

文章编号: 1001-0920(2012)04-0593-05

独轮自平衡机器人双闭环非线性PID控制

王启源, 阮晓钢

(北京工业大学 电子信息与控制工程学院, 北京 100124)

摘要: 针对竖直飞轮独轮自平衡机器人系统, 提出一种用于独轮自平衡机器人的平衡及运动控制的双闭环非线性PID控制方法(DLNPID), 并给出了该控制方法稳定性的证明. 该控制方法是具有横滚倾角内环、俯仰倾角内环和前向位移外环的双闭环控制, 其中每个控制环均由非线性PID控制器(NPID)构成. 实验结果表明, 所提出的基于非线性PID的双闭环独轮自平衡机器人控制方法具有比线性方法更好的鲁棒性能.

关键词: 独轮自平衡机器人; 非线性; 双闭环控制; 稳定性分析

中图分类号: TP391

文献标识码: A

Dual loop nonlinear PID control of single-wheeled robot

WANG Qi-yuan, RUAN Xiao-gang

(School of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China.

Correspondent: WANG Qi-yuan, E-mail: yuanij@126.com)

Abstract: This paper proposes a dual loop nonlinear control method based on non-linear PID(DLNPID) for the single-wheeled robot. The control method is proposed as dual-loop non-linear control method which has roll tilt inner control loop, pitch tilt inner control loop and x control loop. Every control loop consists of nonlinear PID controller. The stability of the control system is proved by Lyapunov method. Experiment results show better robustness of DLNPID than that of linear methods.

Key words: single-wheeled robot; nonlinear; dual loop control; stability analysis

1 引言

人或其他智慧生物需经过一定的训练和学习才能骑行独轮自行车. 独轮自平衡机器人(SWR)是模拟人类骑行独轮车的行为构建的一种自平衡机器人系统. 与一般移动机器人相比, SWR与地面接触点的数目降到最小, 是一种典型的非完整、非线性、静不平衡系统. SWR的研究始于20世纪七八十年代, 主要集中于日本、美国等国家^[1-2]. 1987年, 斯坦福大学的Schoonwinkel等人根据人骑独轮车原理, 应用轮子、支架和旋转的水平转盘3部分设计了一种SWR^[3]. 1990年, 麻省理工学院的Vos等人应用Schoonwinkel等人的模型, 提出一种新的LQG控制结构, 实现了这种机器人的稳定性控制, 但没有实现机器人的运动控制^[4]. 2007年, 美国加州大学圣地亚哥分校研制成功一款名为UniBot的SWR, 利用极点配置算法控制上端的竖直飞轮和下端的一个行走轮, 成功地实现了自

身的平衡^[5]. 在2008年9月31日召开的Ceatec Japan 2008展会上, 日本村田制作所推出了名为“村田少女”的独轮车机器人, 该机器人通过转动机器人人体内配备的惯性轮保持侧向平衡, 而前向平衡则通过机器人的车轮来控制^[6]. 郭磊等人研究了一种带水平飞轮和运动配重机构的独轮机器人的动力学模型, 并根据线性理论MIMO方法设计控制算法对其进行了控制实验^[7]. Ruan等人利用滑模变结构和模糊控制方法对忽略SWR偏转角和左右方向位移的退化模型进行了控制研究^[8-9]. 上述研究中的控制方法, 为达到满意的性能, 大多需要知道其精确的系统动力学参考模型, 然而实际应用中则很难获得这样的精确模型.

针对上述问题, 本文提出一种基于非线性PID的双闭环控制结构(DLNPID), 用于竖直飞轮型独轮自平衡机器人的平衡及运动控制, 并对其稳定性进行了分析. 实验结果表明, 所设计的非线性PID双闭环

收稿日期: 2010-10-19; 修回日期: 2011-03-07.

基金项目: 国家863计划项目(2007AA04Z226); 国家自然科学基金项目(61075110); 北京市教委重点项目(KZ200810005002); 北京市自然科学基金项目(4102011).

作者简介: 王启源(1982-), 男, 博士生, 从事机器人、人工智能等研究; 阮晓钢(1958-), 男, 教授, 博士生导师, 从事模式识别、人工智能等研究.

(DLNPID) 控制器具有较线性控制方法更好的鲁棒性能。

2 独轮自平衡机器人

独轮自平衡机器人示意如图1所示。整个机器人模拟人类骑行独轮车的总体结构, 采用垂直惯性飞轮和行走轮配合方案, 即飞轮调节横滚自由度平衡, 行走轮调节俯仰自由度平衡, 机械本体仅有一行走轮接触地面。

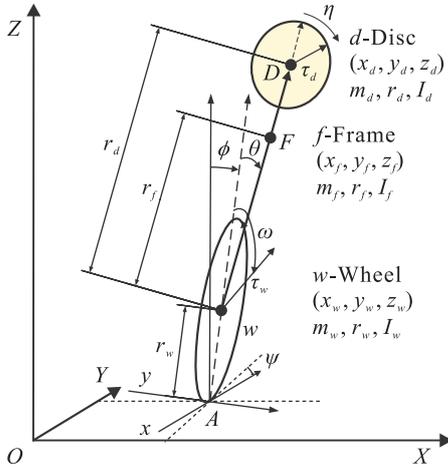


图1 独轮自平衡机器人简化模型

SWR 系统的动力学方程为

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = Nu. \quad (1)$$

其中

$$M(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & M_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & M_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & M_{35} & M_{36} & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & 0 & 0 & M_{47} \\ 0 & 0 & M_{53} & 0 & M_{55} & 0 & M_{57} \\ 0 & 0 & 0 & M_{64} & M_{65} & 0 & M_{67} \\ 0 & 0 & M_{73} & 0 & M_{75} & M_{76} & 0 \end{bmatrix},$$

$$V(q, \dot{q}) = [0 \quad 0 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6 \quad V_7]^T,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$M_{13} = r_w \dot{\psi} s\psi - r_w c\psi,$$

$$M_{23} = -r_w s\psi - r_w \dot{\psi} c\psi,$$

$$M_{33} = r_w^2 m_{tot} + I_{w2},$$

$$M_{35} = r_w m_1 c\theta,$$

$$M_{36} = r_w \dot{\psi} s\psi - r_w c\psi + I_{w2} s\phi,$$

$$M_{43} = -m_{tot} r_w^2 \dot{\psi} c\phi,$$

$$M_{44} = m_{tot} r_w^2 c^2 \phi + 2m_1 r_w c\theta c^2 \phi + m_2 c^2 \theta c^2 \phi + I_{w1} + (I_{f1} + I_{d1}) c^2 \theta,$$

$$M_{47} = I_{d1} c\theta,$$

$$M_{53} = m_{tot} r_w^2 s\phi (1 + 2\dot{\psi} s\psi c\psi) +$$

$$m_1 r_w c\theta s\phi + I_{w2} s\phi,$$

$$M_{55} = I_{w3} c^2 \phi + (I_{f3} + I_{d3}) c^2 \phi c^2 \theta,$$

$$M_{57} = -I_{d1} c\phi s\theta, \quad M_{64} = I_{d1} c\theta,$$

$$M_{65} = -I_{d1} c\phi s\theta, \quad M_{67} = I_{d1},$$

$$M_{73} = m_1 r_w c\theta, \quad M_{75} = m_1 r_w c\theta s\phi,$$

$$M_{76} = m_2 c^2 \theta;$$

$$V_3 = I_{w2} \dot{\psi} \dot{\phi} c\phi,$$

$$V_4 = -m_{tot} r_w g s\phi -$$

$$m_1 (g c\theta s\phi + r_w \dot{\psi} \dot{\omega} c\theta c\phi) - I_{w2} \dot{\omega} \dot{\psi} c\phi,$$

$$V_5 = m_1 r_w [\dot{\omega} \dot{\psi} s\theta + 2\dot{\omega} \dot{\theta} c\theta s\psi c\psi] +$$

$$I_{w2} \dot{\omega} \dot{\phi} c\phi - I_{d1} \dot{\eta} \dot{\theta} c\phi c\theta,$$

$$V_6 = -I_{d1} \dot{\psi} \dot{\theta} c\phi c\theta,$$

$$V_7 = r_w m_1 \dot{\phi} \dot{\psi} c\theta c\phi - r_w m_1 \dot{\omega} \dot{\psi} c\theta s\psi c\psi -$$

$$g m_1 s\theta c\phi + m_2 (\dot{\psi} \dot{\phi} c^2 \theta c\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} c\theta c\theta s\psi c\psi) +$$

$$\dot{\phi} \dot{\psi} c\theta c\theta c\phi c\psi c\psi) + (I_{f2} + I_{d2}) \dot{\psi} \dot{\phi} c\phi +$$

$$I_{d1} \dot{\psi} \dot{\eta} c\phi c\theta + r_w m_1 \dot{\phi} \dot{\theta} c\theta c\phi c\psi c\psi.$$

式中 $c(\cdot)$ 和 $s(\cdot)$ 分别表示 $\cos(\cdot)$ 和 $\sin(\cdot)$ 。

参数及变量定义如表1所示。

表1 参变量定义

变量	定义	值
m_w/kg	行走轮质量	2
m_f/kg	躯干质量	4
m_d/kg	飞轮质量	4
$I_w/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	行走轮对轮轴的转动惯量	$\begin{bmatrix} 0.0019 \\ 0.0019 \\ 0.00041 \end{bmatrix}$
$I_f/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	机器人躯干的转动惯量	$\begin{bmatrix} 0.044 \\ 0.044 \\ 0.0075 \end{bmatrix}$
$I_d/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	飞轮转动惯量	$\begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.040 \\ 0.041 \end{bmatrix}$
r_w/m	行走轮半径	0.1
r_f/m	行走轮心至躯干质心距离	0.4
r_d/m	行走轮心到至飞轮质心距离	0.5
$g/(\text{m}/\text{s}^2)$	重力加速度	9.8
ψ/rad	偏转角	变量
θ/rad	俯仰角	变量
ϕ/rad	横滚角	变量
η/rad	飞轮旋转角	变量
ω/rad	行走轮旋转角	变量
$\tau_w/(\text{N} \cdot \text{m})$	行走电机的输出转矩	变量
$\tau_d/(\text{N} \cdot \text{m})$	飞轮电机的输出转矩	变量
$(x, y, z)/\text{m}$	车轮位置	变量

3 控制器设计

3.1 独轮自平衡机器人分析

若 $\theta, \phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, 则机器人只有直立静止一

种自治平衡状态,即

$$x_e = [x \ y \ \omega \ 0 \ \psi \ 0 \ \eta]^T. \quad (2)$$

在 x_e 邻域,有

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \sin \phi \approx \phi,$$

$$\cos \phi \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1,$$

且忽略与 α, θ, ϕ 相关的高次项的影响(将相乘的耦合项亦认为高次项),对式(1)进行线性化近似. 令

$$x = [x \ \phi \ \theta \ \eta \ \dot{x} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\eta}]^T,$$

将式(1)化为如下状态空间形式:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (3)$$

$$\text{其中: } A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ A_{21} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ B_{21} \end{bmatrix}.$$

观察矩阵 A 和 B , 发现其为分块对角阵, 从而可对系统进行解耦, 分成2个单输入系统^[10]: 一个描述系统的俯仰角、位移, 即

$$x = [\theta \ \dot{\theta} \ x_1 \ \dot{x}_1]^T, \quad (4)$$

输入控制量为 $U_1 = \tau_1$; 另一个描述系统绕竖直轴的横滚角度, 即

$$x_2 = [\alpha \ \dot{\alpha}]^T, \quad (5)$$

输入控制量为 $U_2 = \tau_2$.

$$J_1 \ddot{x}_1 + K_1 \dot{x}_1 = L_1 u_1, \quad (6)$$

$$J_2 \ddot{x}_2 + K_2 \dot{x}_2 = L_2 u_2. \quad (7)$$

其中

$$J_1(q_1) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{41} & J_{43} \end{bmatrix}, \quad K_1(q_1, \dot{q}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix},$$

$$J_2(q_2) = \begin{bmatrix} J_{22} & I_{d1} \\ I_{d1} & I_{d1} \end{bmatrix}, \quad K_2(x_2, \dot{x}_2) = \begin{bmatrix} K_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$J_{11} = (r_w^2 m_{tot} + I_{w2})/r_w, \quad J_{13} = r_w m_1,$$

$$J_{22} = m_{tot} r_w^2 + m_2 + 2m_1 r_w + I_{f1} + I_{d1} + I_{w1},$$

$$J_{41} = r_w m_1, \quad J_{43} = I_{f2} + I_{d2} + m_2,$$

$$K_{22} = -(m_1 g + m_{tot} r_w g) \phi, \quad K_{43} = -m_1 g \theta,$$

$$m_1 = (m_d r_d + m_f r_f), \quad m_2 = (m_d r_d^2 + m_f r_f^2),$$

$$m_{tot} = (m_w + m_d + m_f).$$

这样, 原来的多输入系统便分解成了2个单输入系统, 从而可以分别对这2个子系统设计相应的控制器, 分别计算出2个子系统的控制量 U_1 和 U_2 . 经分析可知, 2个子系统都是能控能观的.

3.2 控制器结构

针对独轮自平衡机器人的控制系统包括两种同步的控制任务: 一是平衡控制, 即保持机身平衡姿态;

另一种是运动控制, 即控制机器人的位移. 其中平衡控制是基础, 要求在机器人运行状态中姿态镇定在直立位置附近.

实际独轮自平衡机器人控制系统是一个离散非线性系统, 线性系统的控制方法较难取得较为满意的控制效果, 并且由于机器人主控器内存及运算速度的限制, 使得过于复杂的控制算法难于实现. 基于上节分析, 借鉴广泛应用的双闭环控制结构提出一种基于非线性PID的双闭环控制结构(DLNPID), 以对独轮自平衡机器人进行姿态和运动控制. 控制结构如图2所示, 横滚和俯仰控制器采用单独的非线性PID控制器NPID₁和NPID₂, 并在俯仰控制器NPID₂之外设计同样原理的位移非线性PID控制器NPID_x作为双闭环的外环, 从而构成双闭环控制结构. 其中位移控制器的输出量作为俯仰角控制器的输入, 横滚角的输入为0, 即控制目标是保持机器人直立.

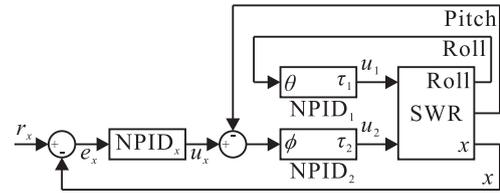


图2 DLNPID控制结构示意图

关于姿态平衡控制问题, 对独轮自平衡机器人而言是最基础、最重要的问题, 其控制目标是使机器人的机身姿态倾角状态等于给定的期望倾角 $\theta=0$, 则姿态平衡的线性PD控制器可表示为

$$\tau_B = PD_B \theta = K_P \theta + K_D \dot{\theta}. \quad (8)$$

考虑检测信号的噪声问题, 本文采用PD控制器而非PID控制器.

线性的PD控制器在适当的增益系数下能够实现姿态平衡控制^[11], 但存在如下明显不足:

- 1) 控制器无非线性环节, 控制域较小, 控制性能一般;
- 2) 自平衡机器人姿态倾角 θ 的测量噪声无法避免, 因此 θ 一直处于抖动状态.

使用非线性PD控制器替代线性PD控制器可以在一定程度上解决上述问题, 同时能够令控制器保持较为清晰明确的物理意义.

目前, 非线性PID控制器大致分为两类: 一类是直接控制量(direct-action)型; 另一类是增益调整(gain-scheduling)型. 数学表达式分别如下: 直接控制量型

$$u^D = u_P(x, \theta_P) + u_I(x, \theta_I) + u_D(x, \theta_D); \quad (9)$$

增益调整型

$$u^G = K_P(x, \theta) e + K_I(x, \theta) \int e dt + K_D(x, \theta_D) \frac{de}{dt}. \quad (10)$$

其中: u, e 分别为控制量输入与控制响应误差信号; x, θ 分别为非线性函数的自变量向量和参数向量; $u_P(\cdot), u_I(\cdot)$ 和 $u_D(\cdot)$ 分别代表比例、积分、微分 3 个非线性分量函数; $K_P(\cdot), K_I(\cdot)$ 和 $K_D(\cdot)$ 分别为比例、积分、微分 3 个非线性增益函数.

为简化控制器设计并保持清晰的物理意义, 本文选择形如式 (9) 的直接控制量型非线性 PID 控制器来构造一种 PD 控制器, 具体形式为

$$\tau_B = \text{PD}_{\text{NLB}}(\theta) = -K_P(\theta) - K_D(\dot{\theta}). \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} K_P(\theta) = \bar{K}_P \tan(\bar{\omega}_P \theta), \\ K_D(\dot{\theta}) = \bar{K}_D \dot{\theta}; \end{cases}$$

$K_P(\theta)$ 为非线性 P 参数, 适当地选择参数 \bar{K}_P 和 $\bar{\omega}_P$ 值使控制量 $u(\theta)$ 在 $|\theta|$ 较小时斜率较小, 在 $|\theta|$ 较大时斜率较大; 选较大的 $\bar{\omega}_P$ 值, 是为了适当地拓展 $(-\Theta_{\text{MAX}}, \Theta_{\text{MAX}})$ 空间, 特别是在高频噪声严重时; $K_D(\dot{\theta})$ 为非线性 D 参数, 是与 $K_P(\theta)$ 共同参考了独轮自平衡机器人的动力学方程得到的.

3.3 控制器稳定性分析

不失一般性, 设含有 n 自由度关节的非线性系统的动力学模型描述为^[12]

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau. \quad (12)$$

其中: $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$ 分别为自由度关节位置、速度和加速度矢量; $M(q) \in R^{n \times n}$ 为正定惯量矩阵; $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ 为哥氏力和离心力矩阵; $g(q) = \partial U(q)/\partial q \in R^n$ 为重力向量, $U(q)$ 为重力引起的势能; $\tau \in R^n$ 为控制力矩矢量.

控制目标是为了使得非线性系统从初始位置 $[q(0), \dot{q}(0)]$ 稳定到达目标 $[q, \dot{q}, \ddot{q}]^T = 0 \in R^{3n}$. 施加如式 (11) 所示的非线性 PID 控制律, 将控制量代入非线性系统 (12), 可得闭环系统方程为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + K_P(q) + K_D(\dot{q}) = 0. \quad (13)$$

定义如下正定的 Lyapunov 函数^[13]:

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + U(q) - U(0) - q^T g(0) + q^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} q^T (K_P + K_D) q. \quad (14)$$

将式 (14) 对时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q) + \\ & \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \dot{q}^T (K_P + K_D) q + \\ & q^T \dot{M}(q) \dot{q} + q^T M(q) \ddot{q} - \dot{q}^T g(0). \end{aligned} \quad (15)$$

根据非线性系统动力学特性^[14]化简式 (15), 可得

$$\dot{V} = -\dot{q}^T [K_D - M(q) - \varepsilon C_M] \dot{q} - a \|q\|^2. \quad (16)$$

可选择对角正定微分增益矩阵 K_D 足够大, 使

$$K_D - M(q) - \varepsilon C_M > 0, \quad (17)$$

且 a 为正常数, 可得

$$\dot{V} \leq 0. \quad (18)$$

基于上述分析, 对于非线性 PID 控制的非线性系统, 有如下定理:

定理 1 对于式 (12) 所示的非线性系统, 若应用非线性 PID 控制器 (11), 并选择合适的控制器比例和微分增益系数, 则系统的控制误差是半全局渐近收敛的.

4 控制实验

按照表 1 的参数, 并根据上节设计的控制系统在 Matlab 中建立独轮自平衡机器人的非线性动力学模型和双闭环非线性 PID 控制器, 其中 $\bar{K}_{\text{Pitch}} = [44, 5]$, $\bar{K}_{\text{Roll}} = [106, 17]$, $\bar{K}_x = [10, 3]$, 非线性参数 $\bar{\omega}_{\text{Pitch}} = 2$, $\bar{\omega}_{\text{Roll}} = 5$, $\bar{\omega}_x = 1$.

给定初始条件如下: 机器人初始位移 $x = 0 \text{ m}$, 即系统初始状态为 $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; 位移控制目标为到达 1 m 处, 且横滚自由度在 5 s 时受到 $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的冲击, 持续 0.1 s, 即机器人初始处于平衡状态, 从位移为 0 m 处向位移为 1 m 处运动, 并在此期间受到横滚方向冲击. 实验结果如图 3 所示.

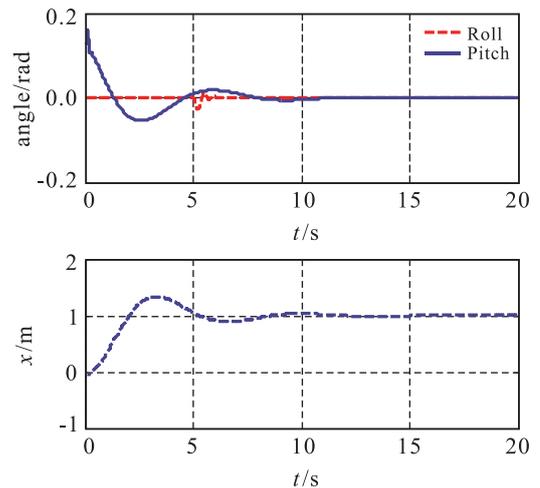


图 3 DLNPID 控制曲线

从图 3 可以看出, 机器人的目标位移为 1 m, 即向前运行, 所以在控制量作用下, 车轮先向后转动, 使机器人的上身出现一个正的倾角; 运动到 5 s 时, 横滚自由度也由于扰动冲击而产生了倾角; 之后, 机器人在倾角的调节过程中向目标位置运动, 在 2 s 时超过目标位置再回调, 直到稳定于距指定目标 1 m 的位置.

上述实验结果表明, 所设计的控制器可以实现独轮自平衡机器人保持直立状态下直线方向的位移控制, 且具有较好的抗冲击性能或鲁棒性能.

下面进行线性 PID 对比实验. 对无非线性特征的双闭环 PID (LQR) 控制进行完全相同的控制实验, 实

验结果如图4所示。其中

$$K_{\text{Pitch}} = [44 \ 5], K_{\text{Roll}} = [106 \ 17], K_x = [10 \ 3].$$

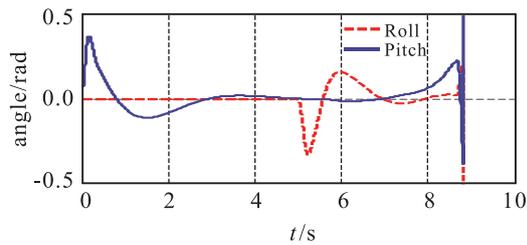


图4 DLPID控制曲线

从图4可以看出,位移控制过程中,线性双闭环PID控制方法(DLPID)未能镇定机器人。

5 结 论

独轮自平衡机器人是模仿人类骑行独轮车的行为构建的一类仿生系统,其运动平衡控制问题是机器人学和机器人技术研究中的重要问题之一。作为强耦合、静不平衡系统的最典型代表之一,独轮自平衡机器人必将越来越受到人们的关注。

本文针对一种垂直飞轮型独轮自平衡机器人系统,对其非线性动力学模型进行了平衡点附近的近似线性化以及解耦,将原来的二输入系统分解为2个单输入系统。利用这一结论,提出了一种基于非线性PID的双闭环控制结构,用于所设计的骑行独轮车的机器人的平衡及运动控制。稳定性分析表明,该控制系统半全局渐近稳定。在控制实验中,使用所设计的控制器对机器人的倾角以及行走位移控制进行了研究,实验结果表明了基于非线性PID控制的双闭环独轮自平衡机器人控制系统能够实现机器人的平衡及运动控制,并具有比双闭环线性PID控制方法更佳的鲁棒性能。

参考文献(References)

[1] Sumiko Majima, Takashi Kasai. A controller for changing the yaw direction of an under actuated unicycle robot[C]. Int Conf on Technology and Automation. Thessaloniki, 2005, 5: 73-88.

[2] Yoav Naveh, Pinhas Z Bar-Yoseph, Yoram Halevi. Nonlinear modeling and control of a unicycle[J]. Dynamics and Control, 1999, 9(4): 279-296.

[3] Schoonwinkel. Design and test of a computer stabilized unicycle[D]. Stanford: The Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 1987.

[4] Vos D W, von Flotow A H. Dynamics and nonlinear adaptive control of an autonomous unicycle: Theory and experiment[C]. Proc of the 29th IEEE Conference on Decision and Control. Honolulu, 1989, 3: 2670-2675.

[5] Jascha van Pommeren, De Callafon. The Unibot[EB/OL]. [2010-03-5]. <http://sicl.ucsd.edu/jaschavp/Project.html>.

[6] Murata Manufacturing Co Ltd. Muratagirl-self balancing unicycle rider robot[EB/OL]. [2010-03-5]. <http://www.muratagirl.com/ssk-3/>.

[7] 郭磊, 廖启征, 魏世民, 等. 独轮车机器人的动力学建模与非线性控制[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(9): 2730-2733.
(Guo L, Liao Q Z, Wei S M, et al. Dynamical modeling of unicycle robot and nonlinear control[J]. J of System Simulation, 2009, 21(9): 2730-2733.)

[8] Ruan Xiaogang, Hu Jingmin, Wang Qiyuan. Modeling with euler-lagrange equation and cybernetical analysis for a unicycle robot[C]. 2009 2nd Int Conf on Intelligent Computing Technology and Automation, ICICTA. Zhangjiajie, 2009, 2: 108-111.

[9] 阮晓钢, 胡敬敏, 蔡建焱, 等. 一种基于模糊控制理论的独轮机器人控制算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(6): 862-866.
(Ruan X G, Hu J M, Cai J X, et al. Control algorithm of unicycle robot based on the fuzzy control theory[J]. Control and Decision, 2010, 25(6): 862-866.)

[10] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 285-305.
(Zheng D Z. Linear system theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 285-305.)

[11] 胡包钢. 非线性PID控制器研究——比例分量的非线性方法[J]. 自动化学报, 2006, 32(2): 219-227.
(Hu B G. A study on nonlinear PID controllers—Proportional component approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2): 219-227.)

[12] 苏玉鑫, 郑红春, Peter C Müller. 非线性机械系统PID控制渐近稳定性分析[J]. 自动化学报, 2008, 34(12): 1544-1548.
(Su Y X, Zheng C H, Peter C M. Asymptotic stability of PID controller for nonlinear mechanical systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(12): 1544-1548.)