Suboptimal control of linear discrete large-scale systems with state time-delay [C]. Proc of the

- 4th Int Conf on Control and Automation. Montreal: IEEE Press, 2003: 404-408.
- [6] 张宝琳, 郑菲菲, 唐功友, 等. 线性时滞系统前馈-反馈次优控制: Taylor级数法[J]. 控制与决策, 2010, 25(11): 1723-1726.
(Zhang B L, Zheng F F, Tang G Y, et al. Feedforward and feedback suboptimal control for linear time-delay systems: Taylor series approach[J]. Control and Decision, 2010, 25(11): 1723-1726.)
- [7] Zhang X F, Cheng Z L, Liu Q R. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear time-delay systems[C]. Proc of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. New York: IEEE Press, 2004, 1: 902-906.
- [8] Glizer V Y. Controllability of nonstandard singularly perturbed systems with small state delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(7): 1280-1285.
- [9] Glizer V Y. On stabilization of nonstandard singularly perturbed systems with small delays in state and control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 1012-1016.
- [10] Fridman E. Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems[J]. Automatica, 2002, 38(5): 897-902.
- [11] Glizer V Y, Fridman E. Control of linear singularly perturbed systems with small state delay[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 250(1): 49-85.
- [12] Fridman E. A descriptor system approach to nonlinear singularly perturbed optimal control problem[J]. Automatica, 2001, 37(4): 543-549.
- [13] Kim Y J, Kim B S, Lim M T. Composite control for singularly perturbed bilinear systems via successive galerkin approximation[J]. IEE Proc of Control Theory and Applications, 2003, 150(5): 483-488.
- [14] Zhang B L, Fan M Q. Near optimal control for singularly perturbed systems with small time-delay[C]. Proc of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing: IEEE Press, 2008: 7212-7216.
- [15] Zhang B L, Tang G Y, Yue D. Optimal disturbance rejection control for singularly perturbed composite systems with time-delay[J]. Asian J of Control, 2009, 11(3): 327-335.
- [16] Mohsen R, Elnagar G. N. Linear quadratic optimal control problems via shifted legendre state parameterization[J]. Int J of System Science, 1994, 25(2): 393-399.
- [17] Chow J, Kokotovic P. A decomposition of near-optimum regulators for the systems with slow and fast modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1976, 21(5): 701-706.
- [18] Kecman V, Bingulac S, Gajic Z. Eigenvector approach for order reduction of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems[J]. Automatica, 1999, 35(1): 151-158.

(上接第690页)

- [7] 唐志国, 李元春, 刘木林. 机械臂协调操作柔性负载鲁棒神经网络控制[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2010, 44(7): 1394-1399.
(Tang Z G, Li Y C, Liu M L. Robust neural network control of dual-manipulator cooperative system handling flexible payload[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2010, 44(7): 1394-1399.)
- [8] Xuezhang H, Sze-Kai T. Analysis and control of a two-link and three-joint elastic robot arm[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 152(3): 759-777.
- [9] 曹小涛, 李元春. 基于分布参数模型的柔性臂系统变结构力控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(9): 1035-1039.
(Cao X T, Li Y C. Variable structure force control of flexible manipulator based on distributed parameter model[J]. Control and Decision, 2008, 23(9): 1035-1039.)
- [10] Wu J Q, Luo Z W. Gain scheduled control for robot manipulator's contact tasks on flexible environments[C]. Int Workshop on Advanced Motion Control. Tsu City, 1996: 512-517.
- [11] Tang Z G, Li Y C. Backstepping control of manipulators handling a flexible payload based on distributed parameter[C]. 6th Int Conf on Manufacturing Automation. Hong Kong, 2010: 224-231.
- [12] 许可康. 控制系统中的奇异摄动[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
(Xu K K. Singular perturbation in the control system[M]. Beijing: Science Press, 1986.)